Introduction aux polynômes

Jean-Michel Sarlat

8 février 2001

Les nombres à la base

On désigne par $\mathbf{K}$ l'un des ensembles $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. $\mathbf{K}$ est muni de deux lois de compositions internes : $+$ et $\times$; la richesse de leurs propriétés lui confère une structure de **corps commutatif** :

- $(\mathbf{K}, +)$ est un **groupe commutatif**, ceci est la conséquence du fait que
  - $+$ est associative.
  - $+$ est commutative.
  - $+$ admet un élément neutre : 0.
  - Tout élément x de $\mathbf{K}$ admet un symétrique : $-x$.
- $(\mathbf{K}^*, \times)$ est un groupe commutatif (Rappel : $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{K}$ qui ont un inverse).
- $\times$ est distributive à gauche et à droite par rapport à $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{K},\ x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ et } (y + z) \times x = y \times x + z \times x$$

Les nombres à la base (suite)

1/ Dans la pratique et lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on omet le signe $\times$.

2/ $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ ne sont pas les seuls ensembles ayant une structure de corps (ie. qui vérifient les propriétés énumérées ci-dessus), on vérifie sans peine que c'est aussi le cas pour $\mathbf{Q}$ mais que cela est faux pour $\mathbf{Z}$. On rencontrera dans la suite immédiate du cours sur les polynômes, un corps bien particulier qui entretient avec l'ensemble des polynômes le même rapport que $\mathbf{Q}$ avec $\mathbf{Z}$.

Les suites nulles à partir d'un certain rang

On note $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ une suite (infinie) d'éléments de $\mathbf{K}$ nuls à partir d'un certain rang. n désigne un entier naturel tel que au delà du rang n tous les termes sont nuls, ce qui ne signifie d'ailleurs pas que les termes a_i ($i = 0 \ldots n$) sont tous non nuls.

Exemples : $(0, 1, -1, 0, 2, 0, 0, 0, \ldots)$, $(\pi, e, \sqrt{2}, 0, \ldots)$ etc...

Dans le but d'alléger les écritures, une telle suite sera notée $A = \{(a_i)_{i \in \mathbf{N}}, n\}$[1]. On définit alors trois lois de composition dans l'ensemble de ces suites.

[1] où il faut comprendre que si $i \geqslant n$ alors $a_i = 0$

Addition

$$A+B=\{(a_i)_{i\in\mathbf{N}},n\}+\{(b_i)_{i\in\mathbf{N}},m\}\stackrel{\text{def}}{=}\{(a_i+b_i)_{i\in\mathbf{N}},\mathrm{Sup}\{n,m\}\}$$

La quantité $\mathrm{Sup}\{n,m\}$ apparaît ci-dessus puisque si i est supérieur au plus grand des deux nombres n et m alors $a_i+b_i=0$, la suite ainsi définie est bien nulle à partir d'un certain rang.

Multiplication par un scalaire

$$\lambda.A = \lambda.\{(a_i)_{i\in\mathbf{N}}, n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\lambda a_i)_{i\in\mathbf{N}}, n\}$$

λ désigne ici un élément de $\mathbf{K}$, c'est un **scalaire** (c'est l'autre mot pour désigner un nombre qui, comme ici, intervient dans une multiplication externe).

Produit

$$A \times B = \{(a_i)_{i\in\mathbf{N}}, n\} \times \{(b_i)_{i\in\mathbf{N}}, m\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left((\sum_{k=0}^{k=i} a_k b_{i-k} \right)_{i\in\mathbf{N}}, n+m \right\}$$

Si on y regarde de près, dès que $i > n+m$ la quantité $\sum_{k=0}^{k=i} a_k b_{i-k}$ est nulle puisque tous ses termes sont nuls (l'un des facteurs est *nécessairement nul*).

Suites particulières

Il y a deux suites particulières qui sont :

$$0 \overset{\text{def}}{=} (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$1 \overset{\text{def}}{=} (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

ce sont respectivement les éléments neutres pour l'addition et le produit.
On observe que l'application $\varphi : \lambda \longmapsto \lambda.1 = (\lambda, 0, \ldots)$ possède les propriétés suivantes :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K},\ \varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu) \text{ et } \varphi(\lambda \times \mu) = \varphi(\lambda) \times \varphi(\mu)$$

L'application φ est injective, c'est un **morphisme** qui permet d'identifier le scalaire λ et la suite $(\lambda, 0, \ldots)$.

L'indéterminée

Parmi les suites qui ne peuvent pas être identifiées à un scalaire, il en est une particulière que l'on note X, que l'on nomme **l'indéterminée** et qui est telle que :

$$X = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$

On vérifie alors :

$$X^2 \stackrel{\text{def}}{=} X \times X = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$X^3 \stackrel{\text{def}}{=} X \times X^2 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$$

et ainsi de suite ...
Pour être complet, en hommage à une telle régularité, on pose $X^0 \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0, 0, \ldots) = 1$.
Ainsi, la suite $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) = \{(a_i)_{i \in \mathbf{N}}, n\}$ peut s'écrire :

$$A = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$$

L'indéterminée (suite)

Vous remarquerez que j'ai procédé à l'identification de $(a_0, 0, \ldots) = a_0.1$ avec a_0.

Et voilà donc les polynômes tels qu'on les connaît ? Ce n'est pas sûr, l'indéterminée ne représente pas un nombre, elle est même définie comme un objet qui, dans le contexte de cette étude, est tout sauf un scalaire ! En fait X peut être considérée comme un objet extérieur à un ensemble (ici $\mathbf{K}$) qu'on lui adjoint de façon à constituer un ensemble plus vaste (une **extension**) où les lois de compositions connues à la base se généralisent.

Puisque les scalaires et l'indéterminée suffisent pour écrire les suites nulles à partir d'un certain rang, on note $\mathbf{K}[X]$ leur ensemble[2], on les nomme **polynômes** et on dit qu'ils sont à coefficients dans $\mathbf{K}$.

---

[2]Peut-être certains d'entre-vous se demandaient-ils pourquoi on tardait à nommer cet ensemble, qu'ils soit récompensés d'avoir été patients !

TEST

Pour vérifier que ce qui précède vous éclaire sur des pratiques antérieures et pour en dégager l'aspect **formel**, donner un sens aux écritures : $\mathbf{R}[i]$, $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbf{C}[x \mapsto x]$.

L'anneau des polynômes

On montre que l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ muni des deux lois de composition internes : $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau[3] :

- $(\mathbf{K}[X], +)$ est un groupe commutatif
- $\times$ est associative et commutative.
- $\times$ possède un élément neutre : 1
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

$\mathbf{K}[X]$ n'est pas un corps : tous les polynômes non nuls n'ont pas nécessairement un inverse.

[3] En réalité quand on considère la troisième loi (externe), la structure de $\mathbf{K}[X]$ est plus riche, mais ceci correspond à un cours à venir.

Les caractéristiques d'un polynôme

La notation générale d'un polynôme est $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Les nombres a_k sont les **coefficients** de P, ce sont des éléments de $\mathbf{K}$ et ils sont nuls à partir d'un certain rang.

- Un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients.
- Le **degré** du polynôme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ (noté $\deg P$) est, si le polynôme est non nul, le plus grand indice n tel que $a_n \neq 0$, sinon il est égal à $-\infty$ (convention).
- La **valuation** du polynôme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ (notée $\operatorname{val} P$) est, si le polynôme est non nul, le plus petit indice m tel que $a_m \neq 0$, sinon elle est égale à $+\infty$ (convention).

Les caractéristiques d'un polynôme (suite)

- Le **coefficient dominant** d'un polynôme non nul est le coefficient dont l'indice est égal au degré du polynôme.
- Un polynôme est **unitaire** ou **normalisé** si, et seulement si son coefficient dominant est égal à 1.

Le degré et la valuation vérifient les propriétés suivantes pour tous polynômes P et Q :

$$\deg(P+Q) \leqslant \mathrm{Sup}\{\deg P, \deg Q\}$$

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$
$$\deg(\lambda.P) = \deg P \text{ si } \lambda \neq 0$$
$$\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \mathrm{Inf}\{\mathrm{val}\, P, \mathrm{val}\, Q\}$$
$$\mathrm{val}(P \times Q) = \mathrm{val}\, P + \mathrm{val}\, Q$$
$$\mathrm{val}(\lambda.P) = \mathrm{val}\, P \text{ si } \lambda \neq 0$$

Exemple

$P = -X^3 + X^2 + 2X^5 + X^4$. P est non nul, son degré est 5, sa valuation 2 et son coefficient dominant est 2.

Pour éviter toute erreur de lecture on développe un polynôme suivant les puissances croissantes ou les puissances décroissantes.

La suite du cours

Elle va se développer suivant le plan suivant :

1/ Divisibilité

2/ Fonction polynôme

3/ Polynôme dérivé

4/ Formule de Taylor

5/ Zéros d'un polynôme

6/ Polynômes scindés

7/ Relations entre racines et coefficients