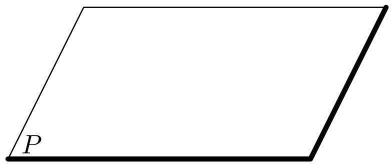
Géométrie dans l'espace en seconde

1 Généralités

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.
Un point désigne un endroit précis. On le représente par un point (.) ou une croix ($\times$), et on lui donne un nom. Mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "point", qui n'a pas d'étendue.
Une droite est un ensemble de points, qu'on représente par un "segment", et auquel on donne un nom. il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une représentation de l'objet théorique, "droite", qui n'a pas de largeur, et qui est illimité dans les deux sens.
Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan. Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans tous les sens.



Propriété 1 *Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.*

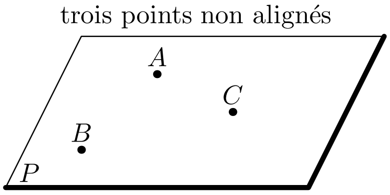
2 Axiomes d'incidence

Les axiomes d'incidences de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

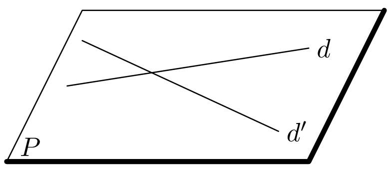
1. Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB).
2. Par trois points non alignés, A, B et C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC).
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

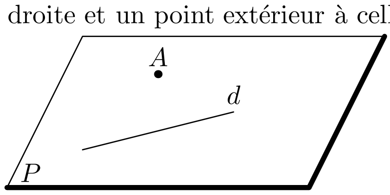
trois points non alignés



deux droites sécantes

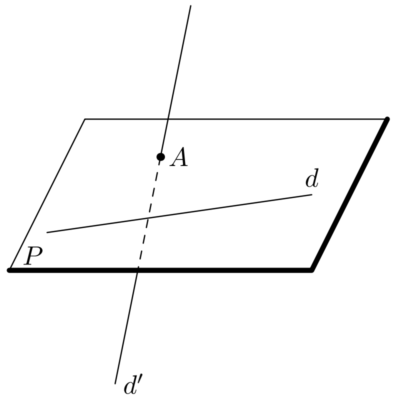


une droite et un point extérieur à celle-ci



3 Positions relatives de droites et plans

1. d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :
   (a) il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,



(b) il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).

2. d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

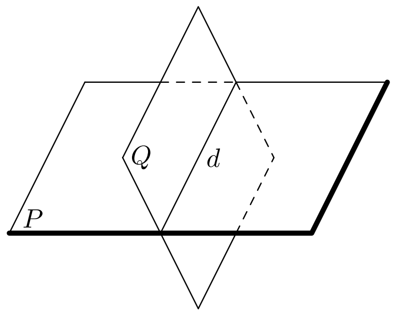
   (a) la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants (voir la figure précédente),

   (b) la droite est incluse dans le plan,

   (c) la droite et le plan n'ont aucun point commun.

3. P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

   (a) les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



   (b) les plans sont confondus,

   (c) ils n'ont aucun point commun.

4 Parallélisme dans l'espace

La liste des propriétés n'est pas exhaustive. . .certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

4.1 Définitions

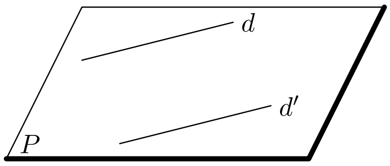
Définition 1

- *Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes. Il en est ainsi de deux droites confondues ou bien coplanaires et sans point commun.*
- *Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi de deux plans confondus ou sans point commun.*
- *Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne pas sécants. Il en est ainsi d'une droite incluse dans un plan ou d'une droite et d'un plan sans point commun.*

Remarques :

- Le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure, dans l'espace, qu'elles sont parallèles.

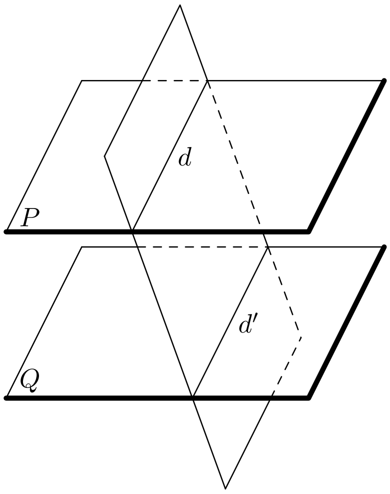
- Deux droites strictement parallèles définissent un plan.



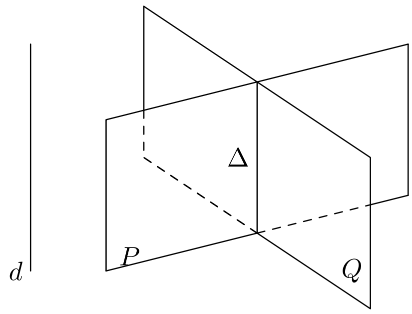
4.2 Parallélisme entre droites

Théorème 1 *Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.*

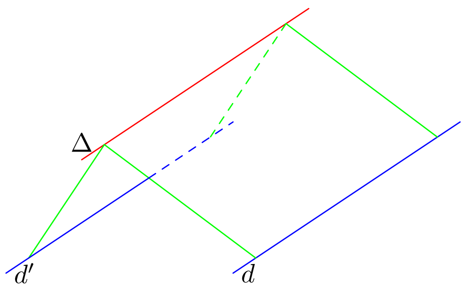
Théorème 2 *Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.*



Théorème 3 *Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.*



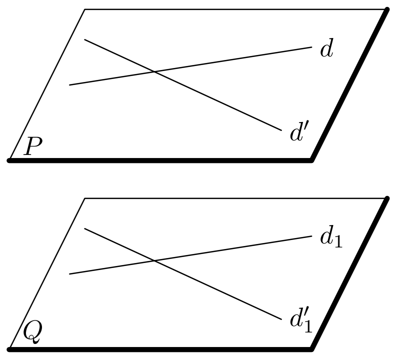
Théorème 4 *"Théorème du toit"*
d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'.
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.



4.3 Parallélisme entre plans

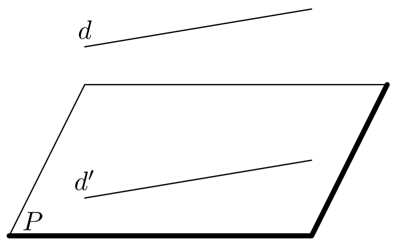
Théorème 5 *Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.*

Théorème 6 *Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.*



4.4 Parallélisme entre droite et plan

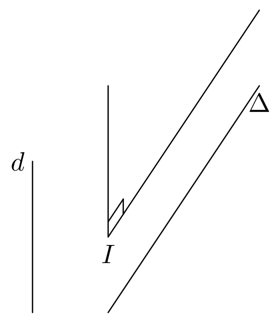
Théorème 7 *Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan P contennant la droite d'.*



5 Orthogonalité dans l'espace

5.1 Définitions

Définition 2 *Deux droites d et Δ (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites menées par un point I quelconque sont perpendiculaires. (Nous admettrons alors que les parallèles à d et Δ passant par n'importe quel autre point sont également perpendiculaires)*



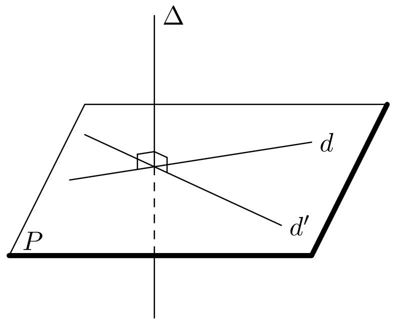
Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube alors $(AD) \perp (HG)$.
Remarques :

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires, elles ne le sont que si elles sont coplanaires. En revanche la réciproque est vraie par définition de droites orthogonales.
- Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles. (facile à voir dans un cube)

Définition 3 *Une droite d est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

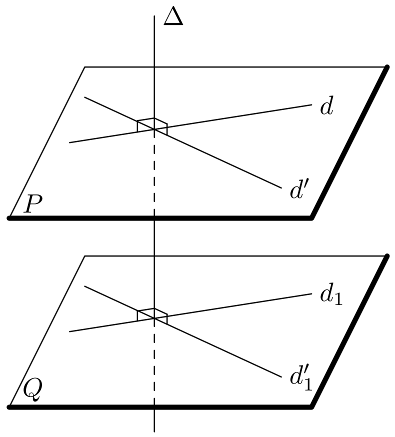
5.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Théorème 8 *Pour qu'une droite Δ soit orthogonale à un plan P il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de P.*



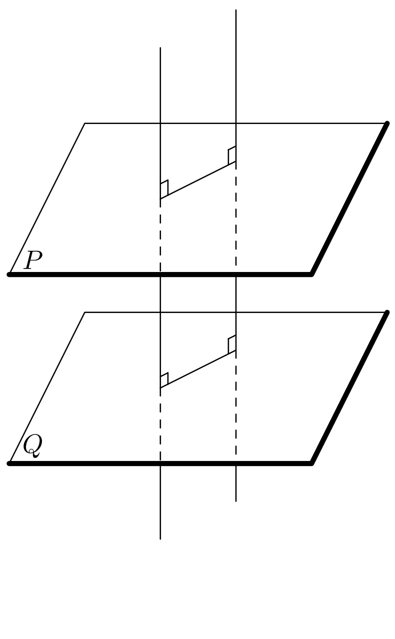
Théorème 9

- *Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.*
- *Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.*



Théorème 10

- *Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.*
- *Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.*

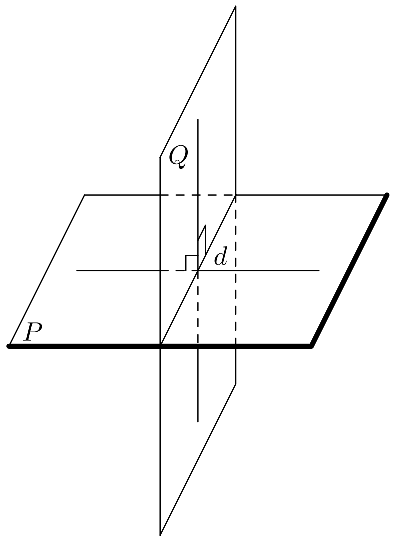


5.3 Orthogonalité de deux droites de l'espace

Théorème 11 *Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.*

5.4 Plans perpendiculaires

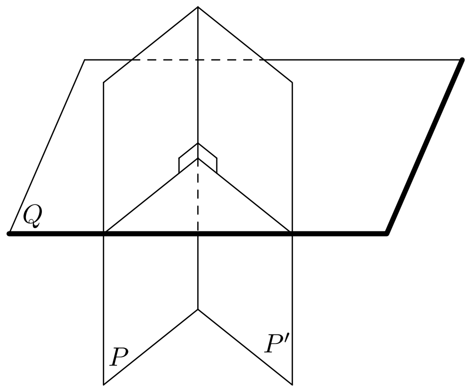
Définition 4 *Un plan Q est perpendiculaire à un plan P ($Q \perp P$), si il existe une droite de Q orthogonale à P. (Dans ce cas on a aussi $P \perp Q$).*



Remarques :

- l'exemple qu'il faut avoir en tête est celui d'un cube : deux faces quelconques non parallèles sont perpendiculaires.
- Si $P \perp Q$ alors toute droite de l'un n'est pas orthogonale à l'autre, c'est vrai pour l'une d'entre elles.(Dans un cube $ABCDEFGH$ les faces $ABFE$ et $ABCD$ sont perpendiculaires mais la droite (AF) n'est pas orthogonale à la face $ABCD$ car elle n'est pas orthogonale à (AB))
- Si $P \perp Q$ et $P' \perp Q$ alors P et P' ne sont pas nécessairement parallèles (facile à voir dans un cube avec les faces). Cette relation de perpendicularité de plans est donc moins souple que celle de perpendicularité de droites.

Théorème 12 *Si P et P', deux plans sécants, sont perpendiculaires à un même plan Q, alors leur intersection est orthogonale à Q.*



Théorème 13 *Si $P \perp Q$, toute droite de l'un, qui est orthogonale à leur intersection, est orthogonale à l'autre. (voir la figure de la définition précédente)*

6 Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur (sens, direction, longueur) vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace. Les notions suivantes aussi :

1. Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un point A et un seul tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.
2. Égalité de deux vecteurs à l'aide de la définition (sens, direction, longueur) ou caractérisation à l'aide d'un parallélogramme.
3. Les règles de calculs (Relation de Chasles, règle du parallèlogramme, multiplication d'un vecteur par un réel)
4. La colinéarité de deux vecteurs et son application au parallélisme ou bien à l'alignement de trois points.