TES Baccalauréat juin 1998

Exercice 1 (4 points)

Pour se rendre au lycée, Frédéric a le choix entre deux itinéraires A ou B. La probabilité qu'il choisisse l'itinéraire A est $\frac{1}{3}$.

La probabilité qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire A est $\frac{2}{5}$; celle qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire B est $\frac{3}{10}$.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1) a) Quelle est la probabilité que Frédéric choisisse l'itinéraire B ?

b) Sachant qu'il choisit l'itinéraire A, quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?

2) Quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure au lycée et qu'il ait choisi l'itinéraire A ?

3) Quelle est la probabilité que Frédéric arrive à l'heure au lycée ?

4) Sachant que Frédéric est arrivé à l'heure au lycée, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire B ?

Exercice 2 (5 points)
(obligatoire)

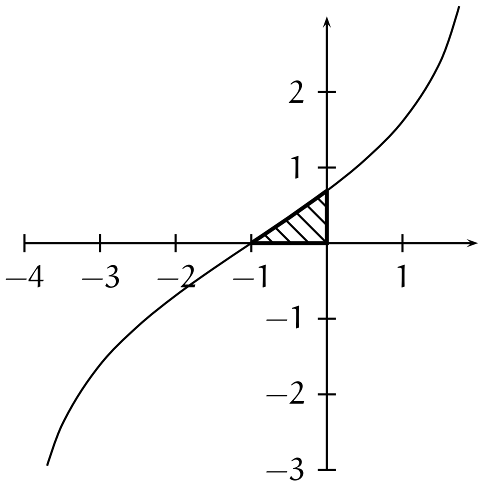
1) Une fonction g est définie sur l'intervalle]- 4 ; 2[par : $g(x) = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-2}$, où a et b désignent deux nombres réels.

Sa courbe représentative dans un repère donné passe par A $\left(0\ ;\ \frac{3}{4}\right)$ et admet au point d'abscisse - 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Déterminer les réels a et b.

2) On considère la fonction f définie sur]- 4 ; 2[par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{2-x}\right)$.

Elle est représentée ci-dessous dans un repère orthonormal :



a) Montrer que pour tout x de l'intervalle]- 4 ; 2[, l'égalité suivante est vraie $f'(x) = g(x)$.
b) On considère la fonction F définie sur]- 4 ; 2[par :

$$F(x) = (x+4)\ln(x+4) - (x-2)\ln(2-x).$$

Calculer $F'(x)$.
c) En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur la figure.

Exercice 2 (5 points)
(spécialité)
En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants.
Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5 % par an. Par ailleurs, on constate une augmentation supplémentaire de 450 000 habitants par an, due à l'immigration.
L'unité est le million d'habitants.
On note $u_0 = 50$ le nombre d'habitants en 1990 (exprimé en millions d'habitants), et u_n le nombre d'habitants en (1990 + n).

1) a) Calculer u_1 et u_2
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2) On se propose de prévoir directement la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon.
Pour cela on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 30$.
a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
En déduire alors la population de ce pays en l'an 2010. On donnera le résultat arrondi au million d'habitants.

3) Déterminer par le calcul en quelle année la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit ainsi.

Problème (11 points)

Partie A

1) On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{2} \quad g(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e}$$

Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur $[0\,;1]$.

2) Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $h(x) = x - g(x)$.
Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ sur $[0\,;1]$.

3) On considère un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 10 cm sur chaque axe.
On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

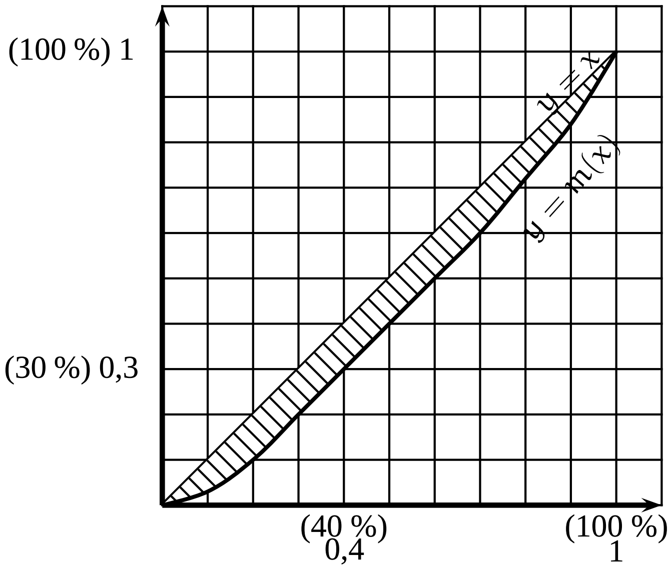
x	0	$0,2$	$0,5$	$0,7$	1
$f(x)$					
$g(x)$					

On donnera les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.
b) Représenter dans le repère donné, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et tracer la droite d'équation $y = x$.

4) Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de g. En donner une valeur décimale approchée à 0,01 près.

Partie B

La courbe ci-dessous, appelée **courbe de Lorentz**, représente une fonction m, définie sur l'intervalle $[0\,;1]$. Elle illustre la répartition des richesses d'un pays donné.



En abscisses x représente le pourcentage des personnes les plus pauvres par rapport à la population totale et en ordonnées $m(x)$ représente le pourcentage des richesses totales qu'ils possèdent.
Par exemple, 40 % des personnes en partant des plus pauvres possèdent 30 % des richesses totales.
Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ de la première partie sont respectivement les courbes de Lorentz pour un pays F et un pays G.

1) a) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, pour chacun de ces deux pays le pourcentage des richesses possédées par 50 % des personnes en partant des plus pauvres.
b) Parmi ces deux pays, quel est celui pour lequel les richesses sont réparties de la manière la plus égalitaire ?

2) On appelle **coefficient de Gini** le nombre 2A, où A est l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré sur la figure. Le coefficient de Gini évalue le degré d'inégalité de la répartition des richesses.
Calculer le coefficient de Gini pour chacun des pays F et G.
[1]

[1] La Réunion juin 1998