ANNALES DE MATHÉMATIQUES SERIE S
CENTRES ÉTRANGERS 2000
ÉNONCE

EXERCICE 1 (4 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

Dans la question 1) on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :
   A : « Les trois boules sont rouges »
   B : « Les trois boules sont de la même couleur »
   C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente »
   (a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.
   (b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.
2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est à dire n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :
   D : « Tirer deux boules rouges »
   E : « Tirer deux boules de la même couleur »
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est
   $$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$
   (b) Calculer la probabilité de l'événement E, $p(E)$ en fonction de n.
   Pour quelles valeurs de n a-t-on
   $$p(E) \geqslant \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives i et $(-i)$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $(-i)$ associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+iz}{z+i}$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?
2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?
3. Montrer que l'équation
   $$\frac{1+iz}{z+i} = z$$
   admet deux solutions que l'on déterminera.
4. Vérifier que
   $$z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$$
   En déduire
   $$OM' = \frac{AM}{BM}$$
   et
   $$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situés sur un même cercle (C) que l'on précisera.
6. Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B. Montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

EXERCICE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.
Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnés x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.

Les coordonnées (x', y') de M' sont alors :

$$x' = 3x + 2 \quad \text{et} \quad y' = 3y - 1.$$

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises par respectivement x' et y'.
Écrire la liste complète des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité.

On se propose de déterminer tous les couples (x', y') de $G \times H$ tels que $m = {x'}^2 - {y'}^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que si ${x'}^2 - {y'}^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est un multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x', y') qui conviennent.

En déduire les couples (x, y) correspondants aux couples (x', y') trouvés.

PROBLÈME (11 points)

I) Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = e^t - t - 1$$

Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$?

2. En déduire les inégalités suivantes :

(a) Pour tout réel t :

$$e^t \geqslant t + 1$$

$$e^t > t$$

et

$$-te^t > -1$$

(b) Pour tout réel $t > -1$:

$$\ln(1 + t) \leqslant t$$

3. En déduire que pour tout réel x :

$$\ln\left(1 - xe^{-x}\right) \leqslant -xe^{-x}$$

II) Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2\ln\left(e^x - x\right)$$

1. Montrer que

$$f(x) = x^2 - 2x - 2\ln\left(1 - xe^{-x}\right)$$

   Quelle est la limite de f en $+\infty$?
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x}$$

   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. Dans un repère orthonormal (unité 3 cm), on considère la parabole (P) d'équation

$$y = x^2 - 2x$$

   et (C) la courbe représentative de la fonction f. Montrer que (C) et (P) sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (P).

4. Donner une équation de chacune des tangentes D et D' respectivement aux courbes (P) et (C) au point d'abscisse 0.
5. Tracer dans un même repère les courbes (C) et (P) et leurs tangentes D et D'.

III) Étude d'une intégrale

1. Soit n un entier naturel. On pose :

$$u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$$

   (a) Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
   (b) Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, la parabole (P) et la courbe (C) est définie par

$$I_n = -2\int_0^n \ln\left(1 - xe^{x}\right)dx$$

   (a) Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que

$$I_n \geqslant 2u_n$$

   (b) On admet que la suite (I_n) a pour limite l. Montrer que $l \geqslant 2$.