Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 10 : Fonction logarithme néperien

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 3 mars 2009

Fig. 1 – John Napier

À table !!

Table des matières

I Chapitre 9 : Nombres complexes **3**
I.A Introduction . . . 3
I.B Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$ . . . 4
I.C Propriétés algébriques de la fonction ln . . . 4
I.D Etude de la fonction ln . . . 5
I.E Continuité et dérivabilité de la fonction ln . . . 5
I.F Limites usuelles de la fonction ln . . . 6
I.G Tableau de variation et courbe représentant la fonction ln . . . 6
I.H Fonction $\ln u$ . . . 7
I.I Autres fonctions logarithmes . . . 7

Informations sur la mise en page

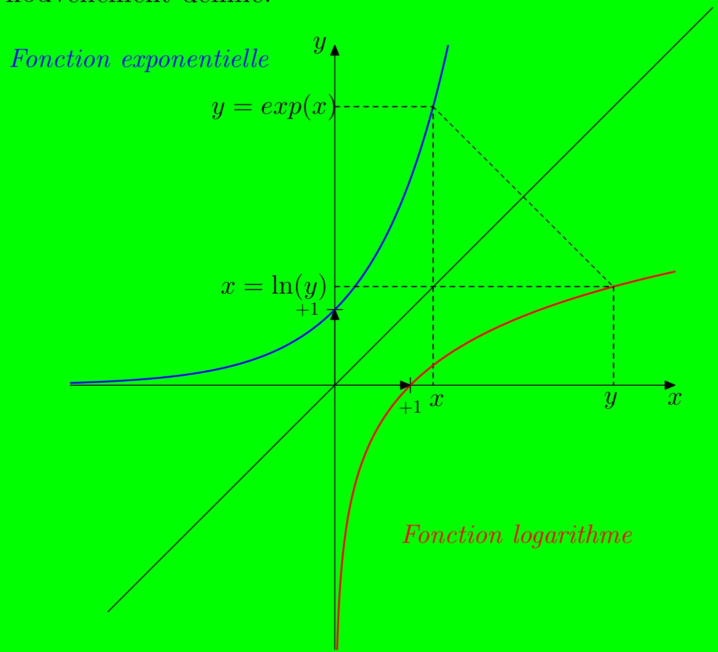
Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici : http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo
Les tableaux de variations ont été réalisés en utilisant *pstplus* téléchargeable ici :
http://www.xm1math.net/pstplus/index.html

I Chapitre 9 : Nombres complexes

I.A Introduction

Rappels-Devoir 17

On sait que : pour tout $y \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel x tel que $y = \exp(x)$; on note $x = \ln(y)$, ce qui se lit *logarithme népérien* de y.
Ainsi, à tout réel y strictement positif, on peut associer un réel noté $\ln(y)$.
Le devoir 17 nous permet d'avoir une première idée de la courbe représentative de la fonction ln nouvellement définie.



Définition 1:

La fonction, définie sur $]0; +\infty[$, qui à x associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** :

$$\ln :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(x)$$

.

Remarque L'image d'un réel $x > 0$ par la fonction ln se note souvent, quand il ne peut y avoir de confusion, $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Conséquences

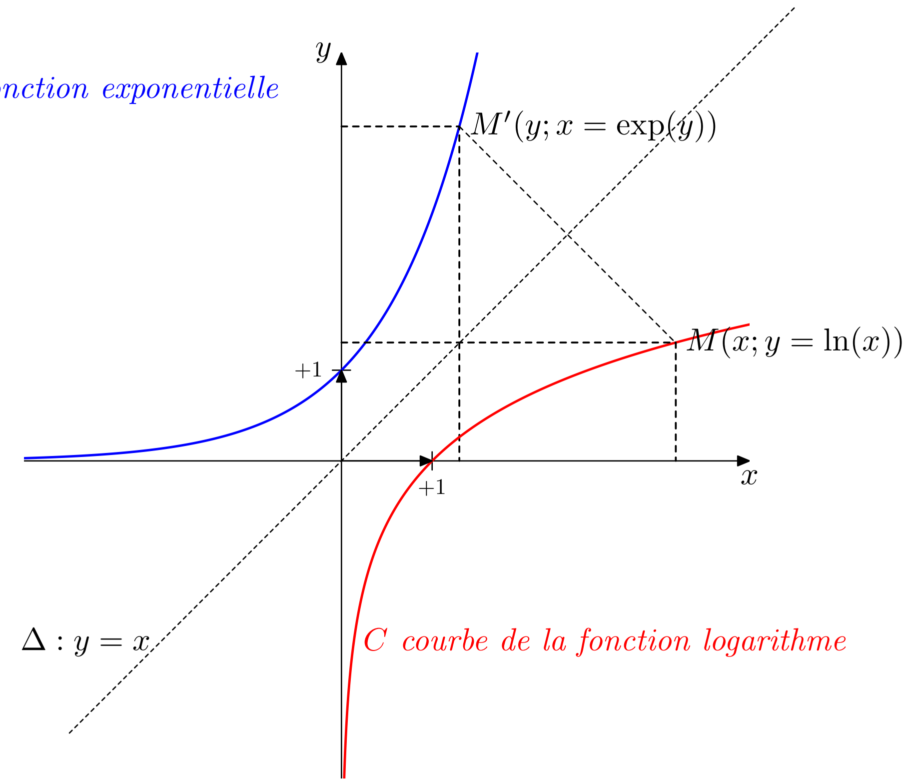
1. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
3. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

On dit que les fonctions ln et exp sont des **fonctions réciproques** l'une de l'autre.

Propriété graphique

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions ln et exp. Dire que $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à dire que $M'(y; x)$ appartient à $\mathcal{C}'$. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



I.B Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$

Proposition 1:

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration : $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont deux réels tels que } 0 < a < b}$, c'est à dire tels que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{donc } \ln a < \ln b}$.
Donc ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Proposition 2:

Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$, La proposition précédente nous permet d'écrire ceci :

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$,
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$,
- $\ln a > 0$ équivaut à $a > 1$ et $\ln a < 0$ équivaut à $0 < a < 1$.

I.C Propriétés algébriques de la fonction ln

PROPOSITION 3:

Pour tous réels a et b strictement positifs,

1. $\ln ab = \ln a + \ln b$
2. $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
3. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln a$
5. $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration :

1. On sait que $e^{\ln ab} = ab$ et que $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$
   on a alors $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$ ce qui équivaut à $\ln ab = \ln a + \ln b$.
2. On a en particulier $\ln \dfrac{a}{a} = \ln \left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{a}$ et $\ln \dfrac{a}{a} = \ln 1 = 0$, donc $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.
3. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln \left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
4. la démonstration se fait par récurrence.
5. on a $\ln a = \ln((\sqrt{a})^2) = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

I.D Etude de la fonction ln

I.E Continuité et dérivabilité de la fonction ln

PROPOSITION 4:

1. La fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration :
La propriété (1) est admise.
En ce qui concerne la deuxième propriété, voici deux démonstrations :

- a et $a + h$ sont deux réels de $]0; +\infty[$, avec $h \neq 0$

  On pose $b = \ln a$ et $k = \ln(a + h)$, on a alors $a = e^b$ et $a + h = e^k$, d'où :

  $$\frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \frac{k - b}{e^k - e^b}$$

  La fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, alors

  $$\lim_{h \to 0} \ln(a + h) = \ln a$$

  d'où

  $$\lim_{h \to 0} k = b$$

  La fonction exponentielle est de plus dérivable en b, de dérivée e^b, on a alors

  $$\lim_{k \to b} \frac{e^k - e^b}{k - b} = e^b$$

  Donc

  $$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}$$

- Voir le devoir 17 pour la deuxième démonstration.

I.F Limites usuelles de la fonction $\ln$

Proposition 5:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration :

1. Pour démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, il suffit de prouver que :
pour tout réel M positif et pour tout réel x suffisamment grand, $\ln x > M$ ce qui équivaut à $x > e^M$.
Ainsi, pour tout $M > 0$, et pour $x > e^M$, on a $\ln x > \ln e^M$, ce qui donne $\ln x > M$, ce qui prouve l'assertion.

2. On pose $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} X = +\infty$ et $\ln x = \ln \dfrac{1}{X} = -\ln X$
d'après **1.** $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

3. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$
or $2x > 0$, et $2 - \sqrt{x} > 0$ lorsque $0 < x < 4$, ce qui donne le tableau de variation suivant :

Or, comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on a $\ln 2 < \ln e$,
donc $f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2(\ln 2 - 1) < 0$
Ce qui est résumé dans le tableau de variation suivant :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$	$f(4) < 0$	$\searrow$	

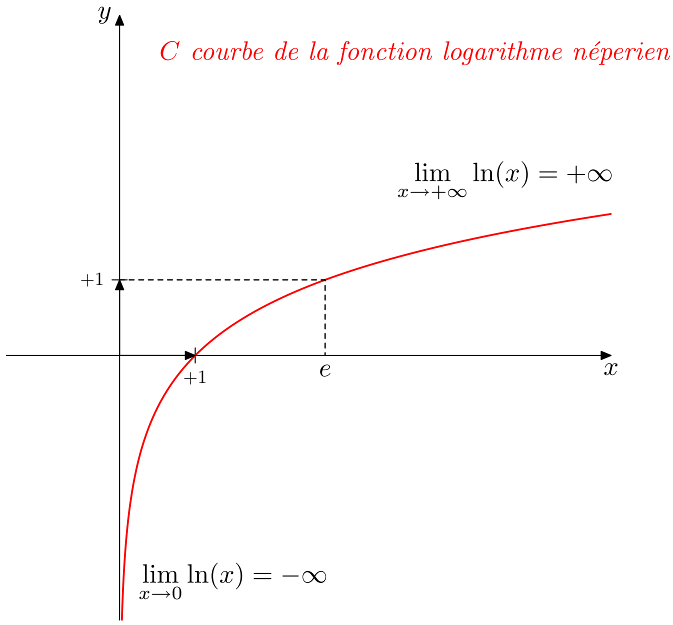
Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) < 0$, ce qui donne $\ln x < \sqrt{x}$
On obtient alors : $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

4. L'approximation affine de $\ln(1+x)$ pour x proche de 0, associée à la fonction $\ln$ est donnée par : $\ln(1+x) \simeq \ln 1 + x \ln' 1$, c'est à dire $\ln(1+x) \simeq x$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

I.G Tableau de variation et courbe représentant la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	||	$+$	
$\ln x$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



I.H Fonction $\ln u$

Théorème 1
Si u est une fonction **strictement positive** et dérivable sur un intervalle I ouvert, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration : On applique le théorème de dérivation d'une fonction composée à la fonction $\ln \circ u$.
La fonction u est dérivable sur I, et la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I :
$(\ln \circ u)'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Remarque Si u est une fonction dérivable et strictement négative sur un intervalle I, alors la fonction $f = \ln \circ (-u)$ est dérivable sur I et $f' = \dfrac{(-u)'}{-u} = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

I.I Autres fonctions logarithmes

Définition 2:
Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.
On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
La fonction logarithme de base 10 est notée log est est appelée fonction logarithme décimal.

Remarques :

1. La fonction $\log_a$ a les propriétés algébriques de la fonction ln.
2. Pour tout réel a strictement positif et $a \neq 1$, $\log_a(a) = 1$; en particulier : $\log(10) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.