
Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 10 : Fonction logarithme néperien

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 20 avril 2009



FIG. 1 – John Napier

À table !!

Table des matières

I	Chapitre 9 : Fonction logarithme	3
I.A	Introduction	3
I.B	Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$	4
I.C	Propriétés algébriques de la fonction \ln	5
I.D	Etude de la fonction \ln	5
I.E	Continuité et dérivabilité de la fonction \ln	5
I.F	Limites usuelles de la fonction \ln	6
I.G	Tableau de variation et courbe représentant la fonction \ln	7
I.H	Fonction $\ln u$	7
I.I	Autres fonctions logarithmes	8



Informations sur la mise en page

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat.

L'environnement `bclogo`, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici : <http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo>

Les tableaux de variations ont été réalisés en utilisant `pstplus` téléchargeable ici : <http://www.xm1math.net/pstplus/index.html>

I Chapitre 9 : Fonction logarithme

I.A Introduction

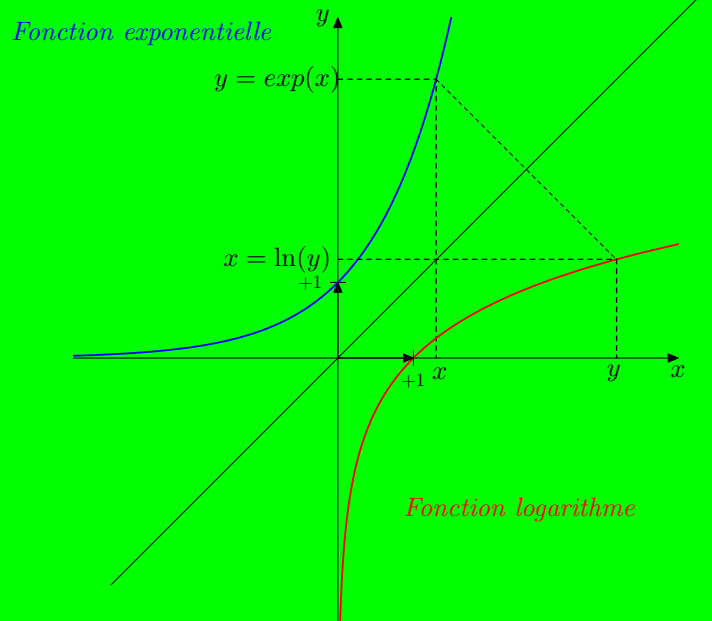


Rappels-Devoir 17

On sait que : pour tout $y \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel x tel que $y = \exp(x)$; on note $x = \ln(y)$, ce qui se lit *logarithme népérien* de y .

Ainsi, à tout réel y strictement positif, on peut associer un réel noté $\ln(y)$.

Le devoir 17 nous permet d'avoir une première idée de la courbe représentative de la fonction \ln nouvellement définie.



Définition 1:

La fonction, définie sur $]0; +\infty[$, qui à x associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** :

$$\ln :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(x)$$

Remarque L'image d'un réel $x > 0$ par la fonction \ln se note souvent, quand il ne peut y avoir de confusion, $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.



Conséquences

1. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y , $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
3. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

On dit que les fonctions \ln et \exp sont des **fonctions réciproques** l'une de l'autre.



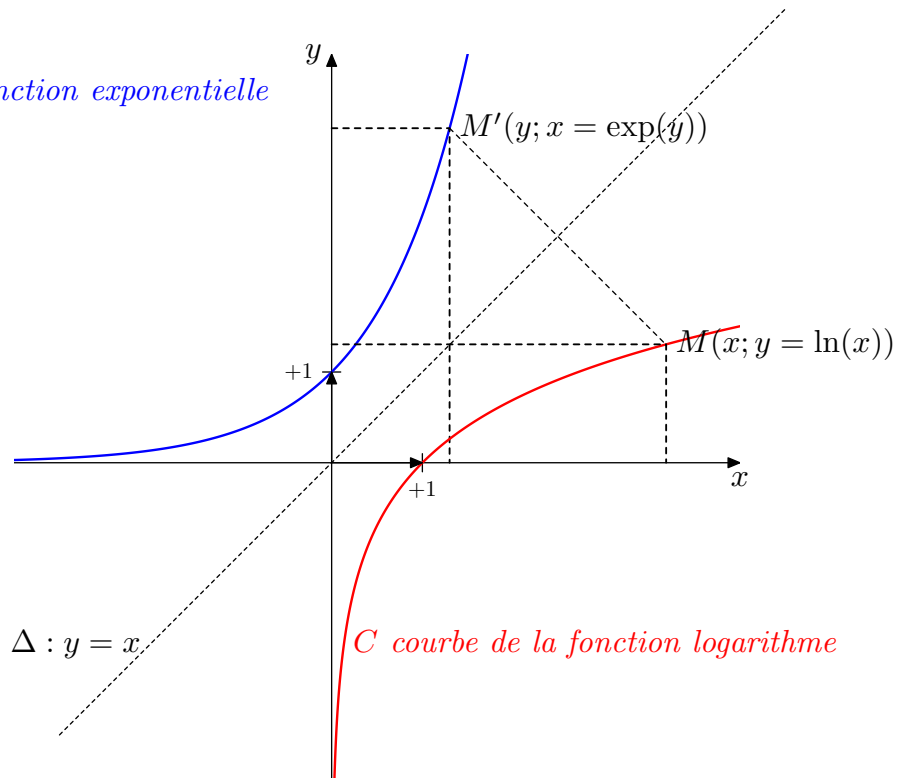
Propriété graphique



Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : On note \mathcal{C} et \mathcal{C}' les courbes représentatives des fonctions \ln et \exp . Dire que $M(x; y)$ appartient à \mathcal{C} équivaut à dire que $M'(y; x)$ appartient à \mathcal{C}' . \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

\mathcal{C}' courbe de la fonction exponentielle



\mathcal{C} courbe de la fonction logarithme

I.B Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$



PROPOSITION 1:



La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration : a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, c'est à dire tels que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc $\ln a < \ln b$.

Donc \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

**PROPOSITION 2:**

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$, La proposition précédente nous permet d'écrire ceci :

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$,
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$,
- $\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$ et $\ln a < 0$ équivaut à $0 < a < 1$.

I.C Propriétés algébriques de la fonction ln**PROPOSITION 3:**

Pour tous réels a et b strictement positifs,

1. $\ln ab = \ln a + \ln b$
2. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln a$
5. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration :

1. On sait que $e^{\ln ab} = ab$ et que $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$
on a alors $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$ ce qui équivaut à $\ln ab = \ln a + \ln b$.
2. On a en particulier $\ln \frac{a}{a} = \ln \left(a \times \frac{1}{a} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$ et $\ln \frac{a}{a} = \ln 1 = 0$, donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \times \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
4. la démonstration se fait par récurrence.
5. on a $\ln a = \ln((\sqrt{a})^2) = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

I.D Etude de la fonction ln**I.E Continuité et dérivabilité de la fonction ln****PROPOSITION 4:**

1. La fonction \ln est continue sur $]0; +\infty[$.
2. La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

La propriété (1) est admise.

En ce qui concerne la deuxième propriété, voici deux démonstrations :

- a et $a + h$ sont deux réels de $]0; +\infty[$, avec $h \neq 0$

On pose $b = \ln a$ et $k = \ln(a + h)$, on a alors $a = e^b$ et $a + h = e^k$, d'où :

$$\frac{\ln(a + h) - \ln a}{h} = \frac{k - b}{e^k - e^b}$$

La fonction \ln est continue sur $]0; +\infty[$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(a + h) = \ln a$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = b$$

La fonction exponentielle est de plus dérivable en b , de dérivée e^b , on a alors

$$\lim_{k \rightarrow b} \frac{e^k - e^b}{k - b} = e^b$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a + h) - \ln a}{h} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}$$

- Voir le devoir 17 pour la deuxième démonstration.

I.F Limites usuelles de la fonction \ln



PROPOSITION 5:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Démonstration :

1. Pour démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, il suffit de prouver que :

pour tout réel M positif et pour tout réel x suffisamment grand, $\ln x > M$ ce qui équivaut à $x > e^M$.

Ainsi, pour tout $M > 0$, et pour $x > e^M$, on a $\ln x > \ln e^M$, ce qui donne $\ln x > M$, ce qui prouve l'assertion.

2. On pose $X = \frac{1}{x}$, on a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ et $\ln x = \ln \frac{1}{X} = -\ln X$

d'après 1. $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$

or $2x > 0$, et $2 - \sqrt{x} > 0$ lorsque $0 < x < 4$, ce qui donne le tableau de variation suivant :

Or, comme la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a $\ln 2 < \ln e$, donc $f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2(\ln 2 - 1) < 0$

Ce qui est résumé dans le tableau de variation suivant :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$f(4) < 0$	

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) < 0$, ce qui donne $\ln x < \sqrt{x}$

On obtient alors : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

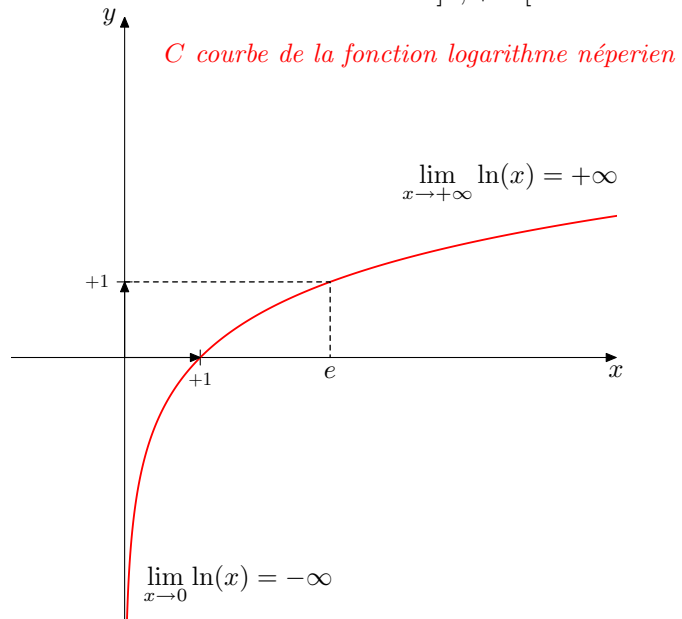
4. L'approximation affine de $\ln(1+x)$ pour x proche de 0, associée à la fonction \ln est donnée par : $\ln(1+x) \simeq \ln 1 + x \ln' 1$, c'est à dire $\ln(1+x) \simeq x$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

I.G Tableau de variation et courbe représentant la fonction \ln

La fonction \ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$



I.H Fonction $\ln u$



THÉORÈME 1

Si u est une fonction **strictement positive** et dérivable sur un intervalle I ouvert, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$\text{pour tout } x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration : On applique le théorème de dérivation d'une fonction composée à la fonction $\ln \circ u$.

La fonction u est dérivable sur I , et la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I :

$$(\ln \circ u)'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Remarque Si u est une fonction dérivable et strictement négative sur un intervalle I , alors la fonction $f = \ln \circ (-u)$ est dérivable sur I et $f' = \frac{(-u)'}{-u} = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$.

I.I Autres fonctions logarithmes



Définition 2:

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.

On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée \log_a définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

La fonction logarithme de base 10 est notée \log et est appelée fonction logarithme décimal.

Remarques :

1. La fonction \log_a a les propriétés algébriques de la fonction \ln .
2. Pour tout réel a strictement positif et $a \neq 1$, $\log_a(a) = 1$; en particulier : $\log(10) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.