I.U.P. N.T.I.E. Analyse – Algèbre – Arithmétique – Probabilités

Compléments de cours sur l'arithmétique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Voici le complément de cours promis destiné à résumer les résultats abordés dans les exercices 13 et 14 de la première feuille de T.D.

Dans tout ce qui suit, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à l'arithmétique de l'anneau $K[X]$.

Comme pour l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ tout repose sur le fait que $K[X]$ est muni d'une division euclidienne, le rôle de la valeur absolue des entiers étant tenu par la fonction degré : si $F \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$F(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad \text{avec } a_n \neq 0,$$

on dit que F est de degré n ; l'entier n s'appelle le degré de F et on le note $\deg(F)$. Il convient de remarquer que :

$$\forall F, G \in K[X], \qquad \deg(FG) = \deg(F) + \deg(G) \quad \text{et} \quad \deg(F+G) \leqslant \max\{\deg(F), \deg(G)\}$$

Théorème 1 (Division Euclidienne) *Étant donnés deux polynômes $(F, G) \in K[X] \times K[X] \setminus \{0\}$, il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$F = GQ + R \qquad \textit{avec :} \quad \deg(R) < \deg(G)$$

De plus, ce couple est unique.

Exactement comme nous avons fait découler une théorie de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ de la division euclidienne, il est possible d'étudier la divisibilité de $K[X]$ gr,ce à la division euclidienne précédente. Dès lors, on peut introduire les notions de pgcd et de ppcm de deux et plusieurs polynômes. L'algorithme d'Euclide fonctionne de nouveau etc... Un excellent exercice consiste à reprendre le cours sur les entiers et de l'adapter à l'anneau des polynômes[1]. La seule différence intervient à la fin du cours quand les nombres premiers de $\mathbb{Z}$ sont introduits. En effet dans le cadre des polynômes, il est possible de caractériser les polynômes premiers qui traditionnellement sont plutôt qualifiés **d'irréductibles**.

Définition 2 *Un polynôme $F \in K[X]$ est dit **inversible** dans $K[X]$ s'il existe $G \in K[X]$ tel que $FG = 1$.*

*Un polynôme $F \in K[X]$ est dit **irréductible** dans $K[X]$ si et seulement s'il est non nul non inversible et si :*

$$F = PQ \qquad \Longrightarrow \qquad P \textit{ ou } Q \textit{ est inversible dans } K[X]$$

Nous avons montré dans l'exercice 14 que :

Proposition 3 *Les inversibles de $K[X]$ sont les polynômes constants non nuls, à savoir K^*.*

Afin de déterminer les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, il nous a fallu admettre le théorème de d'Alembert :

Théorème 4 (de d'Alembert) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

De ce théorème, on peut déduire (cf. exercice 14) les caractérisations suivantes :

Proposition 5 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1, c'est-à-dire de la forme $aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.*

Proposition 6 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 — c'est-à-dire de la forme $aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ — ou ceux de degré 2 sans racines dans $\mathbb{R}$ — c'est-à-dire de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $b^2 - 4ac < 0$ —.*

Enfin, comme dans les entiers, nous avons le résultat fondamental suivant :

Théorème 7 *Tout polynôme $F \in K[X]$ admet une décomposition en irréductibles : il existe $F_1, \ldots, F_r$ des irréductibles de $K[X]$ deux-à-deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls tels que :*

$$F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$$

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre près.

Par conséquent, tout polynôme (non constant) de $\mathbb{C}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 et tout polynôme (non constant) de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 ou 2.

[1] À mon avis, l'un des moyens les plus efficaces pour apprendre et comprendre le cours sur l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ consiste à rédiger celui qui correspond pour les polynômes. Je vous conseille vivement de l'écrire et de me poser toutes les questions que vous voulez sur les éventuels points obscurs qui demeurent.