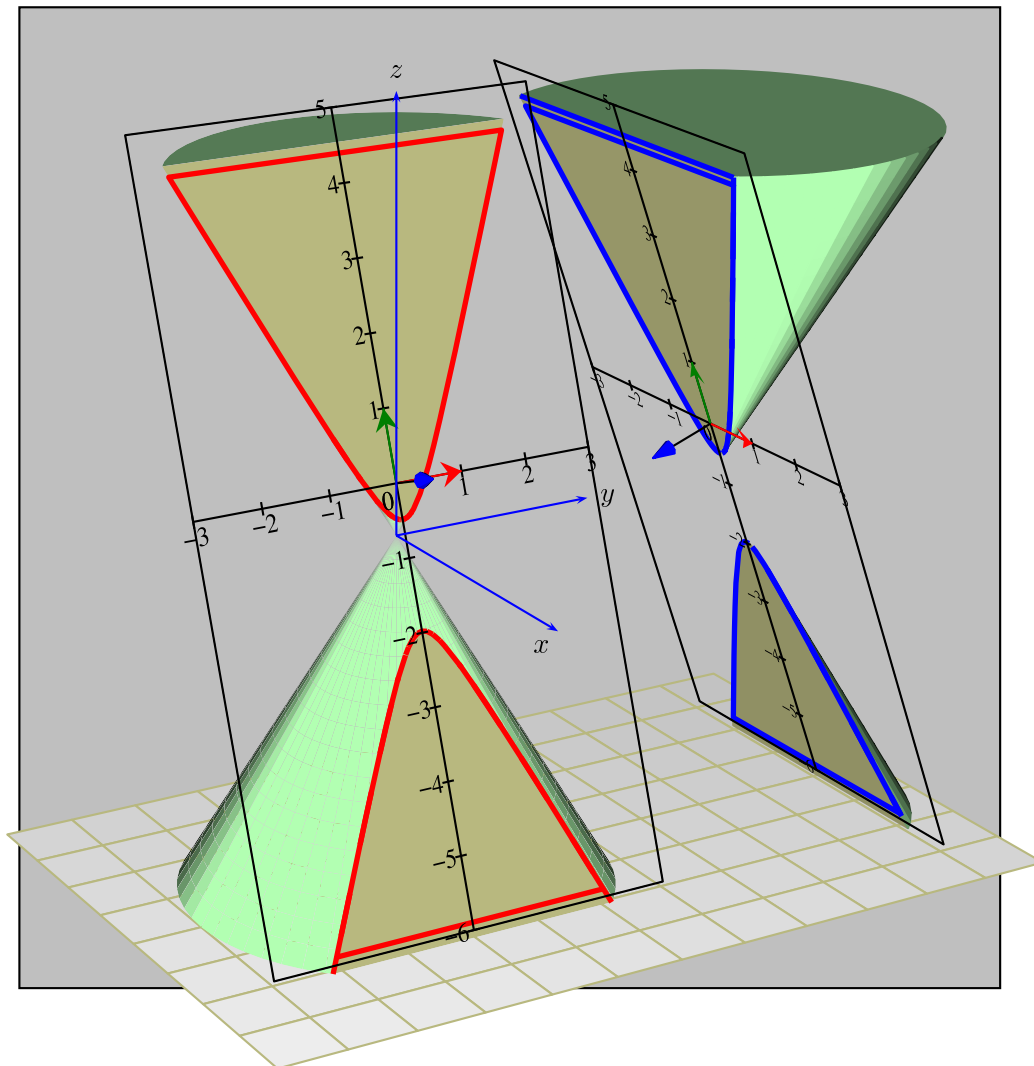


FICHES DE MATHÉMATIQUES

Classe de PT



Par Maxime CHUPIN

Ces fiches sont issues des cours de Jean-Michel SARLAT et de Christian RIEFFEL, professeurs de mathématiques au lycée LOUIS-ARMAND de Poitiers.

Table des matières

1	Généralités	3
2	Intégration sur un segment	5
3	Intégrale généralisées	9
4	Intégrale dépendant d'un paramètre	12
5	Séries numériques	14
6	Séries entières	18
7	Structures algébriques	21
8	Espaces vectoriels	24
8.1	Matrices	29
8.2	Déterminant	32
9	Réduction des endomorphismes	35
10	Espace euclidien et préhilbertien	38
11	Séries de FOURIER	47
12	Equations différentielles	49
12.1	Systèmes différentielles	49
12.2	Equations différentielles linéaires—Généralités	50
12.3	Equations différentielles linéaires à coefficients constants	52
12.4	Equations différentielles linéaires à coefficients variables	54
12.5	Equations non linéaires	56
13	Courbes planes	57
14	Les coniques	61
15	Géométrie différentielle	65
16	Courbes gauches et surfaces	69
17	Fonctions à plusieurs variables	76
18	Intégrales multiples	82
19	Géométrie dans l'espace	88

1 Généralités

Axiomes de PEANO

L'ensemble \mathbf{N} des *entiers naturels* est caractérisé par les cinq propriétés suivantes :

1. \mathbf{N} contient un élément noté 0.
2. Tout éléments n de \mathbf{N} possède un *successeur* : $n + 1$.
3. 0 n'est le successeur d'aucun éléments de \mathbf{N} .
4. Deux éléments de \mathbf{N} ayant le même successeur sont égaux.
5. Toute partie A de \mathbf{N} qui contient 0 et le successeur de tout élément de A est égal à : \mathbf{N} . (ceci est l'axiome d'induction sur lequel se fonde le principe de récurrence)

Récurrence

Récurrence faible :

Soit P un prédicat portant sur des entiers. Si $P(b)$ est vrai et si :

$$\forall n \geq b, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

alors : $\forall n \geq b, P(n)$.

Récurrence forte :

Soit P un prédicat portant sur des entiers. Si $P(b)$ est vrai et si :

$$\forall n \geq b, P(b) \text{ et } P(b + 1) \dots P(n - 1) \text{ et } P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

alors : $\forall n \geq b, P(n)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

T.V.I. :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbf{R} et si α est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \alpha$$

Il en découle que :

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Dérivée

Nombre dérivé :

Soit f une fonction numérique définie sur un voisinage V de a de \mathbf{R} . f est dérivable en a si, et seulement si le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a . Cette limite est le nombre dérivé en a ; on le note $f'(a)$

Fonction dérivée :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbf{R} , f est dérivable sur I si, et seulement si elle est dérivable en tout point de I . Si f est dérivable sur l'intervalle I alors f est continue sur I .

Théorème de ROLLE

Soient a et b deux réels distincts tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissement finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

2 Intégration sur un segment

Définition

La définition :

L'intégrale d'une fonction numérique f , continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbf{R} , est la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui minorent f et, ce qui revient au même, la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui majorent f .

Fonction Intégrale

Soit f une fonction numérique définie et continue par morceaux sur un segment I de \mathbf{R} . La fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est définie et continue sur I .

De plus, si f est **continu** sur I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur I est **dérivable** sur I et

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Sommes de RIEMANN

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On a les trois plus courantes intégrales de RIEMANN :

$$1/ \quad S_g(f, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$2/ \quad S_d(f, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$3/ \quad S_m(f, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ de \mathbf{R} avec $a < b$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Premier Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ de \mathbf{R} et g une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbf{R}_+ telle que $\int_a^b g(t) dt > 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

Propriétés de l'intégrale

f et g sont ici des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

1. Additivité :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

2. Linéarité $(\mu, \lambda) \in \mathbf{R}^2$:

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

3. Positivité :

$$\text{si } \forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x), \text{ alors } \int_a^b f \geq \int_a^b g$$

Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions numériques de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbf{R} et a, b deux éléments de I . Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Changement de variable

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} une fonction continue par morceaux, et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 et monotone sur $[\alpha, \beta]$. On a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \cdot \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

Si φ est bijective et de réciproque dérivable, on la qualifie de *difféomorphisme*.

Intégrales de fonction rationnelles trigonométrique

Lorsqu'on a faire à une fonction rationnelle trigonométrique, on cherche alors une *transformation* $t \mapsto \varphi(t)$ qui laisse le *bloc différentiel* invariant :

Transformation	$t \mapsto -t$	$t \mapsto \pi - t$	$t \mapsto \pi + t$	aucune
Changement de variable adapté	$u = \cos(t)$	$u = \sin(t)$	$u = \tan(t)$	$\theta = \tan \frac{t}{2}$

Intégrales abéliennes

Intégrales sous la forme $\int_{\alpha}^{\beta} F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ où $a \neq 0$.

En mettant $ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique $a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$, on se ramène aux intégrales suivantes, où $k = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|}$, auxquelles on applique les changements de variables indiqués ($\varepsilon = \pm 1$) :

$$\begin{aligned} \int_A^B F(u, \sqrt{u^2 - k^2}) du & \quad \text{si } \Delta > 0 \text{ et } a > 0 & \quad u := \varepsilon k \operatorname{ch}(x), x \in \mathbf{R}_+^* \\ \int_A^B F(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du & \quad \text{si } \Delta > 0 \text{ et } a < 0 & \quad u := k \cos(x), x \in]0, \pi[\\ \int_A^B F(u, \sqrt{u^2 + k^2}) du & \quad \text{si } \Delta < 0 \text{ et } a < 0 & \quad u := k \operatorname{sh}(x), x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Intégrales abéliennes 2

Intégrales sous la forme $\int_{\alpha}^{\beta} F\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) dt$, où $ad - bc \neq 0$, $n \in \mathbf{N}^*$

Il suffit d'appliquer le changement de variable $y = \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pour se ramener à une intégrale de fractions rationnelles pour intégrer en décomposant en éléments simples.

Attention : on rappelle que $u \mapsto \sqrt[n]{u}$ est définie sur \mathbf{R} si n est impaire, et sur \mathbf{R}^+ si n est paire.

Formules de TAYLOR

Soit $p \in \mathbf{N}$, $[a, b]$ un segment de \mathbf{R} et f une fonction de classe C^p sur $[a, b]$. La formule de TAYLOR s'écrit alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_p(a, b)$$

ou explicitement :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (b-a)^p + R_p(a, b)$$

Il existe plusieurs variantes portant sur le reste :

1. **TAYLOR-YOUNG** : $R_p(a, b) = o((b-a)^p)$, f est C^p
2. **TAYLOR-LAGRANGE** : $\left| R_p(a, b) \right| \leq M_p \cdot \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}$ où $M = \sup_{t \in [a, b]} \left| f^{(p+1)}(t) \right|$ et f est C^{p+1}
3. **TAYLOR avec reste intégral** : $R_p(a, b) = \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$, f est C^{p+1}

3 Intégrale généralisées

Intégrale impropre

Soit $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \overline{\mathbf{R}}$ ($b > a$), f une fonction définie et continue par morceau sur $[a, b[$.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une *intégrale impropre* en b dans les deux cas suivants :

1. $b = +\infty$
2. $a < b < +\infty$, et f n'admet pas de limite finie en b par valeur inférieure.

Dans les deux cas, $\int_a^b f(t)dt$ est définie comme $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$

On définit de manière analogue la notion d'intégrale impropre en a

Convergence-Divergence

Soit $\int_a^b f(t)dt$ une intégrale impropre en b :

1. Si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite réelle ou complexe ℓ quand x tend vers b par valeur inférieure,

on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* et a pour valeur ℓ

2. Si $\int_a^x f(t)dt$ n'admet pas de limite quand x tend vers b par valeur inférieure, on dit que

$\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*

Intégrales de référence

On a :

1. $\int_0^1 \ln t \, dt$ qui **converge**

2. $\int_0^1 e^{-\alpha t} \, dt$ qui **converge** si $\alpha > 0$

Ensuite :

Intégrale impropre	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$	diverge	diverge	converge
$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$	converge	diverge	diverge

Intégrales impropres de fonctions positives

Soient f et g deux fonctions à valeurs dans \mathbf{R}_+^* , alors :

1. si $f \leq g$ sur $[a, b[$ et que $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge

2. si $f \leq g$ sur $[a, b[$ et que $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b g$ converge

3. si $f \ll g$ en b par valeur inférieure et que $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge

4. si $f \sim g$ en b par valeur inférieure alors $\int_a^b g$ et $\int_a^b f$ ont même nature

Intégrale absolument convergente

Soit f une fonction à valeurs complexes, l'intégrale impropre est dite **absolument convergente** si :

$$\int_a^b |f| \text{ converge.}$$

Propriétés :

1. si $|f| \leq g$ sur $[a, b]$ et que $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge absolument.
2. si $|f| \sim g$ en b par valeurs inférieures et que $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge absolument.
3. si $\int_a^b f$ est une intégrale absolument convergente, alors :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Intégrales généralisées propriétés

Les propriétés de linéarité, d'additivité (relation de CHASLE), l'intégration par partie et le changement de variable reste valable.

Attention :

1. Pour la relation de CHASLE, il est nécessaire que **toutes** les intégrales convergent pour que la somme converge.
2. Pour la linéarité et l'intégration par partie, il faut s'assurer que deux des trois termes convergent.

4 Intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale ordinaire dépendant d'un paramètre

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{K} (\mathbf{C} ou \mathbf{R}) définie et **continue** sur $A \times I$, avec A une partie de \mathbf{R} et I un segment $[a, b]$.

On définit :

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K} \\ x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

Hypothèse sur f	Conclusion sur F
$t \mapsto f(x_0, t)$ est continue sur I	$F(x_0)$ est définie
f est continue sur $A \times I$	F est continue sur A
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times I$	F est de classe C^1 sur A et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dt$
f est continue sur $[\alpha, \beta] \times I$	$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t) dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx$

Continuité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre

Soit $I = [a, b[$ un intervalle borné ou non de \mathbf{R} ; A un intervalle de \mathbf{R} et f une fonction de $A \times I \rightarrow \mathbf{K}$.
S'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$
- $\int_a^b \varphi(t) dt$ converge

Alors :

$$F : x \in A \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \text{ est continue sur } A$$

Dérivabilité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre

Soit $I = [a, b[$ un intervalle borné ou non de \mathbf{R} ; A un intervalle de \mathbf{R} et f une fonction de $A \times I \rightarrow \mathbf{K}$ qui admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue.

S'il existe une fonction $\psi : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

1. $\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \psi(t)$

2. $\int_a^b \psi(t) dt$ converge

Alors :

$$G : x \in A \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A$$

et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

5 Series numériques

Définition-Convergence-Divergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans \mathbf{K} . La **série de terme général** (u_n) est le couple (u_n, S_n) où $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

1. Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe dans \mathbf{K} , on dit que la série de terme général (u_n) **converge**. Cette limite est alors appelée **somme de la série** et est notée :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

2. Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est l'infini ou n'existe pas, la série de terme général (u_n) **diverge** et on **renonce** à tout calcul !

Divergence grossière

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 en $+\infty$. **Attention** : La réciproque est fautive !

Si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge** : il y a **divergence grossière**.

Propriétés

On a :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$

Attention : L'additivité ne doit pas être utilisée pour scinder une série en somme de deux séries divergentes. Si cela doit se produire, on passe aux sommes partielles et à la limite.

Séries géométriques

1. Si $|q| < 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

2. Si $|q| \geq 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge

Comparaison avec une intégrale impropre

Soit f une fonction continue de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} , décroissante et de limite nulle en $+\infty$, (donc positive sur \mathbf{R}_+). Alors la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ a même nature que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Les séries de RIEMANN

1. Si $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

2. Si $\alpha > 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

On ne peut cependant rien dire sur la valeur de la limite dans le cas de convergence.

Comparaison de deux séries à termes positifs

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à **termes positifs**. Alors :

1. Si $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$, n_0 étant fixé dans \mathbb{N} , et que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $u_n \ll v_n$ et que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ ont la même nature.

Séries absolument convergentes

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes complexes. Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ (à termes positifs) converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente**.

Toute série absolument convergente est convergente :

$$\sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

Attention : La réciproque est fausse.

Critère de d'ALEMBERT

Soit (u_n) une suite à termes dans \mathbf{K} telle que, pour $n > n_0$ fixé, $u_n \neq 0$. Alors :

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$ avec $\ell < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge absolument**.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$ avec $\ell > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

Attention : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ n'existe pas ou vaut 1, le critère est **inopérant**.

Définitions :

1. Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbf{R}_+ , **décroissante** et de **limite nulle**. Alors, la **série alternée** $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ **converge**.
2. Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ une série alternée. On appelle le reste d'ordre n de S :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k$$

Alors R_n a le signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

6 Séries entières

Définition : Série entière

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes.

On appelle **série entière** la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à z associe la somme de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, lorsque cette série **converge**.

Rayon de convergence

Soit r un réel positif, on note \mathcal{D}_r le disque (dans le plan complexe) ouvert $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$ et $\overline{\mathcal{D}}_r$ le disque fermé $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq r$ avec les conventions $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, $\overline{\mathcal{D}}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{D}_\infty = \overline{\mathcal{D}}_\infty = \mathbb{C}$.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, et \mathcal{C} son domaine de convergence. Alors il existe un unique élément $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $\mathcal{D}_R \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{D}}_R$

R est le **rayon de convergence** de la série :

1. la série **converge absolument** à l'intérieur de son disque de convergence
2. la série **diverge grossièrement** à l'extérieur de son disque de convergence
3. on **ne sait pas** à priori ce qui se passe pour $|z| = R$

Lemme d'ABEL

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière :

1. si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $|z_1| < |z_0|$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ converge absolument
2. si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas une limite nulle et si $|z_1| > |z_0|$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ diverge grossièrement

Calcul pratique du rayon de convergence :

- $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge $\Rightarrow R \geq |z_0|$
- $a_n z_0^n$ ne tend pas vers 0 $\Rightarrow R \leq |z_0|$

Critère de d'ALEMBERT (simplifié)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Si $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}_+$ quand n tend vers l'infini, alors le rayon de convergence de cette série est :

$$R = \ell$$

Dans les mêmes conditions, le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n+1}$ est :

$R = \sqrt{\ell}$ avec pour convention $\sqrt{\infty} = \infty$.

Propriétés

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

Soit

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Alors :

1. f est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et

$$\forall p \in \mathbf{N}, |x| < R, f^{(p)}(x) = \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$$

2.

$$\forall x \in] -R, R[, \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Théorème taubérien

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Attention : La réciproque est fautive !

Développements de base

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad R = \infty$$

$$\operatorname{ch}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty$$

$$\operatorname{sh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad R = \infty \text{ si } \alpha \in \mathbf{N}$$

$$R = 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbf{N}$$

7 Structures algébriques

Loi de composition interne et propriétés

Définition :

Soit E un ensemble, une **loi de composition interne** est une application de $E \times E \rightarrow E$

Propriétés :

Soit les lois de compositions $*$ et \dagger définies sur E :

1. **Loi associative.** $*$ est associative si, et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

2. **Loi commutative.** $*$ est commutative si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$$

3. **Élément neutre.** L'élément e de E est neutre pour la loi $*$ si, et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

4. **Éléments symétriques.** Si la loi $*$ admet un élément neutre e , l'élément x admet un symétrique y si, et seulement si celui-ci vérifie :

$$x * y = y * x = e$$

5. **Distributivité à droite.** La loi \dagger est distributive à droite par rapport à $*$ si, et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) \dagger z = (x \dagger z) * (y \dagger z)$$

6. **Distributivité à gauche.** La loi \dagger est distributive à gauche par rapport à $*$ si, et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, z \dagger (x * y) = (z \dagger x) * (z \dagger y)$$

Groupe

Soit G un ensemble muni d'une loi interne $*$, le couple $(G, *)$ est un groupe si et seulement si :

1. $*$ est associative
2. $*$ admet un élément neutre e
3. Chaque élément de G admet un élément symétrique :

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e \quad (x' = x^{-1})$$

Si en plus pour tout $(x, y) \in G^2$, $x * y = y * x$ alors le groupe G est commutatif ou abélien.

Sous-Groupe :

Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G . H est un sous groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

1. e appartient à H
2. $\forall (x, y) \in H^2, (x * y) \in H$
3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Propriété : Tout sous-groupe est une groupe !

Anneau

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne \dagger et $*$. Le triplet $(A, \dagger, *)$ est un **anneau** si, et seulement si :

1. (A, \dagger) est un groupe commutatif
2. $*$ est distributive à droite et à gauche par rapport à \dagger

Si, de plus, la loi $*$ admet un élément neutre alors l'anneau est un anneau unitaire et si la loi $*$ est commutative alors l'anneau est commutatif.

Sous-Anneau :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et H une partie de A . H est un **sous-anneau** de A si, et seulement si :

1. $(H, +)$ est un sous groupe de A
2. $\forall (x, y) \in H^2, x \times y \in H$, ie. que H est stable pour la loi \times .

Corps

Soit \mathbf{K} un ensemble muni de deux lois $+$ et \times , le triplet $(\mathbf{K}, +, \times)$ est un **corps** si, et seulement si :

1. $(\mathbf{K}, +, \times)$ est un anneau
2. (\mathbf{K}, \times) est un groupe

Si, de plus, la loi \times est commutative, alors le corps est un corps commutatif.

Espace vectoriel

Soit E muni d'une loi interne notée $+$ et $(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps commutatif tel qu'il existe une loi externe notée \cdot définie sur $\mathbf{K} \times E$ à valeurs dans E , le triplet $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbf{K} si, et seulement si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
3. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
4. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, (\lambda \times \mu).x = \lambda \times (\mu.x)$
5. $\forall x \in E, 1.x = x$

Algèbre

Soit A un ensemble muni de deux lois internes $+$ et \times et $(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps commutatif tel qu'il existe une loi externe notée \cdot définie de $\mathbf{K} \times A$ dans A . $(A, +, \times, \cdot)$ est une algèbre si, et seulement si :

1. $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel
2. $(A, +, \times)$ est un anneau
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in A, x \times (\lambda.y) = \lambda.(x \times y)$

Si, la loi \times de A est commutative l'algèbre est une algèbre commutative.

8 Espaces vectoriels

On considère ici un espace vectoriel E sur un corps \mathbf{K} .

Famille et système

On appelle **famille** d'éléments de E indexée par l'ensemble I une application $f : I \rightarrow E$, notée $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ où $\vec{u}_i = f(i)$. Un **système** est une famille le plus souvent *finie*, et donc *indexée* par une partie de \mathbf{N} : $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Famille libre, famille liée

Une famille **finie** $(\vec{u}_i)_{0 \leq i \leq n}$, est dite **libre** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbf{K}^n, \quad \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0} \right) \implies (\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0)$$

Une famille quelconque $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ (I est un ensemble) est dite libre si et seulement si **toute** famille finie extraite de $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est libre.

Une famille est liée si elle **n'est pas** libre.

Famille génératrice

Soit H un sous-espace de E , une famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est dite **génératrice** de H si et seulement si tout élément de H est combinaison linéaire d'éléments de $(\vec{u}_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \exists J \subset I, \quad J \text{ fini}, \quad \exists (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbf{K}^J, \quad x = \sum_{j \in J} \lambda_j \vec{u}_j$$

Base

Une famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est dite **base** de E si et seulement si elle est à la fois libre **et** génératrice de E .

Dimension

Si E admet une famille génératrice finie, alors *toutes* les bases de E ont le **même cardinal**. Ce cardinal est appelé **dimension** de E , noté $\dim E$: *Théorème de la dimension*.

- Si $E = \{\vec{0}\}$, on dit que $\dim E = 0$.
- Si E n'admet pas de famille génératrice finie, on dit que $\dim E = \infty$.

Somme et somme directe

Somme de deux sous-espaces

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E sur \mathbf{K} . La somme de F_1 et F_2 , notée $F_1 + F_2$, est l'ensemble des vecteurs somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 .

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$$

Somme directe

Soit un espace vectoriel E de dimension finie, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E . La somme de A et B est directe si, et seulement si l'intersection de A et B est réduite au vecteur nul. Cette somme est alors notée :

$$A \oplus B$$

Propriétés caractéristiques :

- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow (F = A + B) \text{ et } (A \cap B = \{0\})$
- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow (F = A + B) \text{ et } (\dim A + \dim B = \dim F)$
- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow$ on obtient une *base* de F par la réunion d'une base de A et d'une base de B

Si E est un espace-vectoriel de dimension finie, on dit que A et B sont **supplémentaires** si, et seulement si :

$$A \oplus B = E$$

Propriété : En dimension finie, tout sous-espace de E admet un supplémentaire.

Application linéaire

Soit E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une **application linéaire** [homomorphisme d'espaces vectoriels] si, et seulement si :

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est notée : $\mathcal{L}(E, F)$.

Noyau et Image

Soit φ une application linéaire de E dans F . On définit alors :

1. le **noyau** de φ : $\text{Ker}(\varphi) = \{x \in E, \varphi(x) = 0_F\}$
2. l'**image** de φ : $\text{Im}(\varphi) = \{y \in F, \exists x \in E, y = \varphi(x)\}$

Ces deux ensembles sont respectivement des sous-espace de E et de F .

Somme et somme directe

Somme de deux sous-espaces

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E sur \mathbf{K} . La somme de F_1 et F_2 , notée $F_1 + F_2$, est l'ensemble des vecteurs somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 .

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$$

Somme directe

Soit un espace vectoriel E de dimension finie, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E . La somme de A et B est directe si, et seulement si l'intersection de A et B est réduite au vecteur nul. Cette somme est alors notée :

$$A \oplus B$$

Propriétés caractéristiques :

- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow (F = A + B) \text{ et } (A \cap B = \{0\})$
- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow (F = A + B) \text{ et } (\dim A + \dim B = \dim F)$
- * $F = A \oplus B \Leftrightarrow$ on obtient une *base* de F par la réunion d'une base de A et d'une base de B

Si E est un espace-vectoriel de dimension finie, on dit que A et B sont **supplémentaires** si, et seulement si :

$$A \oplus B = E$$

Propriété : En dimension finie, tout sous-espace de E admet un supplémentaire.

Injectivité–Surjectivité

Rappel :

★ On dit qu'une application f de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

★ On dit qu'une application f de E dans F est surjective si, et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Soit φ une application linéaire de E dans F deux espaces-vectoriels.

On a :

1. φ est **injective** si et seulement si $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ou si l'image par φ de toute famille libre de E est une famille génératrice de F .
2. φ est **surjective** si et seulement si $\text{Im } \varphi = F$ ou si l'image par φ d'une famille génératrice donnée de E est une famille génératrice de F .
3. φ est **bijjective** si et seulement si elle est injective et surjective, ou si l'image par φ d'une base de E est une base de F .

Formule du rang

Si $\dim E < +\infty$ et φ une application linéaire de E dans F , alors :

$$\dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi) = \dim E$$

Conséquences : En dimension finie, si une application linéaire est bijective si et seulement si elle est injective [resp. surjective].

On appelle $\dim(\text{Im } \varphi)$ le rang de φ noté $\text{rg } \varphi$.

Nomenclature des applications linéaires

Une application linéaire φ de E dans F (*homomorphisme*) est appelée :

- ★ **endomorphisme** si $E = F$.
- ★ **isomorphisme** si φ est une **bijection**.
- ★ **automorphisme** si φ est une **bijection** et si $E = F$.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Remarque : S'il existe un isomorphisme entre les deux espaces-vectoriels E et F , alors on dit que E et F sont **isomorphes** et on note $E \approx F$, nécessairement $\dim E = \dim F$.

Remarques sur les applications linéaires :

- On a $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel.
- On a $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ une algèbre non commutative.

Espaces affines

Soit φ une application linéaire de E dans F , et $b \in F$. On pose l'équation :

$$\varepsilon : \varphi(x) = b$$

- * Si b n'appartient pas à $\text{Im } \varphi$, l'ensemble des solutions de ε est l'ensemble vide \emptyset
- * Si b appartient à $\text{Im } \varphi$, il existe $x_0 \in E$, tel que $\varphi(x_0) = b$ et l'ensemble des solutions S de ε est :

$$S = x_0 + \text{Ker } \varphi$$

L'ensemble des solutions de l'équation ε est appelé **espace affine** de direction $\text{Ker } \varphi$ et d'origine x_0 (la direction et l'origine ne sont pas définis pour l'ensemble vide).

En dimension finie, si $\{u_i\}_{0 \leq i \leq p}$ est une base de E , alors :

$$S = \left\{ x_0 + \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k, \{\lambda_b\}_{0 \leq b \leq p} \in \mathbf{K}^p \right\}$$

Parallélisme : on dit que deux espaces affines sont parallèles s'ils sont non confondus et que leurs directions respectives sont incluses l'une dans l'autre. Deux espaces affines parallèles ont une intersection vide.

8.1 Matrices

Définition

Soit p et n deux entiers non nuls, $E \approx \mathbf{K}^p$ et $F \approx \mathbf{K}^n$ deux espaces vectoriels munis respectivement des bases (u_1, u_2, \dots, u_p) et (v_1, v_2, \dots, v_n) .

Alors toute application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est définie de *manière unique* par l'image des vecteurs de la base (u_1, u_2, \dots, u_p) dans la base (v_1, v_2, \dots, v_n) , c'est-à-dire par les réels $((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}})$. Le tableau

$((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}})$ dont la j -ième colonne représente le vecteur $\varphi(u_j)$ dans la base (v_1, v_2, \dots, v_n) est appelée **matrice de φ** [relative aux bases (u_1, u_2, \dots, u_p) et (v_1, v_2, \dots, v_n)].

$$A = ((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}) = \begin{matrix} & \varphi(u_1) & & \varphi(u_j) & & \varphi(u_p) \\ v_1 & \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_i & a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ v_n & a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{array} \right) \end{matrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes dans \mathbf{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

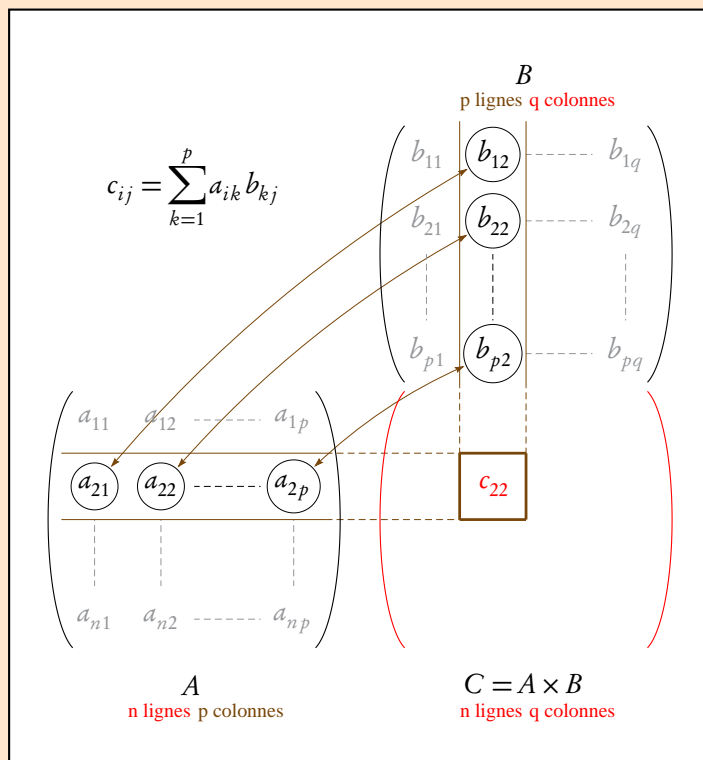
Multiplication

Soit φ et ψ deux applications linéaires, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ auxquelles sont respectivement associées les matrices $A = \text{Mat}(\varphi)$ et $B = \text{Mat}(\psi)$

On a :

$$\text{Mat}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}(\varphi) \times \text{Mat}(\psi) = A \times B$$

Exécution du produit matriciel : $C = A \times B$



Attention : Le produit matriciel n'est pas commutatif!!!

Algèbre

L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot, \times)$ est un algèbre non commutative (\mathcal{M}_n étant l'ensemble des matrices carrées de dimension n). L'élément neutre pour la multiplication est I_n dont ses coefficients sont les indices de KRONECKER i.e. :

$$I_n = ((\delta_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On a pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$:

- ★ soit il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$. On dit que A est inversible et on note $B = A^{-1}$.
- ★ soit il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = 0$. On dit que A est diviseur de 0.

Propriétés

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, A^n est définie par $A^{n+1} = A^n \times A$
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ si A est inversible.
3. Soit $(B, A) \in \mathcal{M}_n^2$ inversibles. Alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Changement de base

1. Matrice de passage :

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension n . On associe à tout vecteur $x \in E$ la matrice colonne X de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} et la matrice X' de ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' . On définit $P \in \mathcal{M}_n$ la matrice [de passage] dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

On a :

$$X = PX' \quad \text{i.e.} \quad X' = P^{-1}X$$

2. Changement de base :

Soit E et F deux espaces de dimensions respectives n et p . On considère deux bases de E , \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E avec pour matrice de passage P , et deux bases de F , \mathcal{B}_F et \mathcal{B}'_F de matrice de passage Q . Alors, pour toute application linéaire φ de E dans F , de matrice M dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F et M' dans les bases \mathcal{B}'_E et \mathcal{B}'_F , on a :

$$M' = Q^{-1}MP$$

Si $E = F$ et $Q = P$,

$$\boxed{M' = P^{-1}MP}$$

3. **Matrices semblables** : On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même *endomorphisme* dans deux bases différentes de \mathbf{K}^n , i.e. :

$$\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad A = P^{-1}BP$$

On note : $A \sim B$

8.2 Déterminant

Définition

Soit E un espace vectoriel isomorphe à \mathbf{K}^n . Le **déterminant**, noté \det , est l'*unique* application de E dans \mathbf{K} qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **multilinéarité :**

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X \in E \mapsto \det(u_1, \dots, u_{i-1}, X, u_{i+1}, \dots, u_n)$ est linéaire.

2. **antisymétrie :**

$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j$

$$\det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

3. Si (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de E alors $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Propriétés

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs.

★ S'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i < j$ et $u_i = u_j$ alors :

$$\det(u_1, \dots, u_n) = 0$$

★ Si $i \neq j$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\det(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \lambda u_j, u_{i+1}, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

★ Pour $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\det(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) = \lambda \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

★ Le déterminant d'une famille est non nul si et seulement si la famille est libre.

Déterminant d'un endomorphisme

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire $k(\varphi)$ ne dépendant que de φ , tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \det(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = k(\varphi) \cdot \det(u_1, \dots, u_n)$$

On pose alors

$$\det(\varphi) = k(\varphi)$$

Propriétés :

1. $\det(\lambda\varphi) = \lambda^n \cdot \det(\varphi)$
2. Soit φ et ψ deux endomorphisme de E alors $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$
3. φ est un endomorphisme si et seulement si $\det(\varphi) \neq 0$, et $\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}$

Déterminant d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, représentant l'endomorphisme φ de E dans une base. Le déterminant est alors le déterminant de φ mais aussi le déterminant des vecteur colonnes de A .

Propriétés :

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $\det(A \times B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4. $\det(A) = \det({}^t A)$
5. Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$. **Attention** : réciproque fausse.

Développement du déterminant

Soit $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$; on appelle matrice mineure de A attachée au couple (k, l) , et on note $A_{k,l}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ obtenue par suppression de la k -ème ligne et de la l -ème colonne.

On peut développer le déterminant grâce aux formules suivantes :

1. Développement par rapport à la j -ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

2. Développement par rapport à la i -ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la comatrice de A est $\text{Com}(A) = (((-1)^{i+j} \det(A_{i,j})))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ Alors, si A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t \text{Com}(A)$$

9 Réduction des endomorphismes

Valeurs, vecteurs et espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un espace vectoriel, on considère l'équation en $\vec{x} \in E$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$(\mu_\lambda) : f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$$

- * Toute solution **non nulle** de (μ_λ) est appelée **vecteur propre** de f .
- * Toute valeur de $\lambda \in \mathbf{K}$ pour laquelle (μ_λ) admet une solution *non nulle* est appelée **valeur propre** de f .
- * L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f .
- * Si λ est une valeur propre de f , on appelle **sous-espace propre** de f associé à λ l'espace $E_\lambda = \{\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\} = \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_E)$, cette espace étant non nulle.

Propriétés

1. Soit λ et μ deux valeurs propres d'un endomorphisme, alors si $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda \cap E_\mu = \vec{0}$
2. Soient $\lambda_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, k valeurs propre *distincts* d'un même endomorphisme. Alors :

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

3. Toute famille formée de **vecteurs propres** associés à des valeurs propres *distinctes* est **libre**.

Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la somme des éléments diagonaux de la matrice.

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$$

Propriétés :

Soit $(A, B, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^3$, P inversible, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}$. On a :

1. $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$
2. $\text{Tr}(A \times B) = \text{Tr}(B \times A)$
3. $\text{Tr}(P^{-1} \times A \times P) = \text{Tr}(A)$

Polynôme caractéristique

À toute matrice carrée ou à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est associé un polynôme appelé **polynôme caractéristique**.

Les racines de ce polynôme sont exactement les **valeurs propres** de l'endomorphisme. Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ on définit le polynôme caractéristique :

$$P_f(X) = \det(f - X \text{id}_E)$$

L'ordre de multiplicité de λ comme valeur propre de f est, par définition, l'ordre de multiplicité de λ comme racine de P_f , on le note $\mu(\lambda)$.

Propriétés :

1. λ est une valeur propre de f si et seulement si c'est une **racine**
2. Pour toute valeur propre λ ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \mu(\lambda)$$

3. Si f est défini par sa matrice A dans une base *quelconque*, $P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_n)$ est également le polynôme caractéristique de A qui ne dépend pas de la base.
4. Soit $A \sim B$ deux matrices semblables associées à l'endomorphisme f , alors :

$$A \sim B \Rightarrow P_A(X) = P_B(X) \Rightarrow (\det(A) = \det(B) \text{ et } \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B))$$

Diagonalisation

Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de φ , i.e. :

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} E_\lambda = E$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une matrice inversible P est une matrice *diagonale* Δ telles que :

$$\Delta = P^{-1}MP$$

Condition de diagonalisation

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si :

1. le polynôme caractéristique de M est scindé dans \mathbf{K}
2. pour toute valeur propre λ de M , $\dim E_\lambda = \mu(\lambda)$

Il en découle une condition *suffisante* mais pas **nécessaire** : si le polynôme caractéristique de M est scindé dans \mathbf{K} avec des racines **simples** alors M est diagonalisable.

Trigonaliser

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. **Trigonaliser** A , c'est trouver une matrice de passage P et une matrice triangulaire supérieure T , telles que : $T = P^{-1}AP$.

Toute matrice est trigonalisable dans \mathbf{C} .

Dans la pratique (en P-T), on trigonalise dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. Soit α et β deux éléments de \mathbf{K} distincts. Il existe alors deux cas :

1. $P_A(X) = -(X - \alpha)^2(X - \beta)$, alors T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P est alors de la base de départ vers une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, où \vec{u} est un vecteur propre associé à β , \vec{v} un vecteur propre associé à α et \vec{w} un vecteur propre à **déterminer** tel que $f(\vec{w}) = \alpha\vec{w} + \vec{v}$.

2. $P_A(X) = -(X - \alpha)^3$, alors lors T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & b \\ 0 & \alpha & a \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P est alors de la base de départ vers une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, où \vec{u} est un vecteur propre associé à β , \vec{v} un vecteur propre à **déterminer** tel que $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v} + \vec{u}$ et \vec{w} un vecteur propre à **déterminer** tel que $f(\vec{w}) = \alpha\vec{w} + a\vec{v} + b\vec{u}$.

Remarque : On peut imposer $a = 1$ et $b = 0$ ce qui simplifie le calcul : $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Réduire une matrice, c'est la diagonaliser si possible, la trigonaliser sinon.

10 Espace euclidien et préhilbertien

On considère ici un espace vectoriel E sur \mathbf{R} (de dimension finie ou infinie).

Produit scalaire–Définition

On appelle **produit scalaire** toute application φ de $E \times E$ sur \mathbf{R} qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *symétrie* :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

2. *bilinéarité* :

$$\forall u \in E, \quad x \mapsto \varphi(x, u) \text{ et } x \mapsto \varphi(u, x) \text{ sont linéaires}$$

3.

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall u \in E, \quad \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Si φ est un produit scalaire sur E , on dit que φ munit E de la structure :

* **d'espace préhilbertien** si $\dim E = \infty$

* **d'espace euclidien** si $\dim E$ est finie

L'application de E dans \mathbf{R} : $x \mapsto \varphi(x, x)$ est appelée **forme quadratique** associée à φ .

Inégalité de CAUCHY–SCHWARZ

Soit φ un produit scalaire sur E .

Alors, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x, y))^2 \leq \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)$$

Ou encore, en notant $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\varphi(x, y)| \leq N(x) \cdot N(y)$$

Remarque : Il y a *égalité* lorsque les vecteurs x et y sont **colinéaires**.

Inégalité triangulaire

Soit φ un produit scalaire sur E .

En notant $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Remarque : Il y a *égalité* si et seulement si les deux vecteurs x et y sont **colinéaires** et de **même sens**.
L'application N est une *norme* sur E , appelée *norme euclidienne* associée à φ .

On note désormais $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x avec y .

Orthogonalité

Définition :

On dit que deux vecteurs sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Propriétés :

1. Le vecteur *nul* est orthogonal à tous les autres vecteurs, c'est le **seul** vecteur orthogonal à tous les autres :

$$(\forall x \in E, \langle x, u \rangle = 0) \iff u = 0$$

2. Théorème de PYTHAGORE :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \perp y, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Sous espaces orthogonaux

Soit F et G deux sous-espaces de E , F et G sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad x \perp y$$

On note alors $F \perp G$.

Orthogonal d'un sous-espace :

On dit que G est l'orthogonal de F si et seulement si :

$$F \perp G \text{ et } F \oplus G = E$$

L'orthogonal de F est noté F^\perp :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, x \perp y\}$$

Projection orthogonale

Soit F un sous-espace de E de dimension finie.

Pour tout $x \in E$, il existe un couple unique $(f, h) \in E^2$ tel que :

$$x = f + h, \text{ avec } f \in F \text{ et } h \perp F$$

On définit alors un endomorphisme de E , appelée **projection orthogonal sur F** , noté π_F , qui à tout $x \in E$ associe le vecteur f comme défini ci-dessus.

Formule de projection : Soit (e_1, \dots, e_p) une base **orthogonale** de F , alors :

$$\pi_F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\langle e_k, x \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} e_k$$

Le réel $\frac{\langle e_k, x \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$ est appelé *coordonnée contravariante* de x dans le système (e_1, \dots, e_p) .

Orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT

Soit (u_1, \dots, u_p) une base d'un sous-espace F de E . Alors on peut *toujours* obtenir une base **orthogonale** (e_1, \dots, e_n) de F :

$$\begin{cases} e_1 := u_1 \\ e_k := u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle e_j, u_k \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} e_j \quad \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Pour obtenir une base **orthonormée**, il suffit de normer les vecteurs e_k , i.e. en posant pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\epsilon_k = \frac{e_k}{\|e_k\|}$.

Systèmes orthogonaux

$(x_i)_{i \in I}$ est un **système orthogonal** si et seulement si :

$$\forall i \in I, \quad x_i \neq 0 \text{ et } \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$$

Théorème de PHYTAGORE :

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système orthogonal, alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

Un système orthogonal est *nécessairement* libre.

Système orthonormé : $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système orthonormé si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit F un sous-espace de E (en dimension finie). Alors :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

Autrement dit, $\|x - \pi_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$, cette valeur est également appelée **distance de x à F** et notée $d(x, F)$.

Remarque : Ce procédé sert par exemple à calculer le minimum de $\int_0^1 (f(x) - (ax + b)) dx$, on calcule la projection de f sur l'espace des polynômes de degrés 1^1 , ce qui nous donne les valeurs de a et b (il faut obtenir une base orthonormée des polynômes de degrés 1).

¹Ceci s'étend aux autres degrés

Groupe orthogonal-Définition

Définition :

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté \langle , \rangle .

Un endomorphisme f de E , $f \in \mathcal{L}(E)$, est un **automorphisme orthogonal** si et seulement si f vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ (« f conserve la norme »)
3. Il existe une base orthonormée de E dont l'image par f est une base orthonormée de E .
4. L'image de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E .

Un automorphisme orthogonal est aussi appelé **isométrie vectorielle**.

Groupe orthogonal-Propriétés

Propriétés :

1. Si f est un *automorphisme orthogonal*, alors f est **bijectif** et f^{-1} est un **automorphisme orthogonal**.
2. Si f et g sont deux *automorphismes orthogonaux*, alors $f \circ g$ est un **automorphisme orthogonal**.
3. L'ensemble des automorphismes orthogonaux est un **groupe** muni de la loi \circ , appelé **groupe orthogonal** et noté $\mathcal{O}(E)$

Matrices orthogonales

Soit (e_1, \dots, e_n) une **base orthonormée** de E et A la matrice dans (e_1, \dots, e_n) d'un endomorphisme f . Alors :

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff {}^t A \times A = I_n$$

Autrement dit, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une **matrice orthogonale** si et seulement si ${}^t A \times A = I_n$

L'ensemble des matrices orthogonales, muni de la loi \times , est un groupe noté $\mathcal{O}(n)$ et est *isomorphe* à $\mathcal{O}(E)$.

Propriété :

Si $A \in \mathcal{O}(n)$, alors $\det A \in \{-1, 1\}$.

- Les matrices de $\mathcal{O}(n)$ dont le déterminant est égal à 1 sont appelées **directes ou positives**, elles forment un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$ noté $\mathcal{O}^+(n)$. Ce sont des matrices de **rotation**.
- Les matrices de $\mathcal{O}(n)$ dont le déterminant est égal à -1 sont appelées **indirectes ou négatives**, elles forment un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$ noté $\mathcal{O}^-(n)$. Ce sont des matrices **d'isométrie négative**.

Propriétés

Si $M \in \mathcal{O}(n)$, alors ${}^t M \times M = I_n$ donc :

$$M = {}^t M \iff M^2 = I_n$$

i.e. M est une matrice de symétrie orthogonale si et seulement si M est une matrice symétrique et orthogonale.

Les **seules** valeurs propres possibles pour une matrice de $\mathcal{O}(n)$ sont **-1 et 1**.

Matrices de $\mathcal{O}(2)$

Les matrices de $\mathcal{O}(2)$ sont de deux types :

1. Les matrices **positives**, matrices de rotation vectorielle d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2. Les matrices **négatives**, matrices de symétrie axiale par rapport à la droite formant avec la droite formant avec (O, \vec{i}) l'angle $\frac{\theta}{2}$.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Matrices de $\mathcal{O}(3)$

Nature	Matrice la plus simple	Eléments	det	symétrique
Identité	I_3		1	oui
Symétrie centrale	$-I_3$		-1	oui
Réflexion	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	le plan E_1	-1	oui
Demi-tour	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	l'axe E_1	1	oui
Rotation	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	l'axe E_1 et l'angle θ	1	non

Détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation

Soit ρ une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ et R sa matrice dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Alors, en posant $\Delta = \frac{1}{2}(R - {}^tR)$, il existe $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$ tels que :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

L'axe de ρ est dirigé par :

$$\vec{\omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$$

L'angle est défini par :

$$\begin{cases} 1 + 2\cos\theta = \text{Tr}(R) \\ \sin\theta = \|\vec{\omega}\| \end{cases}$$

Endomorphismes symétriques

Définition :

$u \in \mathcal{L}(E)$ est **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Propriété :

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une **base orthonormée** de E , et M la matrice de u dans (e_1, \dots, e_n) :

$$u \text{ est symétrique} \iff {}^t M = M \iff M \text{ est symétrique}$$

2. Toute matrice M *symétrique* est **diagonalisable** dans \mathbf{R} selon une **base orthonormée**.
Autrement dit, *il existe* une base orthonormée de vecteurs propres **réels** de M .

Notations :

Le sous-espace vectoriel des matrices $n \times n$ *symétriques* est noté \mathcal{S}_n . \mathcal{S}_n^+ [resp. \mathcal{S}_n^{++}] est l'ensemble des matrices *symétriques* dont toutes les valeurs propres sont **positives** [resp. *strictement positives*].

Forme quadratique

Une application $q : E \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme quadratique si et seulement si il **existe** une forme φ **bilinéaire symétrique** de E^2 dans \mathbf{R} telle que :

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$$

Une telle forme vérifie toujours $q(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot q(x)$.

Formule de polarisation

Soit q une forme quadratique. Pour retrouver l'*expression* de la forme **bilinéaire symétrique** qui lui est associée, on utilise la formule de **polarisation** :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

Expression de la matrice de la forme quadratique

Soit E un espace euclidien muni d'une base (e_1, \dots, e_n) .

Soit q une forme quadratique et φ sa forme bilinéaire symétrique associée. Alors :

$$A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est la matrice de } q \text{ dans la base } (e_1, \dots, e_n)$$

où $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$.

En effet, soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$, alors :

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j a_{i,j}$$

D'où :

$$q \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 a_{i,i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j a_{i,j}$$

i.e., si X [resp. Y] est le vecteur colonne des composante de x [resp. y], on a :

$$\varphi(x, y) = {}^t X \cdot A \cdot Y \quad \text{et} \quad q(x) = {}^t X \cdot A \cdot X$$

Réduction d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique de matrice A dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

A est **symétrique réelle**, donc est **diagonalisable** dans une base $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$. Il existe donc $(\Delta, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ telles que :

$$\Delta = {}^t P \cdot A \cdot P$$

où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P la matrice de passage *orthogonale* de \mathcal{B} vers \mathcal{D} .

Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot v_i$ auquel on associe la matrice colonne des coordonnées dans \mathcal{D} , X' . Alors l'expression de la forme quadratique q dans la base \mathcal{D} est :

$$q(x) = {}^t X' \cdot \Delta \cdot X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x'^2_i$$

On dit que la forme q est **réduite dans la base \mathcal{D}** .

11 Séries de FOURIER

Définitions-Notations

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle ici

- $\mathcal{C}_M(T)$ l'espace vectoriel des fonctions T -périodiques et continues par morceaux sur $[0, T]$ à valeurs réelles.
 - $\mathcal{C}(T)$ l'espace vectoriel des fonctions T -périodiques et continues sur $[0, T]$ à valeurs réelles.
- Alors $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{C}_M(T)$.

Coefficients réels et somme partielle de FOURIER

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_M(T)$, on pose :

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad a_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad b_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

$$S_n(f) : x \mapsto a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x)) \quad \text{et} \quad S_0(f) = a_0(f)$$

Les $a_n(f)_{n \in \mathbf{N}}$ et $b_n(f)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont les **coefficients réels de FOURIER** de f et $S_n(f)$ est la **somme partielle de FOURIER** de f d'ordre n . $S_n(f)$ est *continue* et T -périodique.

Inégalité de BESSEL

Soit $f \in \mathcal{C}_T(\mathbf{R})$ i.e. l'espace des fonctions T -périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Alors :

$$a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^m \frac{a_n(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{b_n(f)^2}{2} \leq \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt$$

Formule de PARSEVAL

Soit $f \in \mathcal{C}_T(\mathbf{R})$. Alors :

$$a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)^2}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt$$

Fonction \mathcal{C}^1 par morceaux

Une fonction f est \mathcal{C}^1 par morceaux sur un intervalle I si et seulement s'il existe une **subdivision** $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ de I telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

1. f est de classe \mathcal{C}^1 sur $I_k =]a_k, a_{k+1}[$
2. f et f' sont prolongeables aux bornes de I_k

Théorème de DIRICHLET

Soit f définie sur \mathbf{R} , T -périodique et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors en notant $a^+ = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$ et $a^- = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$:

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f))(t) = \frac{a^+ + a^-}{2} = \tilde{f}(t)$$

\tilde{f} est appelée la **régularisée** de f .

Remarque : Si f est continue alors $f = \tilde{f}$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f))(t) = f(t)$$

12 Equations différentielles

Notations : \mathbf{K} désigne l'un des corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} , I est un intervalle de \mathbf{R} et \mathcal{F} est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{+\infty}(I, \mathbf{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur I à valeurs dans \mathbf{K} .

Pour une fonction $y \in \mathcal{F}$ on note $y^{(n)}$ la **dérivée n -ème** ($k \in \mathbf{N}$) avec pour convention $y^{(0)} = y$.

12.1 Systèmes différentielles

Définitions-Notations

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

On considère $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^1$ de I dans \mathbf{K} auquel on associe la matrice unicolonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et (b_1, \dots, b_n) un n -uplet de fonctions continues de I dans \mathbf{K} auquel on associe la matrice unicolonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

En notant X' la matrice colonne constituée de (x'_1, \dots, x'_n) , on considère le système (Σ) qui s'écrit **matriciellement** :

$$(\Sigma) : X'(t) = A.X(t) + B$$

On forme le système différentiel **sans second membre** ou **homogène** associé à (Σ) :

$$(\Sigma_0) : X'(t) = A.X(t)$$

Nature de l'espace des solutions

L'ensemble des solutions de (Σ_0) est un **espace vectoriel S de dimension n**

L'ensemble des solutions de (Σ) est un **espace affine** $X_0 + S$, où X_0 est une *solution quelconque* de (Σ) .

Existence et unicité des solutions

Si $t_0 \in I$ et $V_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbf{K})$, il existe une unique solution de (Σ) qui vérifie $X(t_0) = V_0$.

Méthode de résolution

On procède à la réduction de A , i.e. on détermine une matrice inversible P et une matrice R telle que

$$A = P.R.P^{-1}$$

avec R diagonale ou triangulaire.

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1}.X(t)$, le système (Σ) est équivalent à :

$$Y' = R.Y + P^{-1}.B$$

Alors :

1. si A est diagonalisable de valeur propre $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, le système *réduit* est alors formé de n équations :

$$y_i'(t) = \lambda_i \cdot y_i(t) + \beta_i(t)$$

dont la résolution est élémentaire ($\beta_i(t)$ étant la i -ème composante de la matrice $P^{-1}B$).

2. Si a est non diagonalisable, alors le système se résoud de *proche en proche*.

Remarque : On a pas besoin de calculer P^{-1} si le *second membre* $B(t)$ est nul.

12.2 Equations différentielles linéaires—Généralités

Définition

Une équation différentielle est **linéaire d'ordre n** s'il existe une application $f \in \mathcal{C}(I)$ et un endomorphisme Φ de \mathcal{F} défini par $\Phi(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}$, où $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k \in \mathcal{C}^0(I)$, tels que :

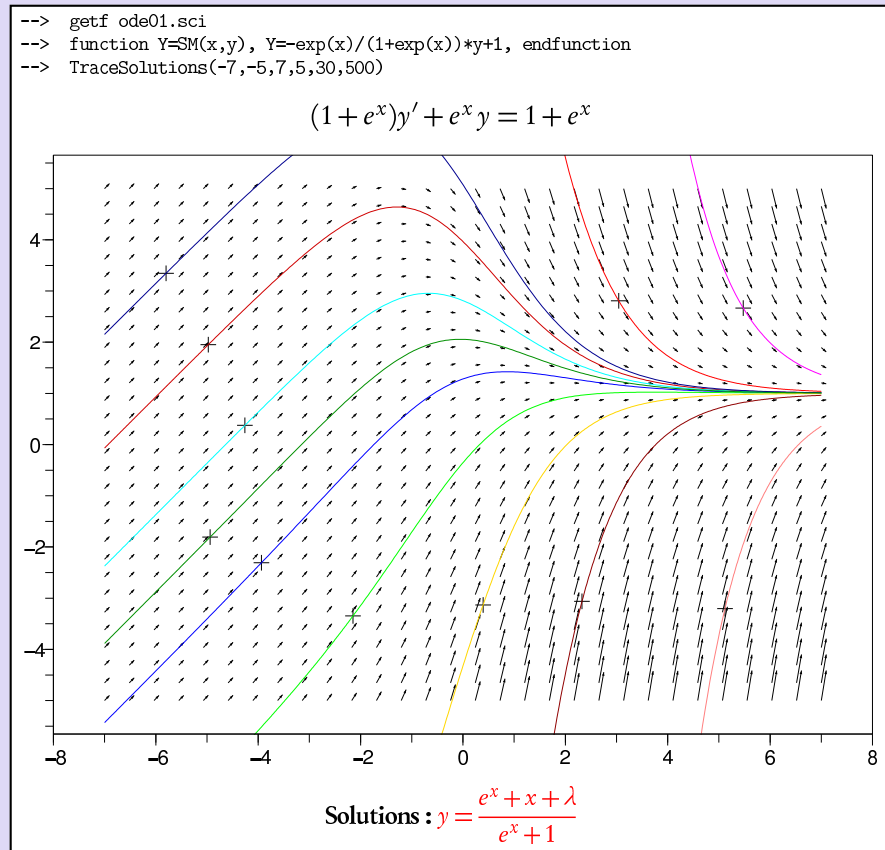
$$(E) : \Phi(y) = f$$

On définit alors l'**équation sans second membre (ESSM)** ou équation *homogène* associée par :

$$(E_0) : \Phi(y) = 0$$

Courbe intégrale

Une **courbe intégrale** de (E) est le graphe de $x \mapsto y(x)$ où y est solution de (E) .
 Un exemple où l'on trace plusieurs solutions :



Nature et espace des solutions

L'ensemble des **solutions de** (E_0) est un **espace vectoriel** \mathcal{S}_0 de dimension n .

L'ensemble des **solutions de** (E) est un **espace affine** \mathcal{S} de dimension n dirigé par \mathcal{S}_0 et d'**origine** y_0 , où y_0 est une **solution particulière** de (E) .

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + y_0$$

Existence et unicité de la solution vérifiant une *condition initiale*

Soit $x_0 \in I$ et le n -uplet $(v_0, \dots, v_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$. Il existe une **unique** solution de (E) vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $y^{(k)}(x_0) = v_k$.

12.3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Equation caractéristique

Lorsqu'on a à faire à une équation différentielles à coefficients constants (i.e. les a_k sont constants), on définit l'**équation caractéristique** associée à (E_0) :

$$(\chi) : \sum_{k=0}^n a_k X^k = 0$$

Equation du premier ordre : $y' + ay = f(x)$

L'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) + ay(x) = f(x)$, (avec $a \in \mathbf{K}$, et $f \in \mathcal{C}^0$) est une **droite vectorielle** dirigée par $x \mapsto e^{-ax}$ et d'origine $y_0 = e^{-ax} \int f(t)e^{at} dt$.

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{-ax} \int f(t)e^{at} dt + \lambda \cdot e^{-ax} \right\}$$

Ce résultat s'obtient à l'aide de la méthode de variation des constantes.

Equations du second ordre—ESSM

Soit l'équation : $(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K}^2$.

Résolution de l'ESSM :

Soient α et β les deux racines complexes de l'équation caractéristique $(\chi) : aX^2 + bX + c = 0$.

Les solutions de l'ESSM forment alors un espace vectoriel de dimension 2, de base :

$$\begin{cases} (x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto e^{\beta x}) & \text{si } \alpha \neq \beta \\ (x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto xe^{\alpha x}) & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Résolution complète de l'équation

On cherche à déterminer une solution particulière de $(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K}^2$.

Plusieurs méthodes :

1. Seconds membres polynomiaux :

Si $f(x)$ est un polynôme de degré n , alors il existe une solution particulière polynomiale de degré n si $c \neq 0$, de degré $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$, de degré $n + 2$ si $b = c = 0$.

2. Elimination de l'exponentielle :

Si f est de la forme $e^{mx}g(x)$, $m \in \mathbf{K}$, on pose $y(x) = u(x)e^{mx}$, on obtient alors l'équation sans exponentielle :

$$u'' + (2am + b)u' + (am^2 + bm + c)u = g$$

3. Principe de superposition :

(a) Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, en additionnant les solutions particulières des équations :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f_1(x)$$

et

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f_2(x)$$

on obtient une solution particulière de (E) .

(b) Si $f(x) = \Re(h(x))$ [resp. $f(x) = \Im(h(x))$], on obtient une solution de (E) en prenant la **partie réelle** [resp. **imaginaire**] d'une solution de second membre $h(x)$.

4. Autres seconds membres :

Si les 3 méthodes précédentes ne permettent pas de résoudre l'équation, on a recours à la **méthode de variation des constantes** :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_0) , on cherche une solution de (E) sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x)$$

où

$$\lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0$$

Alors (E) se ramène à un système de CRAMER en $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$.

12.4 Equations différentielles linéaires à coefficients variables

Equation du premier ordre

Résolution de l'ESSM :

Les solutions de $a(x)y' + b(x)y = 0$, sur tout intervalle I où a ne s'annule pas, forment un *espace vectoriel* de dimension 1 dirigé par :

$$u(x) = e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de $x \mapsto \frac{a(x)}{b(x)}$.

Résolution complète :

On trouve une solution *particulière* de $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ par la méthode de *variations des constantes* en posant :

$$y_0(x) = k(x)u(x)$$

L'ensemble des solutions de (E) est alors :

$$\mathcal{S} = \{y_0 + \lambda.u, \lambda \in \mathbf{K}\}$$

Existence et unicité d'une solution :

Il existe une **unique** solution de (E) définie par une *condition initiale* $(y(x_0) = y_0$ où $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$.

Equation du second ordre

On considère le système :

$$(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

Il n'y a pas de méthode générale de résolution. Cependant l'**espace affine** des solutions de (E) est dirigé par un **espace vectoriel de dimension 2**. Le principe est alors de trouver deux solutions *indépendantes* de (E_0) et de chercher une solution particulière.

Méthode *partielle* de résolution (de LAGRANGE)

Si l'on connaît une solution u non nulle de l'équation sans second membre (E_0) : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, alors le changement d'inconnue $y = z.u$ transforme (E) en l'équation en z :

$$(A) : a.u.z'' + (2a.u' + b.u).z' = f$$

qui est une équation du premier ordre en $\omega = z'$.

Solutions de (E_0) polynomiales ou développables en série entière

On recherche des solutions de (E_0) polynomiales ou développables en série entière.

Soit $\phi : y \mapsto a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.

On recherche les solutions de (E_0) sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a alors sur l'intervalle de convergence :

$$\phi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi(x^n) = 0.$$

Le calcul nous permet de déterminer les a_k pour que la somme soit nulle (en général sous forme de relation de récurrence). On trouve également les éventuelles solutions polynomiales de (E_0).

Recherche de solution par changement de variable

On effectue le changement de variable $x = \psi(t)$ où ψ est une fonction *bijective* de classe \mathcal{C}^2 , à valeurs dans un intervalle de résolution I .

Il est alors pratique d'utiliser les *notations de LEIBNIZ* pour aboutir à une équation de variable t , en effet :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2}$$

12.5 Equations non linéaires

Attention

A la différence des équations linéaires :

1. Il n'y a pas de méthode générale de résolution.
2. Les notions d'*équation sans second membre* et de *solution particulière* n'ont pas de sens ni d'intérêt.
3. L'ensemble de définition des solutions ne peut pas être prévu à l'avance, et dépend en général des conditions initiales.

Equations à variables séparables

Les équations à variables séparables sont de forme générale :

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

i.e.

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x).$$

Elles se résolvent avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ et :

$$\int_{y_0}^y f(v) dv = \int_{x_0}^x g(u) du$$

13 Courbes planes

Définitions–Courbes paramétrées

On munit le plan affine \mathcal{P} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On définit l'application :

$$\gamma : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

où $(x, y) \in \mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$.

On note $\overrightarrow{OM}'(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$.

Un point $M(t_0)$ est dit :

1. **régulier** si $\overrightarrow{OM}'(t_0) \neq \vec{0}$
2. **singulier** ou **stationnaire** si $\overrightarrow{OM}'(t_0) = \vec{0}$

Points singuliers

Définition :

On appelle *point stationnaire* M de la courbe γ représentée par les équations $x = f(t)$ et $y = g(t)$ un point qui correspond à une valeur t_0 pour laquelle les dérivées $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ sont nulles **simultanément**.

Propriété :

Si p est le plus petit entier tel que les dérivées p -èmes des fonctions f et g ne s'annulent pas toutes les deux pour la valeur t_0 , on montre que la **tangente** en M a pour **coefficient de direction** $f^{(p)}(t_0)$ et $g^{(p)}(t_0)$ (on peut alors utiliser des développements limités de f et g en t_0).

Branches infinies

On étudie ici le cas où $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{F}\|(t) = +\infty$ avec $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

1. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$, la courbe présente une **asymptote verticale**.
2. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$, la courbe présente une **asymptote horizontale**.
3. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ plusieurs cas sont à étudier :

(a) si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, la courbe présente une **branche parabolique de direction O_y**

(b) si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, la courbe présente une **branche parabolique de direction O_x**

(c) si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lambda$, avec λ un réel, alors

i. si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - \lambda.x(t)) = \pm\infty$, la courbe présente une **branche parabolique de direction $y = \lambda.x$**

ii. si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - \lambda.x(t)) = \mu$, avec μ un réel, la courbe présente une **asymptote oblique $y = \lambda.x + \mu$**

Remarque : Lorsque $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\vec{F}\|(t) = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$ on parle de **point asymptote**.

Définition-Courbes en polaires

Soit f une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux éfinies sur un intervalle I , la courbe en polaire (γ) définie par l'égalité $r = f(\theta)$ est la courbe définie par le paramétrage $\theta \in I \mapsto \overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta).(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$.

On pose alors :

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

et

$$\vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Tangente et points singuliers

En un point *autre que l'origine*, la **tangente** en $M(\theta)$ est dirigée par :

$$\vec{T}(M(\theta)) = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{v}_\theta$$

A l'origine, la tangente est dirigée par \vec{u}_θ .

Branches infinies (polaires)

On étudie ici le cas où $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) = \pm\infty$.

On définit alors \mathcal{D} la droite définie par $\theta = \theta_0$.

1. si

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = 0$$

alors \mathcal{D} est **asymptote oblique** à la courbe.

2. si

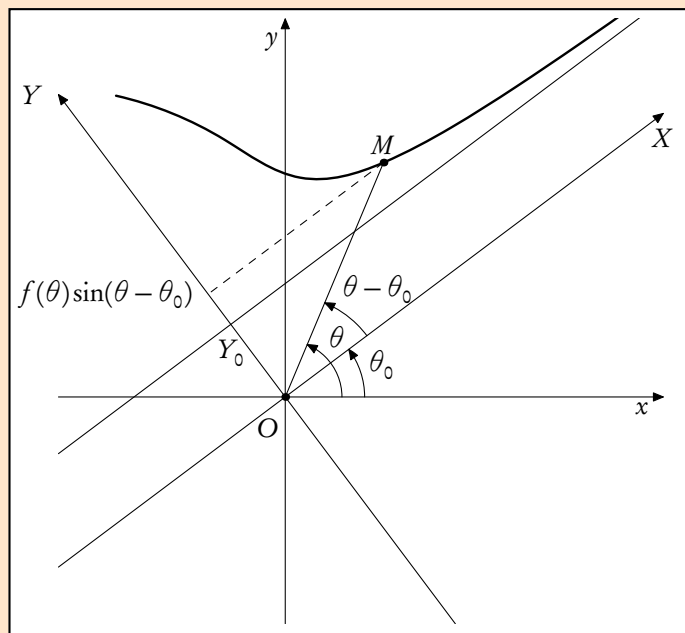
$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty$$

alors la courbe admet une **branche parabolique** d'axe \mathcal{D}

3. si

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \lambda$$

λ un réel, alors la courbe admet une asymptote oblique obtenue par une translation de \mathcal{D} de vecteur $\lambda \cdot \vec{v}_{\theta_0}$.



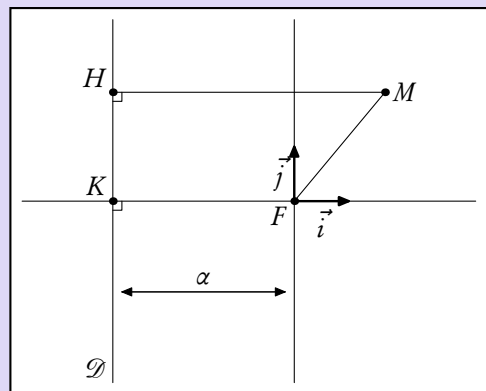
14 Les coniques

Définition par foyer et directrice

Soit \mathcal{D} une droite du plan, F un point non situé sur \mathcal{D} et e un réel strictement positif. On note \mathcal{C}_e la conique d'excentricité e , de foyer F et de directrice \mathcal{D} :

$$\mathcal{C}_e = \left\{ M, \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

où H est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} . La perpendiculaire δ à \mathcal{D} passant par F est un axe de symétrie de \mathcal{C}_e , c'est l'axe focal de la conique.



Son équation polaire suivant l'axe (F, \vec{i}) se met sous la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e \cos \theta}{\alpha e}$$

α étant la distance du foyer F à la directrice \mathcal{D} .

Parabole

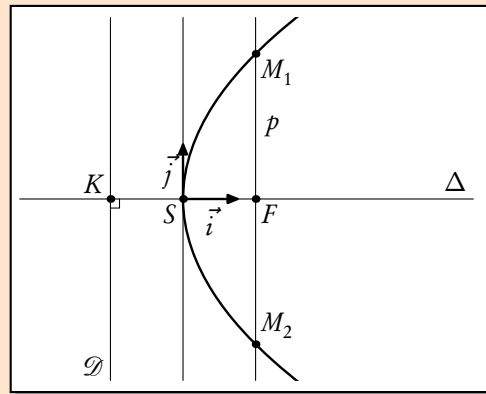
La conique d'excentricité $e = 1$ est une **parabole**. Son équation réduite est :

$$Y^2 = 2\alpha X$$

α est souvent noté p .

Son équation polaire est :

$$r = \frac{p}{1 = e \cos \theta}$$



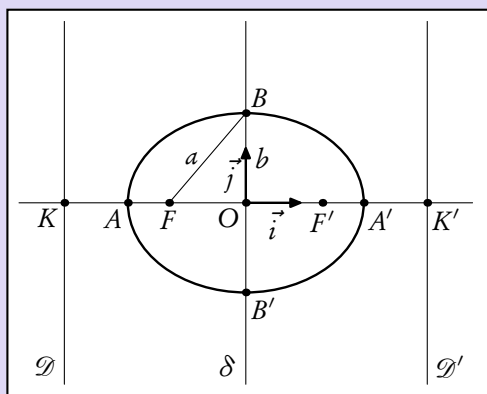
Ellipse

Une conique à centre dont l'excentricité e est inférieure à 1 est une ellipse. On note :

$$OA = OA' = a \quad OB = OB' = b \quad OF = OF' = c$$

où a est le **demi-grand axe**, b le **demi-petit axe**. Voici les *relations fondamentales* pour caractériser une ellipse :

$$c = ae \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad OK = OK' = \frac{a}{e}$$



L'équation réduite est :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Le paramétrage est :

$$\begin{cases} X = a \cos t \\ Y = b \sin t \end{cases}.$$

Et la définition **bifocale** est :

$$\mathcal{C}_e = \{M, MF + MF' = 2a\}$$

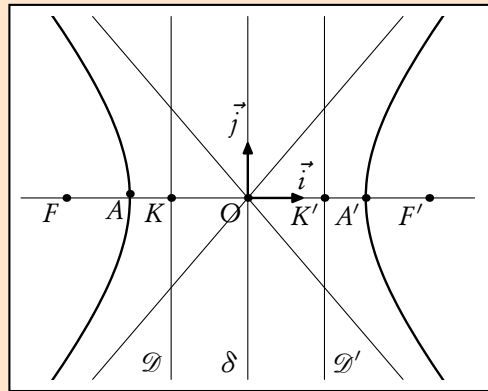
Hyperbole

Une conique à centre dont l'excentricité e est supérieur à 1 est une **hyperbole**. On note :

$$OA = OA' = a \quad OF = OF' = c$$

Voici les *relations fondamentales* pour caractériser une hyperbole :

$$c = ae \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad OK = OK' = \frac{a}{e}$$



L'équation réduite est :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Ses asymptote sont définies par :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Remarque : si $a = b$, e.i. $e = \sqrt{2}$ les asymptotes sont perpendiculaires, l'hyperbole est **équilatère**.

Le paramétrage générale de l'hyperbole est :

$$\begin{cases} X = \frac{a}{\cos t} \\ Y = b \tan t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X = \pm a \operatorname{ch} t \\ Y = b \operatorname{sh} t \end{cases}.$$

Et la définition **bifocale** est :

$$\mathcal{C}_e = \{M, |MF - MF'| = 2a\}$$

15 Géométrie différentielle

Enveloppe d'une famille de droites

Soit \mathcal{C} un arc *paramétré* définie par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, où x et y sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $I \subset \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} .

Expression de l'équation de la tangente en tout point $M(t_0)$ de \mathcal{C} :

$$y'(t_0).x - x'(t_0).y = y'(t_0).x(t_0) - x'(t_0).y(t_0)$$

Une **famille de droites** est une application qui à $t \in I \subset \mathbf{R}$, associe l'équation $\mathcal{D}_t : a(t)x + b(t)y = c(t)$

Définition (enveloppe) :

On suppose a, b, c des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I et que $ab' - ba'$ ne s'annule pas sur I .

L'arc γ est **l'enveloppe de la famille de droites** \mathcal{D}_t si tout point de γ admet comme tangente une des droites \mathcal{D}_t en un point *caractéristique* de γ , $P(t)$.

L'enveloppe d'une famille de droite \mathcal{D}_t est défini par le couple de solution $(x(t), y(t))$ de :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y = c(t) \\ a'(t)x + b'(t)y = c'(t) \end{cases}$$

Abscisse curviligne

On considère toujours un arc (\mathcal{C}) de classe \mathcal{C}^1 défini par une représentation paramétrique cartésienne $(x(t), y(t))$ ou polaire $(r(\theta))$.

On choisit sur cet arc une *origine* M_0 correspondant à une valeur t_0 (resp. θ_0) du paramètre.

L'**abscisse curviligne** s est la fonction de I dans \mathbf{R} qui s'annule en M_0 et qui vérifie :

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = \left\| \vec{M}'(t) \right\|$$

Le signe de l'abscisse curviligne correspond à l'orientation de la courbe, et sa valeur absolue est la longueur de l'arc $M_0M(t)$.

On suppose à partir de maintenant que l'arc (\mathcal{C}) est régulier, c'est-à-dire sans point singulier.

Rectification

L'abscisse curviligne s est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et **bijective** de I dans \mathbf{R} , donc est un *paramétrage admissible* de (\mathcal{C}) .

On peut alors **rectifier** (\mathcal{C}) , c'est-à-dire le paramétrer par s .

Repère de FRENET

On définit deux vecteurs, formant le **repère de FRENET** :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$$

le vecteur **tangent unitaire** en $M(s)$, dirigé *dans le sens du mouvement*, i.e. suivant les valeurs croissantes de s .

On définit d'autre part \vec{N} comme *l'image de \vec{T} par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$* .

Le repère $(M(s), \vec{T}, \vec{N})$ est appelé **repère de FRENET**.

On suppose maintenant que l'arc (\mathcal{C}) est de classe \mathcal{C}^2 .

Courbure—Rayon de courbure

La **courbure** de (\mathcal{C}) au point $M(s)$ est le réel c tel que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c \cdot \vec{N}$$

C'est la **première formule de FRENET**.

On a alors :

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -c \cdot \vec{T}$$

C'est la **deuxième formule de FRENET**.

On définit alors le **rayon de courbure** R comme l'inverse de la courbure. Il est infini (sans signe) si la courbure est nulle et réciproquement.

Formule du rayon de courbure

Le rayon de courbe peut se calculer en tout point **birégulier** (i.e. que $\vec{M}'(t_0)$ et $\vec{M}''(t_0)$ ne sont pas colinéaires) $M(t_0)$ en utilisant la formule suivante :

$$R = \frac{\left\| \vec{M}'(t_0) \right\|^3}{\det \left(\vec{M}'(t_0), \vec{M}''(t_0) \right)}$$

Centre de courbure

En tout point **birégulier** M , le **centre de courbure** I est défini par :

$$\vec{MI} = R \vec{N}$$

Il est le centre du cercle *osculateur* à (\mathcal{C}) en M , cercle de rayon R tangent à (\mathcal{C}) en M .

Détermination :

Il y a deux méthodes :

1. Par la définition :

$$\vec{OI} = \vec{OM} + R \vec{N}$$

2. En résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{MI} = 0 \\ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \cdot \vec{MI} = v^2 \end{cases}$$

$$\text{où } v = \frac{ds}{dt}.$$

Développée

La **développée** d'un arc birégulier (\mathcal{C}) est le *lieu* des centres de courbure.

Détermination :

Là aussi, il y a deux méthodes :

1. On détermine pour tout point M de l'arc, les coordonnées du centre de courbure, ainsi, une représentation paramétrique de la *développée*.
2. La *développée* (\mathcal{D}) de (\mathcal{C}) est l'**enveloppe** des normales de (\mathcal{C}) .

Développante

Définition :

(\mathcal{D}) est une **développante** de (\mathcal{C}) si, et seulement si (\mathcal{C}) est la *développée* de (\mathcal{D}) .

Détermination pratique :

Soit λ un réel choisi. La courbe définie par :

$$(\mathcal{D}_\lambda) : \overrightarrow{OM}(s) = \overrightarrow{OP}(s) + (\lambda - s) \overrightarrow{T}(s)$$

est une développante de la courbe (\mathcal{C}) définie par $s \mapsto P(s)$ où s est l'*abscisse curviligne*.

Si l'on dispose d'une paramétrisation de $(\mathcal{C}) : t \mapsto Q(t)$, on peut exprimer l'expression ci-dessus à l'aide de t :

$$(\mathcal{D}_\lambda) : \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OQ}(t) + (\lambda - s(t)) \overrightarrow{T}(s(t))$$

Si λ est une valeur prise par s ($\lambda = s_0$), le point $M(s_0)$ est un point de contact entre (\mathcal{C}) et (\mathcal{D}_λ) , donc un point de rebroussement.

16 Courbes gauches et surfaces

On considère ici l'espace euclidien \mathbf{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Courbe gauche–Représentation paramétrique

On désigne par **courbe gauche**, une courbe de \mathbf{R}^3 qui n'est pas *à priori* plane, i.e. incluse dans un plan.

Une telle courbe (\mathcal{C}) est définie par la donnée d'une fonction de I dans \mathbf{R}^3 :

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

où x, y, z sont des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

On suppose que tous les points de (\mathcal{C}) sont **réguliers**, i.e. que \overrightarrow{F} est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et que $\overrightarrow{F}' = \overrightarrow{M}'$ ne s'annule pas sur I .

Abscisse curviligne

Les définitions pour une *courbe gauche* de la longueur d'un arc et de l'abscisse curviligne sont analogue à celles relative aux courbes planes :

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \overrightarrow{M}'(t) \right\| \text{ i.e. } s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \overrightarrow{M}'(u) \right\| du$$

Repère de FRENET

Soit (\mathcal{C}) défini par la fonction de I dans \mathbf{R}^3 \vec{F} .

On définit là encore \vec{T} comme le **vecteur tangent unitaire**, i.e. :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}(s)}{ds}$$

On définit cette fois le **vecteur normal unitaire**, \vec{N} et la **courbure** c simultanément :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c \cdot \vec{N} \quad \text{avec } c > 0$$

Enfin, on complète ces deux vecteurs par le **vecteur binormal** \vec{B} pour obtenir une *base orthonormale directe* :

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

Equations cartésiennes

Une *courbe gauche* peut être défini par un couple d'**équations cartésiennes** $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ ce qui revient à dire qu'elle est considérée comme l'intersection des deux *surfaces* d'équation $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$. On dira alors que la courbe est *tracé* sur chacune de ces surfaces.

Projection

Soit (\mathcal{C}) une courbe gauche défini par :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

On détermine le projeté de (\mathcal{C}) sur le plan de coordonnées O_{xz} [resp. O_{yz} ou O_{xy}] en *éliminant* y [resp. x ou z] des deux équations $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ soit en *combinant* les deux équations, soit en *tirant* $y = k(x, z)$ [resp. $x = k(y, z)$ ou $z = k(x, y)$] de l'une pour le porter dans l'autre.

Surface-Définition

Une surface (Σ) est une partie de \mathbf{R}^3 définie :

1. soit par une **représentation paramétrique**, i.e. une fonction

$$\varphi : \begin{cases} \Omega \in \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \end{cases}$$

On a :

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \Omega, \overrightarrow{OM} = \varphi(u, v)$$

2. soit par une **équation cartésienne** $F(x, y, z) = 0$, où F est une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} .

On a :

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ avec } (x, y, z) \text{ vérifiant } F(x, y, z) = 0$$

Plan tangent et vecteur normal

Soit (Σ) une surface.

1. Si l'on dispose d'un **paramétrage** de (Σ) , φ , on note les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ respectivement $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

Le point M_0 est régulier si $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

Le vecteur $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ est appelé **vecteur normal** à (Σ) en M_0 .

Le plan passant par M_0 et dirigé par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ (donc de normal \vec{N}) est le **plan tangent** à (Σ) en M_0 .

2. Si l'on dispose d'une **équation cartésienne** $F(x, y, z) = 0$, alors le **vecteur normal** à la surface en M_0 (point régulier) est colinéaire à $\left(\overrightarrow{\text{grad}F}\right)_{M_0}$.

Alors, une **équation du plan tangent** en M_0 est déterminé par :

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}F}\right)_{M_0} \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0$$

i.e.

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Cylindres

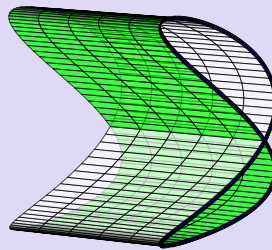
Soit γ une *courbe de l'espace* définie par un paramétrage : $\overrightarrow{OP}(t)$. On considère un vecteur non nul \vec{a} .

La *surface* engendrée par les droites de direction \vec{a} , s'appuyant sur γ est un **cylindre**.
 γ est une **directrice** et les droites dirigées par \vec{a} s'appuyant sur γ sont les **génératrices**.

Un **paramétrage** de ce cylindre est :

$$\begin{aligned} I \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \overrightarrow{OP}(u) + v \vec{a} \end{aligned}$$

Le **plan tangent** en un point *régulier* contient une *génératrice*, et la tangente à une *directrice*.



Cône

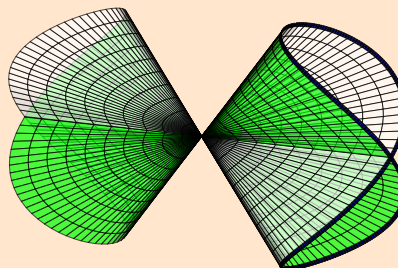
Soit γ une *courbe de l'espace* définie par un paramétrage : $\overrightarrow{OP}(t)$. On considère S un point de $\mathbf{R}^3 \setminus \gamma$.

La *surface* engendrée par les droites passant par S et s'appuyant sur γ est un **cône**.
 γ est une **directrice** et S est appelé **sommet**. Les droites passant par S et s'appuyant sur γ sont les **génératrices** du cône.

Un **paramétrage** de ce cône est :

$$\begin{aligned} I \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \overrightarrow{OS} + v \overrightarrow{SP}(u) \end{aligned}$$

Le **plan tangent** en un point *régulier* contient une *génératrice*, et la tangente à une *directrice*.



Surfaces de révolution

Soit γ une *courbe de l'espace* définie par un paramétrage : $\overrightarrow{OP}(t)$. On considère une droite Δ .

La *surface* obtenue par *révolution* de γ autour de Δ est la réunion des *cercles* d'axe Δ s'appuyant sur γ . Ces cercles sont appelés **parallèles**. Les **section** de cette surface par un plan contenant Δ sont les **méridienne** de la surface.

Si $\overrightarrow{OP}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, alors un paramétrage de la surface obtenue par révolution autour de O_z est :

$$\begin{aligned} I \times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto x(u)(\cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}) + y(u)(-\sin v\vec{i} + \cos v\vec{j}) + z(u)\vec{k} \end{aligned}$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} x_M(u, v) \\ y_M(u, v) \\ z_M(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u)\cos v - y(u)\sin v \\ x(u)\sin v + y(u)\cos v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

Le **plan tangent** en un point *régulier* contient la tangente au parallèle et à la tangente à la méridienne qui se coupent au point considéré.

Surfaces réglées-Développables

Une surface **réglée** est une surface **engendrée** par une famille de droites $(\mathcal{D}_u)_{u \in I}$, i.e. qu'elle admet un paramétrage :

$$(u, v) \in I \times \mathbf{R} \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \overrightarrow{OP}(u) + v\vec{\alpha}(u)$$

Les droites \mathcal{D}_u sont les **génératrice**, la courbe décrite par $\overrightarrow{OP}(u)$, $u \in I$ est une **directrice**.

Une surface *réglée* est **développable** lorsque le plan tangent rest *constant* le long de chaque génératrice.

Propriétés :

- ★ Soit M un point d'une surface réglée, alors le plan tangent en M contient la (ou les) génératrice(s) de cette surface passant par M .
- ★ Soit (Σ) une surface réglée admettant pour paramétrage : $(u, v) \in I \times \mathbf{R} \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \overrightarrow{OP}(u) + v\vec{\alpha}(u)$. (Σ) est *développable* si, et seulement si :

$$\forall u \in I, \det \left(\frac{d\vec{P}}{du}, \vec{\alpha}(u), \vec{\alpha}'(u) \right) = 0$$

Quadriques

Une **quadrique** est une *surface* d'équation cartésienne :

$$q(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = C$$

où q est une **forme quadratique**, φ une *forme linéaire*, et C une constante.

Après réduction de la forme quadratique, i.e. un changement de base orthonormée (rotation), on se ramène à une équation :

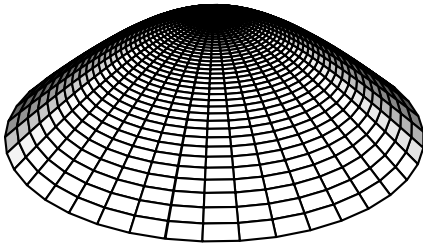
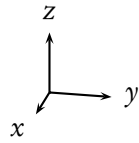
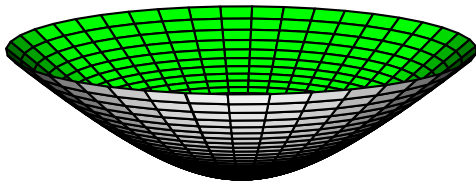
$$\lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + \nu z_1^2 + \psi(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

où λ, μ, ν sont les valeurs propres de q , ψ la forme linéaire obtenue après le changement de base, et C_1 une nouvelle constante.

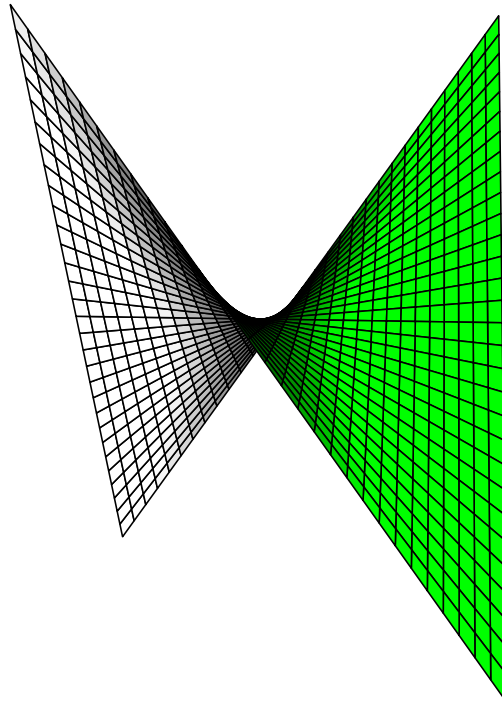
Ensuite, s'il a lieu, un changement d'origine (translation) permet de se ramener aux équations de *références* listées ci dessous.

(A, B, C) sont trois réels strictements positifs. Les cas dégénérés ne sont pas pris en compte.

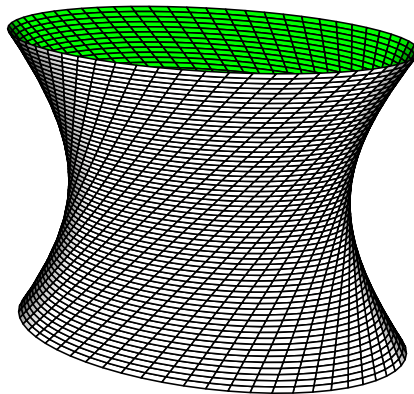
Equation	Nature	Révolution	Réglée
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1$	<i>Ellipsoïde</i>	si $\text{Card}(\{A, B, C\}) < 3$	Non
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} - \frac{Z^2}{C^2} = 1$	<i>Hyperboloïde à une nappe</i>	si $A = B$	Oui
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} - \frac{Z^2}{C^2} = 0$	<i>Cône</i>	si $A = B$	Oui
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} - \frac{Z^2}{C^2} = -1$	<i>Hyperboloïde à deux nappes</i>	si $A = B$	Non
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = Z$	<i>Paraboloïde</i>	si $A = B$	Non
$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = Z$	<i>Paraboloïde hyperbolique</i>	Non	Oui
$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$	<i>Cylindre à base elliptique</i>	si $A = B$	Oui
$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1$	<i>Cylindre à base hyperbolique</i>	Non	Oui
$\frac{X^2}{A^2} = Z$	<i>Cylindre à base parabolique</i>	Non	Oui



L'hyperboloïde à 2 nappes



Le paraboloid hyperbolique



L'hyperboloïde à 1 nappe

17 Fonctions à plusieurs variables

Normes euclidienne

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $E = \mathbf{R}^n$.

Une **norme** est application N de E dans \mathbf{R}_+ telle que :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
3. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

La *norme* utilisée ici est la norme euclidienne définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Boules ouverte-fermée

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $E = \mathbf{R}^n$.

On appelle **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$ l'ensemble :

$$B(a, R) = \{x, \|a - x\| < R\}$$

De même on définit la **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^*$ l'ensemble :

$$B(a, R) = \{x, \|a - x\| \leq R\}$$

Voisinage

Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Une *partie* A de \mathbf{R}^n est un **voisinage** de x si elle contient une *boule ouverte* de centre x .

Partie bornée

Une *partie* de \mathbf{R}^n est **bornée** si elle est *incluse* dans une boule fermée de centre O , i.e. $A \subset \mathbf{R}^n$ est **bornée** si, et seulement si :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, A \subset B(O, M)$$

Ouverts-Fermés

Un **ouvert** est une *partie* de \mathbf{R}^n qui est un voisinage de chacun de ses points, i.e. qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points : Ω est un **ouvert** de \mathbf{R}^n si, et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, B(x, \varepsilon) \subset \Omega$$

Intuitivement, un ensemble est ouvert s'il ne contient aucun éléments de sa frontière.

Un **fermé** est une partie de \mathbf{R}^n dont le complémentaire dans \mathbf{R}^n est un *ouvert* : F est un **fermé** si, et seulement si $\mathbf{R}^n \setminus F$ est ouvert.

Intuitivement, un ensemble est fermé s'il contient tous les éléments de sa frontière.

Attention : un ensemble peut être ni ouvert ni fermé, ou encore à la fois ouvert et fermé (\emptyset ou \mathbf{R}^n).

Suites dans \mathbf{R}^n

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeur dans \mathbf{R}^m . Alors $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)})$, où $x_n^{(k)}$ est une suite à valeurs réelles.

On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists N \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

Si $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbf{R}^m$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$ si, et seulement si :

$$\forall p \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{(p)} = \ell_p$$

Propriété : Toute suite *convergente* est **bornée**.

Limite

Soit f une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^m défini par m fonctions de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} : $\forall x \in \mathbf{R}^p, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. On considère $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ un élément fixé dans \mathbf{R}^p .

On dit que $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \ell \in \mathbf{R}^m$ si, et seulement si :

1. f est définie sur une *boule ouverte* de centre ω et de rayon strictement positif

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbf{R}_+^*, \|x - \omega\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Continuité

f est **continue** en ω si, et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = f(\omega)$$

1. La combinaison linéaire de fonctions continue est continue.
2. La composée de deux fonctions continues est continue.

Méthodes :

- ★ On montre qu'une fonction est *continue* en ω en utilisant les *théorèmes généraux* où en **majorant** $\|f(x) - f(\omega)\|$ au voisinage de ω .
- ★ On montre qu'une fonction **n'est pas continue** en ω en trouvant deux suites u_n et v_n tendant vers ω tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$.

Propriété

Soit $f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction continue en tout point d'un fermé borné F de \mathbf{R}^p , alors :

$f(F)$ est une partie fermée et bornée de \mathbf{R}^m

Dérivées partielles

Soit f une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^m .

La k -ième application partielle associée à f en ω est l'application φ_k de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n définie par :

$$\varphi_k(x) = f(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, x, \omega_{k+1}, \dots, \omega_p)$$

La **dérivée partielle** de f par rapport à x_k en ω est **nombre dérivé** $\varphi'_k(\omega_k)$ s'il existe, et est notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\omega$. La dérivée partielle de par rapport à x_k est donc une application de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^m .

Fonction de classe \mathcal{C}^1

On dit que f est **classe \mathcal{C}^1** en ω si, et seulement si elle est *continue* en ω , ainsi que **toute** ses dérivées partielles.

Différentielle

Soit f une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^n de classe \mathcal{C}^1 en $\omega : f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

La **différentielle** de f en ω est une *application linéaire* df de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^n , définie par :

$$df(dx_1, \dots, dx_p) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

Ce qui souvent s'écrit :

$$df = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

Matrice jacobienne

Dans les *bases canoniques*, la matrice de df est appelée **matrice jacobienne** de f en ω , elle est notée $J(f)$:

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} f_1 \\ \overrightarrow{\text{grad}} f_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\text{grad}} f_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Composition et inversion

Composition :

On a :

$$d(f \circ g)_\omega = (df)_{g(\omega)} \circ (dg)_\omega \quad \text{i.e.} \quad J(f \circ g)_\omega = J(f)_{g(\omega)} \times J(g)_\omega$$

En pratique, on a :

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_m} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_m}$$

ce qui s'écrit (par abus de notation) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_m}$$

Inversion :

Si f est un *endomorphisme* de \mathbf{R}^n , alors, $J(f)$ est carrée, et, si elle est *inversible* :

$$d(f^{-1})_{f(\omega)} = d(f)_{f(\omega)}^{-1} \quad \text{i.e.} \quad J(f^{-1})_{f(\omega)} J(f)_{f(\omega)}^{-1}$$

f est injective au voisinage de ω si, et seulement si $\det(J(f))_\omega \neq 0$.

Attention : Par exemple, le changement de variable en polaire est :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Il faut tenir compte de toutes les variables.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit f une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^n de classe \mathcal{C}^1 en ω . Les dérivées partielles de f peuvent admettre alors des dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

Théorème de SCHWARZ

Si **toutes** les *dérivées partielles* de f sont de classe \mathcal{C}^1 en ω , alors f est dite de classe \mathcal{C}^2 et :

$$\forall (k, m) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k}$$

Formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 2

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} de classe \mathcal{C}^2 en (a, b) , alors :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + o(h^2 + k^2)$$

Point critique

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , et $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

On appelle **point critique** de f un point en lequel :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Détermination des extrema

En un point *critique*, $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ a le signe de la forme quadratique :

$$(h, k) \mapsto h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si celle-ci est non nulle.

Les **extrema** de f sur Ω peuvent être des points de la *frontière*, ou des points *critiques*.

Si (a, b) est un point critique de Ω , on pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ce sont les notations de MONGE.

1. Si $s^2 - rt < 0$, f présente un **extremum** en (a, b) :
 - (a) **maximum** si $r < 0$
 - (b) **minimum** si $r > 0$
2. Si $s^2 - rt > 0$, f présente un **point col** en (a, b) .
3. Si $s^2 - rt = 0$, une étude complémentaire est à conseiller.

18 Intégrales multiples

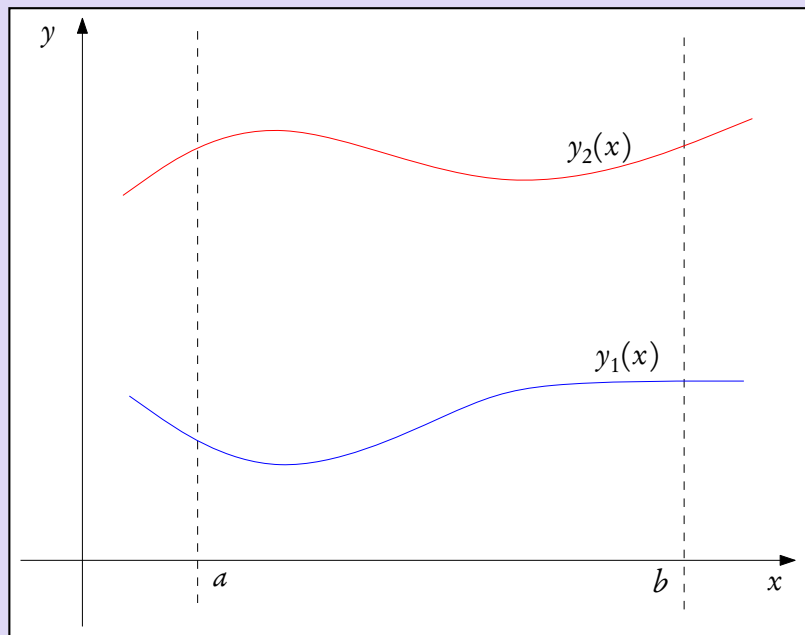
Théorème de FUBINI

Soit a et b deux réels et γ_1, γ_2 deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b], \gamma_1(x) \leq \gamma_2(x)$$

En posant $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leq x \leq b, \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)\}$ alors, pour toute fonction f de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} continue sur D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Si γ_1 et γ_2 sont des constantes respectivement c et d (i.e. indépendant de x) alors :

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Intégrales triples

On considère une fonction f de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} continue sur $U \subset \mathbf{R}^3$ et $D = [a, b] \times [\alpha, \beta] \times [A, B]$ tel que $D \subset U$. Alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_A^B f(x, y, z) dx dy dz$$

Le théorème de FUBINI s'applique aussi ici.

Par extension, on considère K une partie de \mathbf{R}^2 , et ψ_1 et ψ_2 deux fonction de K dans \mathbf{R} . On considère l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x, y) \in K, \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subset U$$

alors :

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Changement de variables-intégrales doubles

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , continue sur U .

On considère $\varphi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ une application **bijective** et de classe \mathcal{C}^1 de U dans $\Omega = \varphi(U)$.

On note $\det(J(\varphi)) = |J(\varphi)|$ le déterminant *jacobien* de φ et $\det(J(\varphi)^{-1}) = \frac{1}{\det(J(\varphi))}$ le déterminant *jacobien* de φ^{-1} .

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \iint_\Omega (f \circ \varphi^{-1})(u, v) \det(J(\varphi)^{-1}) du dv$$

Attention : On veillera à *toujours* vérifier que $\det(J(\varphi)) \neq 0$.

Changement de variables–Intégrales triples

Soit f une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} , continue sur $U \subset \mathbf{R}^3$.

On considère $\psi : (x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ une application **bijjective** et de classe \mathcal{C}^1 de U dans $\Omega = \psi(U)$.

On utilise les même notation que précédemment. On a :

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} (f \circ \psi^{-1})(u, v, w) \det(J(\psi)^{-1}) du dv dw$$

Attention : On veillera à *toujours* vérifier que $\det(J(\psi)) \neq 0$.

Formules usuelles

Passage des coordonnées cartésiennes en polaires dans \mathbf{R}^2 :

Ici $\omega : (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$. On a $J(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{\iint_U f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} (f \circ \omega^{-1})(r, \theta) r dr d\theta}$$

Passage des coordonnées cartésiennes en cylindriques dans \mathbf{R}^3 :

Ici $\omega : (r, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$. On a $J(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} (f \circ \omega^{-1})(r, \theta, z) r dr d\theta dz}$$

Passage des coordonnées cartésiennes en sphériques dans \mathbf{R}^3 :

Ici $\omega : (R, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$. On a $J(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \varphi \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} (f \circ \omega^{-1})(R, \theta, \varphi) R^2 dR d\theta d\varphi}$$

Forme différentielle de \mathbf{R}^2

Définition :

Soit P et Q deux fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} de classe \mathcal{C}^1 , l'application définie par :

$$\omega(x_0, y_0) : (dx, dy) \mapsto P(x_0, y_0).dx + Q(x_0, y_0).dy$$

est une **forme différentielle**.

La différentielle de f en (x_0, y_0) est la forme différentielle :

$$df : (dx, dy) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} dy.$$

Attention : Lorsque $\forall (x_0, y_0)$, $\omega(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)$, ω est une forme différentielle **exacte**, f est alors appelée primitive de ω sur U . Cette existence de f n'est pas *obligatoire*.

On dit que ω est **fermé** sur U si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pour tout $(x, y) \in U$.

Il vient que **toutes** les formes différentielles exactes sont fermées.

Intégrales curvilignes

Soit ω une forme différentielle : $\omega = Pdx + Qdy$, et (γ) un arc de classe \mathcal{C}^1 défini par le paramétrage :

$$(\gamma) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \text{ avec } t \in [a, b]$$

Alors, on définit l'**intégrale curviligne** de ω sur (γ) :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)) dt$$

En physique, elle est noté $\oint Pdx + Qdy$, et est appelée **circulation** ou **travail** de $(x, y) \mapsto P\vec{i} + Q\vec{j}$ sur (γ) .

Formule de GREEN-RIEMANN

Soit (γ) un arc paramétré, fermé et orienté dans le sens trigonométrique, i.e. (γ) limite une partie bornée du plan appelée K . Alors :

$$\int_{(\gamma)} Pdx + Qdy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

On applique *généralement* cette formule au calcul **d'aire** de K , en posant :

- $P = 0$ et $Q = x$, d'où :

$$\iint_K dxdy = \int_{(\gamma)} xdy$$

- $P = -y$ et $Q = 0$, d'où :

$$\iint_K dxdy = - \int_{(\gamma)} ydx$$

- $P = -\frac{y}{2}$ et $Q = \frac{x}{2}$, d'où :

$$\iint_K dxdy = \frac{1}{2} \int_{(\gamma)} -ydx + xdy$$

Définitions :

Un **champs scalaire** est une application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} de classe \mathcal{C}^1 au moins. L'ensemble des champs scalaires sera noté \mathcal{S}_3 .

Un **champs vectoriel** est une application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 de classe \mathcal{C}^1 au moins. L'ensemble des champs vectoriels sera noté \mathcal{V}_3 .

Soit $\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. On définit :

1. **La divergence** $\text{div} : \mathcal{V}_3 \mapsto \mathcal{S}_3$:

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2. **Le gradient** $\vec{\text{grad}} : \mathcal{S}_3 \mapsto \mathcal{V}_3$ défini pour $\Phi \in \mathcal{S}_3$ par :

$$\vec{\text{grad}}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}$$

3. **Le rotationnel** $\vec{\text{rot}} : \mathcal{V}_3 \mapsto \mathcal{V}_3$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

19 Géométrie dans l'espace

Projection sur un axe

Le projeté *orthogonal* du vecteur \vec{x} sur l'axe dirigé par \vec{u} est :

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

Distance d'un point à un plan

La distance du point $M(x_0, y_0, z_0)$ et du plan (P) d'équation $ax + by + cz - d = 0$ est :

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance d'un point à une droite

La distance du point M à la droite $(\mathcal{D}) = (A, \vec{u})$ est :

$$d(M, (\mathcal{D})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distance entre deux droites

Soit $(D_1) = (A, \vec{u})$ et $(D_2) = (B, \vec{v})$.

Propriétés :

1. (D_1) et (D_2) sont *parallèles* si, et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. (D_1) et (D_2) sont *sécantes* si et seulement si $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Si (D_1) et (D_2) sont *non parallèles*, leurs distance est :

$$d((D_1), (D_2)) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Cette distance est atteinte sur la *perpendiculaire commune*.

