Les coniques

Jean-Michel Sarlat
Lycée Louis Armand – POITIERS
25 mai 2001

Table des matières

Définition par foyer et directrice

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point non situé sur $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif. L'ensemble $\mathcal{C}_e$ des points M tels que :

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est la **conique** d'**excentricité** e, de **foyer** F et de **directrice** $\mathcal{D}$.

La perpendiculaire Δ à $\mathcal{D}$ passant par F est, de façon immédiate, un axe de symétrie de $\mathcal{C}_e$, c'est l'**axe focal** de la conique.

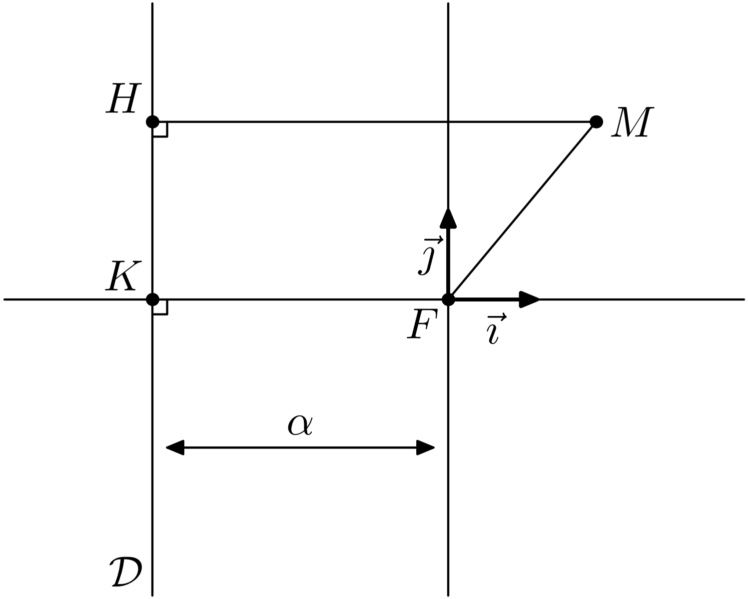


FIGURE 1 – Éléments d'une conique

L'équation cartésienne de $\mathcal{C}_e$ dans le repère orthonormé $(F, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est :

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 - 2e^2\alpha X - e^2\alpha^2 = 0$$

Son équation polaire suivant l'axe $(F, \overrightarrow{\imath})$ se met sous la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha e}(1 - e\cos\theta)$$

Dans ces deux équations α représente la distance du foyer F à la directrice $\mathcal{D}$ (i.e. $\alpha = KF$).

Parabole

Dans le cas particulier où l'excentricité e est égale à 1, la conique est une **parabole**. Un point se distingue de tous les autres, c'est le point S : **sommet** de la parabole, il est situé au milieu de $[KF]$. Comme autres points particuliers, on note M_1 et M_2 les intersections de la parabole avec la parallèle à la directrice passant par F.

La longueur p telle que :

$$M_1M_2 = 2KF = 2p$$

est le **paramètre** de la parabole, c'est le coefficient α du paragraphe précédent. Dans le repère orthonormé $(S, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, l'équation cartésienne de la parabole est :

$$Y^2 = 2pX$$

Un paramètrage admissible est alors : $X = \dfrac{1}{2p}t^2,\ Y = t$.

Retour
Fermer

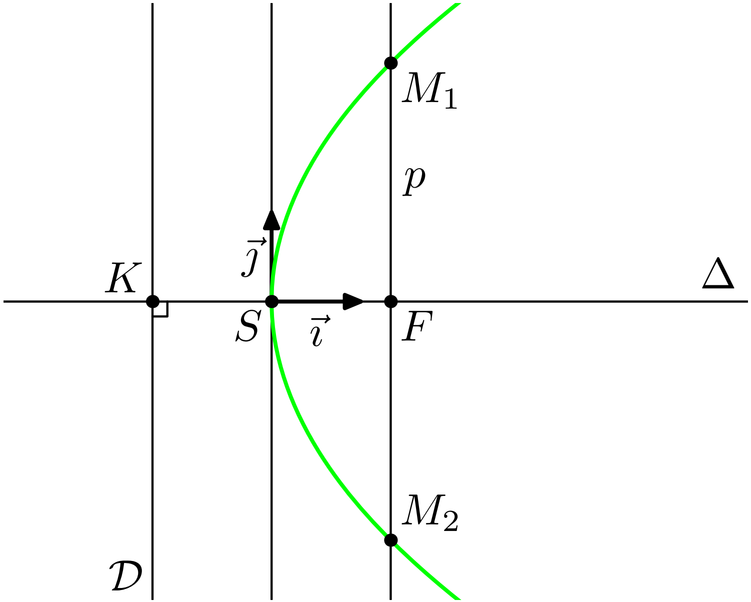


FIGURE 2 – Parabole

Coniques à centre

On suppose maintenant $e \neq 1$. L'abscisse, dans $(F, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, des points d'intersection de $\mathcal{C}_e$ avec Δ vérifie :

$$X^2 = e^2(X+\alpha)^2 \iff ((1-e)X - \alpha e)((1+e)X + \alpha e) = 0$$

Il y à donc deux points d'intersections, d'abscisses $X_1 = \dfrac{\alpha e}{1-e}$ et $X_2 = -\dfrac{\alpha e}{1+e}$; ce sont les **sommets** de la conique. L'équation de $\mathcal{C}_e$ peut s'écrire :

$$Y^2 + (1-e^2)(X-X_1)(X-X_2) = 0$$

En conséquence :

– $\mathcal{C}_e$ est symétrique par rapport au point O de Δ d'abscisse

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \frac{\alpha e^2}{1 - e^2}$$

– $\mathcal{C}_e$ est symétrique par rapport à la droite δ perpendiculaire à Δ en O

On dit alors que O est le **centre** et δ l'**axe non focal** de la conique. La conique est une **conique à centre**, elle possède donc de façon immédiate deux couples *foyer-directrice*.

Ellipse

Une conique à centre dont l'excentricité e est inférieure à 1 est une **ellipse**.
On note A et A' les sommets, la grandeur a telle que :

$$OA = OA' = a$$

est le **demi-grand axe**. Les intersections de l'ellipse avec l'axe non focal sont B et B' (sommets secondaires de l'ellipse), la grandeur b telle que :

$$OB = OB' = b$$

est le **demi-petit axe**. On complète ces notations en posant :

$$OF = OF' = c$$

La grandeur c ne possède pas de nom particulier, en fait elle se déduit de a et b, on la retrouve dans les relations suivantes qui sont *fondamentales* pour caractériser une ellipse et *placer* ses éléments :

Retour
Fermer

$$\boxed{c = ae \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad a^2 = b^2 + c^2}$$

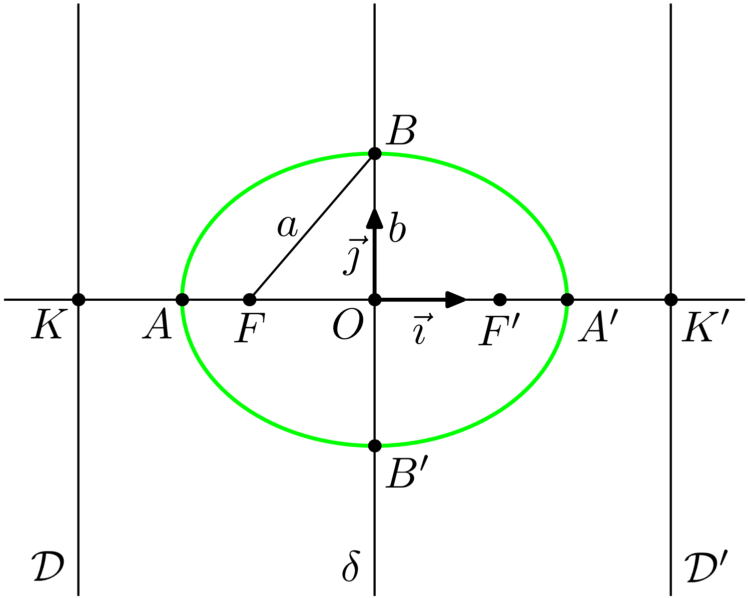


FIGURE 3 – Ellipse

On note par ailleurs que la distance du centre aux directrices est égale à

$$OK = OK' = \frac{a}{e}$$

Rapportée à ses axes (repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation d'une ellipse est :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \textit{ (équation réduite)}$$

elle admet le paramètrage :

$$X = a\cos t, \; Y = b\sin t$$

et la définition **bifocale** :

$$\mathcal{C}_e = \{M, \; MF + MF' = 2a\}$$

Hyperbole

Une conique à centre dont l'excentricité e est supérieure à 1 est une **hyperbole**.

Contrairement à l'ellipse, l'hyperbole ne rencontre pas l'axe δ, elle ne possède que deux sommets : A et A'. On note a et c les grandeurs telles que :

$$\begin{aligned} OA = OA' = a \\ OF = OF' = c \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a encore :

$$OK = OK' = \frac{a}{e}$$

les relations fondamentales étant :

$$\boxed{c = ae \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad c^2 = a^2 + b^2}$$

Rapportée à ses axes (repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, l'équation d'une hyperbole est :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \textit{ (équation réduite)}$$

ses asymptotes ont pour équation :

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0 \text{ et } \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0 \quad \left(\text{facteurs de } \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0\right)$$

Si les asymptotes sont perpendiculaires ($e = \sqrt{2}$, $a = b$) l'hyperbole est **équilatère**.
Par ailleurs une hyperbole admet les paramètrages :

$$\left(X = \frac{a}{\cos t}, Y = b \tan t\right) \text{ ou } (X = \pm a \operatorname{ch} t, Y = b \operatorname{sh} t)$$

et la définition **bifocale** :

$$\mathcal{C}_e = \{M, |MF - MF'| = 2a\}$$

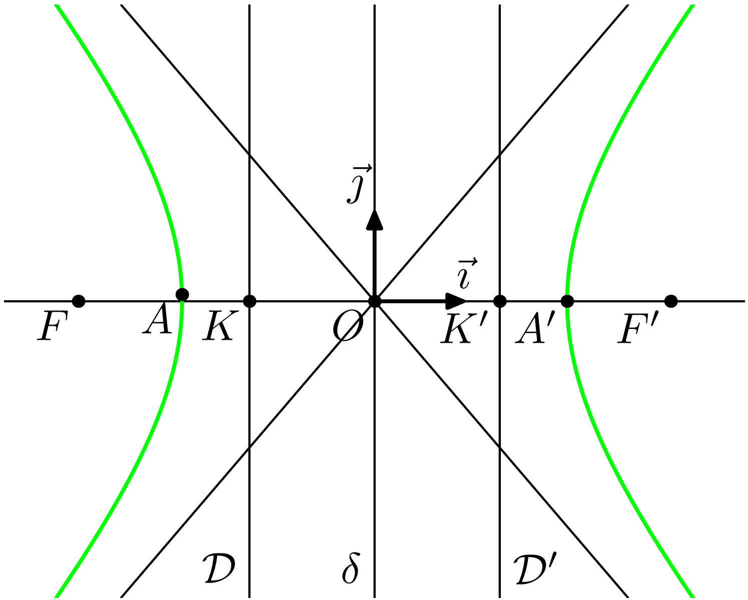


FIGURE 4 – Hyperbole

Cercle

Le cercle n'apparaît pas dans la classification précédente, il n'admet pas de définition par foyer-directrice, ni de définition bifocale. Il représente un cas particulier de l'ellipse, lorsque $a = b$, c'est à dire lorsque $e = 0$. En examinant de près les éléments de l'ellipse on peut présenter le cercle comme étant une ellipse dont les directrices sont repoussées à l'infini alors que les foyers se confondent avec le centre. Dans la suite on considère que le cercle est une conique, en fait si on revient à la définition initiale des coniques (*c.f.* section compléments), le cercle ne se présente pas comme une exception.

Courbes du second degré

$\mathcal{P}$: plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition *Une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est du* **second degré** *si, et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme :*

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + ax + by + c = 0$$

où α, β, γ, a, b et c sont des réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

On montre que les courbes du second degré sont, soit des coniques, soit des réunions de points ou de droites ou soit ... le vide !

On classe les courbes du second degré de la façon suivante :

1. Si $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, $\mathcal{C}$ est du *genre hyperbole*,
2. Si $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, $\mathcal{C}$ est du *genre parabole*,
3. Si $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, $\mathcal{C}$ est du *genre ellipse*.

Soit λ et μ les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, c'est à dire les racines du polynôme *caractéristique* : $X^2 - (\alpha+\gamma)X + (\alpha\gamma - \beta^2)$. Il est facile de vérifier que λ et μ existent et sont réels.

■ Cas $\lambda = \mu$.
Ce cas correspond à $\alpha = \gamma$ et $\beta = 0$, l'équation de $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme :

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

On se retrouve donc en terrain connu : $\mathcal{C}$ est un cercle si $4c' < a'^2 + b'^2$, réduit à un point si $4c' = a'^2 + b'^2$ et vide si $4c' > a'^2 + b'^2$!

■ Cas $\lambda \neq \mu$.
Soient $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ des vecteurs propres normés associés à λ et μ, ils sont orthogonaux. Dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ la courbe $\mathcal{C}$ possède une équation de la forme :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + 2uX + 2vY + w = 0$$

☞ $\boxed{\beta^2 - \alpha\gamma > 0}$ λ et μ sont non nuls et de signes contraires, on suppose $\lambda > 0$. Soit $\Omega(-\frac{u}{\lambda}, -\frac{v}{\mu})$ dans $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Dans $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, l'équation de $\mathcal{C}$ est :

$$\lambda X'^2 + \mu Y'^2 + h = 0$$

– Si $h = 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion des deux droites dont les équations sont :

$$\sqrt{\lambda}X' + \sqrt{-\mu}Y' = 0 \text{ et } \sqrt{\lambda}X' - \sqrt{-\mu}Y' = 0$$

La courbe est dite hyperbole dégénérée en deux droites.

– Si $h \neq 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole dont on peut obtenir aisément l'équation réduite en tenant compte du signe de h (il y à deux orientations possibles pour l'axe focal).

☞ $\boxed{\beta^2 - \alpha\gamma = 0}$ λ ou μ est nul, on suppose $\lambda = 0$.

- Si $u = 0$, l'équation de $\mathcal{C}$ devient $\mu Y^2 + 2vY + w = 0$; $\mathcal{C}$ est soit la réunion de deux droites parallèles ($v^2 - w > 0$), soit une droite ($w = v^2$), soit le vide ($v^2 - w < 0$).
- Si $u \neq 0$, $\mathcal{C}$ est une parabole.

☞ $\boxed{\beta^2 - \alpha\gamma < 0}$ λ et μ sont de même signe. On suppose $\lambda, \mu > 0$.

Soit $\Omega(-\frac{u}{\lambda}, -\frac{v}{\mu})$ dans $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Dans $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, l'équation de $\mathcal{C}$ est :

$$\lambda X'^2 + \mu Y'^2 + h = 0$$

- Si $h > 0$, $\mathcal{C}$ est vide (ellipse imaginaire).
- Si $h = 0$, $\mathcal{C}$ est réduite à un point (Ω).
- Si $h < 0$, $\mathcal{C}$ est l'ellipse dont l'équation réduite est :

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{-\frac{h}{\lambda}})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{-\frac{h}{\mu}})^2} = 1$$

NOTE IMPORTANTE. Toute l'activité qui, en partant de l'équation d'une courbe du second degré, à l'aide de changement de repère et de réécritures d'équations permet l'identification de la courbe porte le nom de **réduction**. Aucune formule n'est à retenir avec l'intention de donner directement la nature de la courbe, il faut effectuer complètement la réduction dans chaque cas d'étude.

Exemple traité. Soit à reconnaître la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$xy + 3x + 5y - 4 = 0$$

On a : $1^2 - 0 \times 0 = 1 > 0$ donc la courbe est du genre hyperbole. les racines de $X^2 - \frac{1}{4}$ sont $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Les vecteurs associés à ces valeurs sont :

$$\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{I} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\jmath}$$

Les formules de changement de repère de $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ à $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ sont :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \text{ et } y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$$

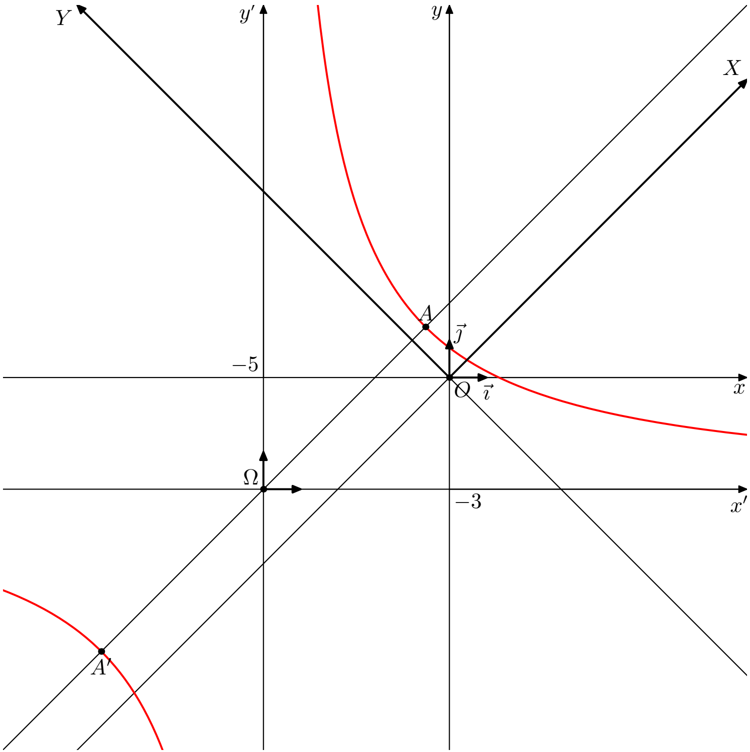
Dans le nouveau repère, $\mathcal{C}$ à pour équation :

$$(1) \qquad X^2 - Y^2 + 8\sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y - 8 = 0$$

Soit $x' = X + 4\sqrt{2}$ et $y' = Y - \sqrt{2}$, alors

$$\begin{aligned} (1) \quad &\iff \quad x'^2 - y'^2 - 38 = 0 \\ &\iff \quad \frac{x'^2}{38} - \frac{y'^2}{38} = 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ est l'hyperbole de centre $\Omega(-4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, d'axe focal $(O, \overrightarrow{I})$.



Y
y'
y
X
A
$\vec{j}$
-5
O
$\vec{\imath}$
x
Ω
-3
x'
A'

Compléments

Sections coniques

Une **section conique** ou une conique est la section d'un cône de révolution par un plan. Les coniques constituent une famille de courbes qui contient les cercles, les ellipses, les paraboles et les hyperboles.

L'étude des coniques comme figures de l'espace a été entreprise par les grecs (en particulier APOLLONIUS), elle a été renouvelée à la Renaissance par LA HIRE qui les a présentées comme des figures du plan sans référence à l'espace (présentation actuelle).

Équation polaire

L'équation polaire d'une conique dont le pôle coincide avec l'un des foyers est :

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}$$

où e est l'excentricité de la conique, p la distance du foyer à la directrice et θ_0 l'angle polaire de l'axe focal.

Exemples. La courbe d'équation $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$ est un parabole, celle d'équation $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ est une hyperbole (mais on obtient une seule branche).

Équation des tangentes

L'équation de la tangente au point (x_0, y_0) des différentes coniques rapportées à leur repère propre se retrouve à l'aide de la *règle du dédoublement* :

– Parabole $2px = y^2$, tangente : $p(x + x_0) = yy_0$

– Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tangente : $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$

– Hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tangente : $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1.$

Exemple. La tangente à l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ à pour équation : $x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1.$

Cette règle du dédoublement (substitutions : $X^2 \leftarrow XX_0$ et $2X \leftarrow X + X_0$) s'applique aux courbes du second degré en général (à démontrer !).