D.E.U.G. M.A.S.S. ou I.U.P. (en gros D.E.U.G. A 1 et 2) Algèbre

Quelques idées d'exos

Exercice 1 : Le thérème de Cauchy

Il s'agit de prouver le théorème de Cauchy dont voici l'énoncé : *un groupe fini G d'ordre pq, avec p premier, contient un élément d'ordre p.*

Pour cela, on introduit X le sous-ensemble de G^p constitué des p-uplets suivants :

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p,\ g_1 \cdots g_p = 1\}$$

1. On commence par dénombrer X.

a. Pourquoi X est-il non vide ?

b. Montrer que l'application $X \to G^{p-1}$ qui au p-uplet $(g_1, \ldots, g_p) \in X$ associe le $(p-1)$-uplet $(g_1, \ldots, g_{p-1})$ est une bijection.

c. En déduire le cardinal de X (rappel : le cardinal de E^r avec E fini de cardinal n, est égal à n^r).

2. Vérifier l'équivalence entre les deux propriétés suivantes : (i) : G possède un élément d'ordre p et (ii) : X contient un élément dont toutes les coordonnées sont égales et distinctes de 1.

3. On introduit c le p-cycle $(1, \ldots, p)$ et pour $(g_1, \ldots, g_p) \in G^p$, on pose :

$$c.(g_1, \ldots, g_p) = (g_{c(1)}, \ldots, g_{c(p)}) = (g_p, g_2, g_3, \ldots, g_{p-1}, g_1)$$

Sur le même principe, pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on définit $c^i.(g_1, \ldots, g_p)$.

a. Si $\eth \in X$, vérifier que $c.\eth \in X$. Montrer que l'on a la même propriété en remplaçant c par une de ses puissances.

4. Soient Y et Z les deux sous-ensembles de X définis par :

$$Y = \{(g_1, \ldots, g_p) \in X,\ g_1 = \cdots = g_p\} \qquad Z = \{(g_1, \ldots, g_p) \in X,\ (\exists\, i \neq j,\ g_i \neq g_j)\}$$

Bien s ˚ r, X est la réunion disjointe de Y et Z.

a. En permutant les coordonnées, montrer qu'un quelconque élément $(g_1, \ldots, g_p) \in Z$ permet d'en construire $(p-1)$ autres.

b. À l'aide de la question précédente, prouver que le cardinal de Z est divisible par p.

c. En déduire le cardinal de Y est lui aussi divisible par p.

d. Conclure.

Exercice 2 : Pas bête ce général chinois

Pour dénombrer un de ses bataillons, un général chinois a l'idée suivante : tout d'abord, il sait que ce bataillons compte moins de 1000 soldats. Ensuite il exige de ses troupes de se mettre par paquets de sept et remarque que seuls deux soldats n'ont pas trouvé place dans aucun groupe. Il prend note de ce nombre deux. Il réitère le même expérience en exigeant que les soldats se rangent par paquets de onze puis treize. Dans le premier cas il note que seulement trois soldats n'ont pas trouvé place dans aucun groupe et dans le second seul un hurluberlu n'a pas trouvé à s'insérer nul part. Ces informations lui suffisent pour dénombrer son bataillon.

1. Quel est donc le secret de cet ingénieux général chinois ?

Indication : les premiers 7, 11 et 13 n'ont évidemment pas été choisis au hasard. De même l'ordre des exercices de cette feuille ne relève pas d'un tirage aléatoire...

Correction :

Notons x le nombre de soldats composant le bataillon de ce général. Par hypothèse, ce nombre satisfait le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 1 \pmod{13} \end{cases}$$

Ce système admet des solutions, 7, 11 et 13 étant premiers entre eux deux-à-deux. Pour déterminer ces solutions, on sait qu'il convient de déterminer les coefficients de Bezout liant les entiers 7×11, 7×13 et 11×13. Comme :

$$6(7 \times 11) - 5(7 \times 13) = 7 \qquad \text{et} \qquad 41 \times 7 - 2(11 \times 13) = 1$$

(les coefficients de Bezout étant déterminés gr,ce à l'algorithme d'Euclide étendu) on obtient :

$$41 \times [6(7 \times 11) - 5(7 \times 13)] - 2(11 \times 13) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 246(7 \times 11) - 205(7 \times 13) - 2(11 \times 13) = 1$$

Posons $x_{13} = 246(7 \times 11)$, $x_{11} = -205(7 \times 13)$ et $x_7 = -2(11 \times 13)$ alors l'entier :

$$2x_7 + 3x_{11} + x_{13} = -37595$$

est solution du système de congruences. Comme $1001 = 7 \times 11 \times 13$, l'ensemble S des solutions est donné par :

$$S = \{-37595 + 1001q,\ q \in \mathbb{Z}\}$$

Parmi ces entiers, seul un est positif et inférieur ou égal à 1000, c'est 443 (obtenu avec $q = 38$). Par conséquent le bataillon compte 443 soldats.

Exercice 3 : Calculs de minimum

Considérons $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

1. Soit F le sous-espace de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ constitué des applications affines, c'est-à-dire $F = \{t \mapsto at + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$; il s'agit de déterminer la valeur $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt \right\}$.

a. Lier le minimum cherché à la distance d'un élément de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ à F.

b. Calculer une base orthonormée de F.

c. Calculer $\pi_F(t^2)$ le projeté orthogonal de la fonction $t \mapsto t^2$ sur F.

d. Conclure.

2. Reprendre les questions précédentes, *la dernière étant hors barême*, afin de déterminer la valeur $\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left\{ \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt \right\}$. (penser à ré-investir vos calculs antérieurs).

Correction :

1. Il s'agit de déterminer $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^3} \left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt \right\}$.

a. Ce minimum n'est rien d'autre que $d(t^2, F)^2$ le carré de la distance de la fonction $t \mapsto t^2$ au sous-espace F. De plus, on sait que $d(t^2, F) = \|t^2 - \pi_F(t^2)\|$, où $\pi_F(t^2)$ désigne le projeté orthogonal de la fonction $t \mapsto t^2$ sur F.

b. Afin de calculer cette distance, on commence par déterminer, via le procédé d'orthognalisation de Schmidt, une base orthonormée de F. Cela en passe par le calcul des quantités :

$$\|1\| = 1 \qquad \|t\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \langle 1, t \rangle = \frac{1}{2} \qquad \left\| t - \frac{1}{2} \right\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Posons $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = \sqrt{3}(2t-1)$ alors la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base orthonormée de F.

c. On en déduit $\pi_F(t^2)$ le projeté orthogonal de t^2 sur F :

$$\pi_F(t^2) = \langle \varepsilon_1, t^2 \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2, t^2 \rangle \varepsilon_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2t-1) = t - \frac{1}{6}$$

d. Le minimum cherché est donc :

$$d(t^2, F)^2 = \|t^2 - \pi_F(t^2)\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

2. Ré-investissons les calculs précédents : par définition $t^2 - \pi_F(t^2) \in F^\perp$ donc la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, t^2 - t + \frac{1}{6}\}$ est orthogonale. Reste à l'orthonormaliser, ce qui revient à normaliser $t^2 - t + \frac{1}{6}$. Mais on connaît cette norme puisque c'est $d(t^2, F)$. Par conséquent la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, où $\varepsilon_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$ est une base orthonormée de G le sous-espace vectoriel engendré par 1, t et t^2. Reste à calculer le projeté $\pi_G(t^3)$ ce qui en passe par la détermination des produits scalaires :

$$\langle t^3, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{4} \qquad \langle t^3, \varepsilon_2 \rangle = \frac{3\sqrt{3}}{20} \qquad \langle t^3, \varepsilon_3 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

Par suite :

$$\pi_G(t^3) = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \sqrt{3}(2t-1) + \frac{\sqrt{5}}{20} \times \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{1}{20}$$

Enfin, on en déduit le second minimum :

$$d(t^3, G)^2 = \|t^3 - \pi_G(t^3)\|^2 = \int_0^1 \left(t^6 - 3t^5 + \frac{69}{20}t^4 - \frac{19}{10}t^3 + \frac{51}{100}t^2 - \frac{3}{50}t + \frac{1}{400}\right) dt = \frac{1}{2800}$$

Exercice 4 : L'égalité $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$

On désigne par E_{ij} la matrice $n \times n$ dont tous les termes sont nuls sauf le (ij)-ème qui vaut 1 et pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice $B_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$. C'est un grand honneur pour moi de vous présenter $B_{31}(\lambda)$ pour $n = 4$:

$$B_{31}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin on note $E_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $B_{ij}(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous allons établir l'égalité $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$.

1. Que vaut le produit $B_{ij}(\lambda)B_{ij}(\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$? Quel est l'inverse de $B_{ij}(\lambda)$?

2. Quel est l'effet sur une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ d'une multiplication par $B_{ij}(\lambda)$ à droite ? Et à gauche ?

3. Momentanément, on suppose que $n = 2$.

a. Commencer par dresser un dictionnaire liant les quatres transformations :

$$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \qquad C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 \qquad C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$$

et les quatres multiplications par $B_{12}(\lambda)$ à gauche et à droite et par $B_{21}(\lambda)$ à gauche et à droite.

b. Montrer que pour toute matrice M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a ou b non nul, il existe $Q \in E_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

(on pourra distinguer les cas $a = 0$, $b = 0$ et a, b non nuls).

c. En déduire que pour toute matrice M de taille 2×2 avec une première ligne non nulle, il existe $P, Q \in E_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Au fait que vaut Δ ?

d. Montrer que pour toute matrice $M \in SL_2(\mathbb{R})$ il existe $P, Q \in E_2(\mathbb{R})$ telles que $PMQ = \mathrm{I}_2$. Pourquoi cela prouve-t-il que $M \in E_2(\mathbb{R})$.

e. À titre d'exemple, pour $a \in \mathbb{R}^*$ écrire la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ comme produit de $B_{ij}(\lambda)$.

4. Bon, il faut grandir maintenant et passer au cas n quelconque en considérant $M \in SL_n(\mathbb{R})$.

a. Commencer par montrer qu'il existe $P, Q \in E_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

avec $N \in SL_{n-1}(\mathbb{R})$.

b. En déduire que $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $P \in E_n(\mathbb{R})$ et une autre $Q \in E_n(\mathbb{R})$ telles que $M = P \times \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \Delta) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \Delta) \times Q$.

Correction :

1. On vérifie que $B_{ij}(\lambda)B_{ij}(\mu) = B_{ij}(\lambda + \mu)$ ce qui permet de dire que $B_{ij}(\lambda)^{-1} = B_{ij}(-\lambda)$.

2. La multiplication par $B_{ij}(\lambda)$ à droite revient à faire l'opération suivante sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j + \lambda_i C_i$. Quant à la multiplication à gauche, elle a pour effet l'opération sur les lignes suivante $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

3. Commençons petit en supposant $n = 2$.

a. Voici le dictionnaire :

$$\begin{array}{llll} B_{12}(\lambda) \times \bullet \iff L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 & & & \bullet \times B_{12}(\lambda) \iff C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1 \\ B_{21}(\lambda) \times \bullet \iff L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 & & & \bullet \times B_{21}(\lambda) \iff C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 \end{array}$$

Les traductions deviennent alors faciles.

b. On vérifie que :

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} B_{21}(\tfrac{1}{b})B_{12}(-b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B_{21}(\tfrac{1-a}{b})B_{12}(-b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} B_{12}(\tfrac{1}{a})B_{21}(1-a)B_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

c. L'étape précédente étant franchie, il suffit de tuer le coefficient c' ce qui se fait en multipliant à gauche par $B_{21}(-c')$. Évidemment en bas à droite, on retrouve le déterminant de M.

d. Si $M \in SL_2(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = 1$ donc...

e. Le mieux est d'opérer les transformations et de traduire ensuite :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{a}C_1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + (1-a)C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-a}{a} & 1/a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-a}{a} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1-a}{a}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-a}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_{21}(\tfrac{1-a}{a})B_{12}(1)B_{21}(a-1)B_{12}(\tfrac{-1}{a})$$

4. Considérons $M \in SL_n(\mathbb{R})$; on note $M = (a_{ij})$.

a. On commence par faire apparaître un 1 en position a_{11}. Si ce terme est nul il suffit de multiplier à droite par $B_{i1}(1/a_{1i})$ avec $a_{1i} \neq 0$ dont l'existence est assurée M étant inversible. Si $a_{11} \neq 0$ alors on s'aide d'un autre coefficient a_{1i} non nul si un tel élément existe : on multiplie à droite par $B_{i1}(\frac{1-a_{11}}{a_{1i}})$. Enfin, si tous les a_{1i} sont nuls pour $i \geqslant 2$, on procède en deux temps en multipliant toujours à droite par $B_{12}(\frac{1}{a_{11}})B_{21}(1-a_{11})$.

À l'issue de cette étape, on a $a_{11} = 1$. Il est alors aisé de tuer les coefficients a_{1i} et a_{j1}. Pour les premiers, il suffit de multiplier à droite par $B_{1i}(-a_{1i})$ et pour les seconds à gauche par $B_{j1}(-a_{j1})$.

b. On conclue par récurrence.

5. ok.

Exercice 5 : Déterminant de Gram et distance d'un point à un sous-espace

Le déterminant de Gram d'une famille $v_1, \dots, v_n$ de vecteurs d'un espace euclidien E de dimension finie est noté $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ et est défini par :

$$\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \det(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j})$$

1. Montrer que $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ est nul si et seulement si la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\{f_1, \dots, f_m\}$ une base (quelconque) de F. On décompose tout $v \in E$ sous la forme $v = v' + v''$ avec $v' \in F$ et $v'' \in F^\perp$. Montrer que :

$$\mathrm{Gram}(v, f_1, \dots, f_m) = \|v''\|^2 \, \mathrm{Gram}(f_1, \dots, f_m)$$

et en déduire que :

$$d(v, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(v, f_1, \dots, f_m)}{\mathrm{Gram}(f_1, \dots, f_m)}$$

où $d(v, F)$ désigne la distance de v à F.

Correction :

1. Si $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n) = 0$ alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n \rangle \end{pmatrix} = 0$$

Par conséquent, la combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n$ appartient au sous-espace $\mathrm{Vect}(v_i)$ et à son orthogonal $\mathrm{Vect}(v_i)^\perp$; cette combinaison linéaire est donc nulle ce qui montre que la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée. Réciproquement, si l'on dispose d'une combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n$ nulle et non triviale alors il existe i tel que $\lambda_i \neq 0$. Il suffit, pour conclure, d'opérer les deux combinaisons linéaires suivantes sur les colonnes de la matrice $(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j})$:

$$C_i \leftarrow \lambda_i C_i \qquad \text{puis} \qquad C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$$

La i-ème colonne de le nouvelle matrice est nulle ce qui force son déterminant à l'être aussi ; comme ce dernier n'est rien d'autre que $\lambda_i^n \, \mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n)$, on en déduit bien la nullité de $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n)$.

2. Par définition de v' et v'', on a $\langle v, v \rangle = \langle v', v' \rangle + \langle v'', v'' \rangle = \|v'\|^2 + \|v''\|^2$ et $\langle v, f_i \rangle = \langle v', f_i \rangle$ pour tout i. Dans la matrice définissant $\mathrm{Gram}(x, f_1, \dots, f_m)$ l'opération : $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_i \lambda_i C_{i+1}$ permet de remplacer le premier terme $\langle v, v \rangle$ par $\langle v'', v'' \rangle$ et de tuer tous les premiers termes des m dernières lignes. Il suffit alors pour conclure de développer par rapport à le première colonne.

Exercice 6 : Matrice compagnon et dualité

Soit K un corps ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si vous préférez), E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que (E, u) est un espace **monogène** c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$E = Kx \oplus Ku(x) \oplus \cdots \oplus Ku^{n-1}(x)$$

Autrement dit, la famille $\mathcal{B} = \{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ est une K-base de E.

1. Montrer l'existence de coefficents $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ tels que :

$$u^n(x) + a_{n-1}u^{n-1}(x) + \cdots + a_0 x = 0$$

2. À l'aide de ces coefficients, dresser la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

3. En déduire que le polynôme caractéristque de u n'est rien d'autre que :

$$(-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)$$

(indication : développer $\det(M - X\,\mathrm{Id})$ par rapport à la dernière colonne). En déduire que :

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

4. Considérons E^* l'espace dual de E ainsi que $v = {}^t u$ l'endomorphisme transposé de u. On va montrer que (E^*, v) est lui aussi un espace monogène ; notons, pour alléger, $e_i = u^{i-1}(x)$ et considérons $\{e_i^*\}_i$ la base duale de $\{e_i\}_i$. Vérifier que :

$$E^* = Ke_n^* \oplus Kv(e_n^*) \oplus \cdots \oplus Kv^{n-1}(e_n^*)$$

Conclure.

5. Dresser la matrice de v dans la base $\{e_n^*, v(e_n^*), \ldots, v^{n-1}(e_n^*)\}$. Que remarquez-vous ?

6. En déduire que la matrice M est semblable à sa transposée[1].

Correction :

1. Puisque $u \in \mathcal{L}(E)$, il en est de même de u^n par conséquent, $u^n(x) \in E$. La famille $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ étant une base de E, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que :

$$u^n(x) = \lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(x)$$

Posant $a_i = -\lambda_i$, on a bien :

$$u^n(x) + a_{n-1}u^{n-1}(x) + \cdots + a_0 x = 0$$

2. Par construction, on a :

$$M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

tous les coefficients n'apparaissant pas étant nuls.

3. Pour le calcul du polynôme caractéristique, suivre l'indication. La fin de la question découle du théorème de Caley-Hamilton.

[1] Plus généralement, on peut montrer que toute matrice (à coefficients dans un corps) est semblable à sa transposée.

4. Pour montrer que :

$$E^* = Ke_n^* \oplus Kv(e_n^*) \oplus \cdots \oplus Kv^{n-1}(e_n^*),$$

il suffit (par exemple) de vérifier que la famille $\{e_n^*, v(e_n^*), \ldots, v^{n-1}(e_n^*)\}$ est libre. Considérons une combinaisons linéaire nulle de cette famille :

$$\lambda_0 e_n^* + \lambda_1 v(e_n^*) + \cdots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e_n^*) = 0 \tag{1}$$

En particlier, en appliquant cette égalité en $e_1 = x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 e_n^*(x) + \lambda_1 v(e_n^*)(x) + \cdots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e_n^*)(x) &= \lambda_0 e_n^*(x) + \lambda_1 e_n^*(u(x)) + \cdots + \lambda_{n-1}(e_n^*)(u^{n-1}(x)) \\
&= \lambda_0 e_n^*(e_1) + \lambda_1 e_n^*(e_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(e_n^*)(e_n) \\
&= \lambda_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Le coefficient λ_{n-1} est donc nul. Tenant compte de ce fait et appliquant maintenant l'égalité (1) à $e_2 = u(x)$ cette fois, on montre que $\lambda_{n-2} = 0$. De proche en proche, on prouve que :

$$\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \cdots = \lambda_0 = 0$$

La famille $\{v^i(e_n^*)\}_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est donc une famille libre de E^* que l'on sait être de dimension n ; c'est donc une K-base de E. Autrement dit (E^*, v) est un espace monogène.

5. Pour dresser la matrice de v dans la base $\{e_n^*, v(e_n^*), \ldots, v^{n-1}(e_n^*)\}$, il reste à décomposer $v^n(e_n^*)$ sur cette base. Comme $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
v^n(e_n^*) &= e_n^* \circ u^n \\
&= e_n^* \circ (-a_{n-1}u^{n-1} - a_{n-2}u^{n-2} \cdots - a_1 u - a_0) \\
&= -a_{n-1} e_n^* \circ u^{n-1} - a_{n-2} e_n^* \circ u^{n-2} \cdots - a_1 e_n^* \circ u - a_0 e_n^* \\
&= -a_{n-1} v^{n-1}(e_n^*) - a_{n-2} v^{n-2}(e_n^*) \cdots - a_1 v(e_n^*) - a_0 e_n^*
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}(v, \{e_n^*, v(e_n^*), \ldots, v^{n-1}(e_n^*)\}) = M$$

6. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Mat}(v, \{e_n^*, v(e_n^*), \ldots, v^{n-1}(e_n^*)\}) = \mathrm{Mat}(u, \{e_i\})$$

Par ailleurs, on sait que :

$$\mathrm{Mat}(v, \{e_i^*\}) = {}^t\,\mathrm{Mat}(u, \{e_i\}) = {}^tM$$

Ainsi M et ${}^tM$ représentent le même endomorphisme v ; elles sont donc semblables.

Exercice 7 : Suites récurrentes linéaires

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes et on s'intéresse au sous-ensemble E de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \tag{2}$$

où $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On introduit de plus l'application φ définie par :

$$\begin{array}{cccc}
\varphi \; : & E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\
& (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1)
\end{array}$$

1. Commencer par vérifier :

a. que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$;

b. et que l'application φ est linéaire.

2. On cherche ici à déterminer la dimension (sur $\mathbb{C}$) de E ; procéder comme suit.

a. Vérifier que φ est surjective.

b. Étudier l'injectivité de φ.

c. En déduire la dimension de E (rappel : deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension).

3. Soit $r \in \mathbb{C}^*$; à quelle condition (sur r) la suite géométrique de raison r — c'est-à-dire la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ — appartient-elle à E.

4. On se place ici dans le cas où le polynôme $X^2 + aX + b$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

a. Montrer que les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

b. En déduire que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ unique tel que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

5. On se place pour finir dans le cas où le polynôme X^2+aX+b admet une racine double notée r.

a. Montrer que la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient alors à E.

b. Vérifier que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

c. En déduire la forme des éléments de E dans ce cas.

Correction :

1. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites vérifiant (2) et λ, μ deux complexes, il s'agit de vérifier que la suite $(w_n)_n = (\lambda u_n + \mu v_n)_n$ satisfait elle aussi la relation (2). Calculons donc :

$$\begin{aligned} w_{n+2} + aw_{n+1} + bw_n &= (\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) + a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n) + \mu(v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n) = 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ alors la suite définie par $u_0 = x$, $u_1 = y$ et pour $n \geqslant 2$, $u_n = -au_{n-1} - bu_{n-2}$ est un antécédent de (x, y) par φ. De plus, c'est le seul; autrement dit, les suites de E sont entièrement déterminées par leurs deux premiers termes. On a bien montré que φ est bijective, ce qui prouve que la dimension de E est égale à 2.

3. Pour que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à E il est nécessaire que :

$$r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^n(r^2 + ar + b) = 0$$

ce qui impose, r étant non nul, à r d'être racine du polynôme $X^2 + aX + b$. Cette condition est de plus suffisante.

4. D'après ce qui précède, les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

a. Elles sont de plus linéairement indépendantes : si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont tels que la suite $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit la suite nulle alors en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient les équations :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(r_1 - r_2) = 0$$

Comme $r_1 \neq r_2$, on en déduit que $\mu = 0$ d'où $\lambda = 0$. Les deux suites géométriques sont bien linéairement indépendantes.

b. Comme E est de dimension 2, la famille $\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de E ce qui montre pour chaque suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, l'existence et l'unicité de λ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (pour tout n).

5. Puisque r est une racine double de $X^2 + aX + b$, on sait que $r^2 + ar + b = 0$ et $2r + a = 0$.

a. Calculons :

$$(n + 2)r^{n+2} + a(n + 1)r^{n+1} + bnr^n = r^n \left[n(r^2 + ar + b) + r(2r + a)\right] = 0$$

d'où la conclusion.

b. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont tels que $(\lambda r^n + \mu n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle alors pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient $\lambda = 0$ et $\lambda r + \mu r = 0$ ce qui permet d'assurer la nullité de λ et μ (car $r \neq 0$). Encore une fois la famille est libre.

c. Dans ce cas, toutes les suites de E sont donc de la forme $(\lambda r^n + \mu n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 :

Un phare émet deux signaux lumineux l'un de couleur rouge à raison d'un signal tous les quarts d'heure, l'autre de couleur jaune toutes les 28 minutes. Un observateur remarque un signal rouge à 0h 02 et un jaune à 0h 08. Il se demande s'il est possible de voir les deux signaux en même temps et décide d'attendre jusqu'à ce qu'un tel phénomène se produise.

1. Son attente est-elle vaine ?

2. Si non, jusqu'à quelle heure devra-t-il patienter afin de voir les deux premiers signaux simultanément ?

Exercice 9 : Pauvre forme, elle est dégénérée

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 - z^2 + 2xy + 2yz$ et φ sa forme polaire.

1. Écrire q sous la forme de somme de carrés.

2. En déduire le rang, la signature de q, une base orthogonale pour φ et enfin N le noyau de φ (on rappelle que $N = \{v \in \mathbb{R}^3,\ (\forall w \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(v, w) = 0)\}$.

3. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

a. Déterminer $F^\perp$, c'est-à-dire $\{v \in \mathbb{R}^3,\ (\forall w \in F,\ \varphi(v, w) = 0)\}$.

b. Vérifier que $N \subset F^\perp$

c. Déterminer $F^{\perp\perp}$

d. Vérifier que $F^{\perp\perp} = N + F$. Ce genre de phénomène peut-il se produire dans un espace euclidien ?

Correction :

1. On a $q(x, y, z) = (x + y)^2 - (y - z)^2$.

2. La signature de q est donc $(1, 1)$, comme base orthogonale on peut choisir :

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

et N est engendré par le vecteur $(-1, 1, 1)$.

3. Soit F le sous-espace engendré par $(1, 1, 1)$ alors :

$$F^\perp = \{(x, y, z),\ x + y = 0\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

et :

$$F^{\perp\perp} = \{(x, y, z),\ y - z = 0\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = F + N$$