

## Quelques idées d'exos

**Exercice 1 : Quelques calculs de limites en zéro**

Déterminer si elles existent les limites en zéro des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{x} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right), \quad \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x}{x} \right), \quad \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{2x - \sin x - \tan x}, \quad \frac{x + \sin x}{1 - \cos x}, \quad \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}.$$

**Exercice 2 : L'équation de Fermat  $x^2 + y^2 = z^2$** 

L'objet de cet exercice est de prouver les solutions **entières strictement positives** de l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{E}$$

sont (à une permutation près de  $x$  et  $y$ ) de la forme :

$$x = d(u^2 - v^2) \quad y = 2d uv \quad z = d(u^2 + v^2)$$

où  $d, u, v$  sont des entiers, les deux derniers étant premiers entre eux.

1. Commencer par vous assurer que les solutions avancées vérifient bien l'équation (E).

2. Soit  $d$  le pgcd de  $x, y$  et  $z$ . Montrer que les entiers  $x/d, y/d$  et  $z/d$  sont encore solution de (E).

À partir de maintenant on suppose que  $x, y$  et  $z$  sont premiers dans leur ensemble.

3. Montrer qu'ils le sont nécessairement deux-à-deux.

4. En déduire que deux d'entre eux sont impairs et que le troisième est nécessairement pair.

5. Montrer que  $x$  et  $y$  sont de parité distincte en procédant ainsi :

a. Vérifier que le carré d'un nombre impair est toujours congru à 1 modulo 4 et que celui d'un nombre pair est toujours congru à zéro modulo 4.

b. En raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que  $x$  et  $y$  sont tous deux impairs, aboutir à une contradiction.

c. Conclure.

À partir de maintenant on suppose que  $x$  impair,  $y$  pair et donc  $z$  impair.

On écrit l'équation (E) sous la forme suivante :

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$$

6. En remarquant que  $2x = (z + x) - (z - x)$  et que  $2z = (z + x) + (z - x)$  montrer que  $\text{pgcd}(z + x, z - x) = 2$ .

On peut donc introduire  $x', y', z' \in \mathbb{Z}$  tels que  $y = 2y', z + x = 2x'$  et  $z - x = 2z'$  si bien que  $y'^2 = x'z'$ .

7. Pourquoi les entiers  $x'$  et  $z'$  sont-ils premiers entre eux ? En déduire que  $x'$  et  $z'$  sont nécessairement des carrés (indication : utiliser l'égalité  $y'^2 = x'z'$ ).

8. En récapitulant ce que vous avez montré, vous devez être en mesure de conclure.

**Exercice 3 : Histoire de changer d'air, mais non de bases !**

Munissons  $\mathbb{R}^3$  de sa base canonique  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  — avouez que vous êtes en présence d'un début d'exercice original, n'est-ce pas ? —. Introduisons  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique

est la suivante :

$$M = \text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons  $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$  et  $\varepsilon_3 = (2, 0, 1)$ .

1. Prouver que  $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dresser  $N = \text{Mat}(f, \mathcal{C})$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ .
3. Déterminer  $N^n$  pour  $n \geq 1$ .
4. En déduire l'expression de  $M^n$  pour  $n \geq 1$ .

#### Exercice 4 : Le résultant de deux polynômes, aperçu

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $K[X]$  (où  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de degré  $p$  et  $q$  respectivement :

$$P(X) = a_p X^p + \dots + a_0 \quad \text{et} \quad Q(X) = b_q X^q + \dots + b_0$$

Une fois n'est pas coutume, pour  $n > 0$ , on note  $K_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré **strictement** inférieur à  $n$  — au fait quelle est la dimension de cet espace — que l'on munit de la base  $\mathcal{B}_n = \{X^{n-1}, X^{n-2}, \dots, X, 1\}$ . Enfin, on introduit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : K_q[X] \times K_p[X] &\longrightarrow K_{p+q}[X] \\ (U, V) &\longmapsto UP + VQ \end{aligned}$$

L'espace de départ est muni de la base  $\mathcal{B}_q \times \mathcal{B}_p = \{(X^{q-1}, 0), \dots, (1, 0), (0, X^{p-1}), \dots, (0, 1)\}$  et celui d'arrivée de la base  $\mathcal{B}_{p+q}$ .

1. Vérifier que  $\varphi$  est une application linéaire et dresser, dans les bases fixées précédemment, la matrice de l'application  $\varphi$  pour  $p = 6$  et  $q = 4$  par exemple.

On définit le **résultant** des polynômes  $P$  et  $Q$ , noté  $\text{res}(P, Q)$ , comme étant le déterminant de cette application :  $\text{res}(P, Q) = \det(\varphi)$ .

2. Calculer ce résultant pour  $p = q = 1$  pour  $p = 2$  et  $Q = P'$  (poser  $P(X) = aX^2 + bX + c$  dans le deuxième cas, histoire de peut-être vous interpeller).

3. Nous allons établir un certain nombre de formules liées au résultant ; dans chacun des cas avant de vous attaquer au cas général, traiter des cas particuliers avec de petites valeurs de  $p$  et  $q$ .

- a. Vérifier que pour  $r \in K$ , on a  $\text{res}(X - r, Q) = Q(r)$ .
- b. Montrer que  $\text{res}(XP, Q) = Q(0) \text{res}(P, Q)$ .
- c. Montrer que pour  $r \in K$ , on a  $\text{res}(P(X - r), Q(X - r)) = \text{res}(P, Q)$ .
- d. Gr, ce aux deux questions précédentes prouver que :

$$\text{res}((X - r)P, Q) = Q(r) \text{res}(P, Q) \quad \text{et} \quad \text{res}((X - r_1) \cdots (X - r_p), Q) = Q(r_1) \cdots Q(r_p)$$

les  $r_i$  et  $r$  étant des éléments de  $K$ .

4. Montrer le résultat<sup>1</sup> fondamental suivant : les polynômes  $P$  et  $Q$  ont une racine commune dans  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\text{res}(P, Q) = 0$ .

5. Confronter le résultat précédent aux exemples du début de cet exercice. Notamment, le deuxième résultant, calculé à cette occasion, ne vous rappelle-t-il pas, à un coefficient près, un certain réel (ou complexe) associé au polynôme  $aX^2 + bX + c$ .

6. Considérons maintenant le résultant de  $P$  et  $Q$  comme un déterminant à coefficients dans  $K[X]$ , plutôt que dans  $K$ .

---

<sup>1</sup>J'attire votre attention sur le fait que ce test est complètement effectif (i.e. programmable en machines). Sachez de plus que le résultant est un déterminant loin d'être quelconque ; d'ailleurs, il existe des algorithmes spécifiques (et assez sophistiqués) permettant de calculer un résultant efficacement. Autrement dit, tout système de calcul formel digne de ce nom n'utilise jamais la fonction *déterminant* — si cette dernière existe — pour calculer un résultant.

a. Pour  $1 \leq i \leq p+q$ , on note  $L_i$  la  $i$ -ème ligne du déterminant définissant  $\text{res}(P, Q)$ ; effectuer l'opération sur les lignes indiquée ci-dessous :

$$L_{p+q} \leftarrow X^{p+q-1}L_1 + X^{p+q-2}L_2 + \cdots + XL_{p+q-1} + L_{p+q}$$

et montrer que  $\text{res}(P, Q)$  peut se définir comme un déterminant à coefficients dans  $K[X]$  tous les coefficients étant constants sauf ceux de la dernière ligne qui sont de la forme  $X^iP$  ou  $X^jQ$  avec  $0 \leq i < q$  et  $0 \leq j < p$  (conseil d'ami : effectuer tout d'abord cette opération pour deux valeurs de  $p$  et  $q$  petites, par exemple  $p = 6$  et  $q = 4$ ).

b. En utilisant la nouvelle expression du résultant que vous venez de mettre en évidence, prouver qu'il existe  $(U, V) \in K_q[X] \times K_p[X]$  tel que  $\text{res}(P, Q) = UP + VQ$ .

c. Retrouver le fait que si  $P$  et  $Q$  ont une racine commune dans  $\mathbb{C}$  alors leur résultant est nul.

**Exercice 5 : Le résultant est le bon résultat (bof!)**

Soient  $P(X) = X^3 + X + 1$  et  $Q(X) = X^2 + 1$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  et soit  $\varphi$  l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_5[X] \\ (U, V) &\longmapsto UP + VQ \end{aligned}$$

où pour  $n \geq 1$ , la notation  $\mathbb{C}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré **strictement** inférieur à  $n$ .

1. Dresser la matrice de  $\varphi$  en choisissant  $\mathcal{B} = \{(X, 0), (1, 0), (0, X^2), (0, X), (0, 1)\}$  comme base au départ et  $\mathcal{C} = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$  comme base à l'arrivée.

2. Calculer  $\text{res}(P, Q)$  qui, je vous le rappelle, n'est rien d'autre que le déterminant de  $\varphi$ .