LaTeX, XCAS, pgiac et tablor : comment corriger un exercice de Bac sans effort...

30 mai 2008

I - Pondichery avril 2008

Partie A : un modèle discret
Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.
   (c) On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
   Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu
Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad ; y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}_1) \quad : z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Partie A : un modèle discret

1. On définit f

```
→ f:=x->(20-x)*x/10;
   (x)->(20-x)*x/10
```

On calcule sa dérivée :

```
→ simplifier(deriver(f(x)));
```

$$-\left(\frac{1}{5} \times x\right) + 2$$

On étudie son signe :

```
→ resoudre(deriver(f(x))>0)
```

$$[x < 10]$$

On calcule les valeurs particulières :

```
→ f(0),f(10),f(20);
```

$$0, 10, 0$$

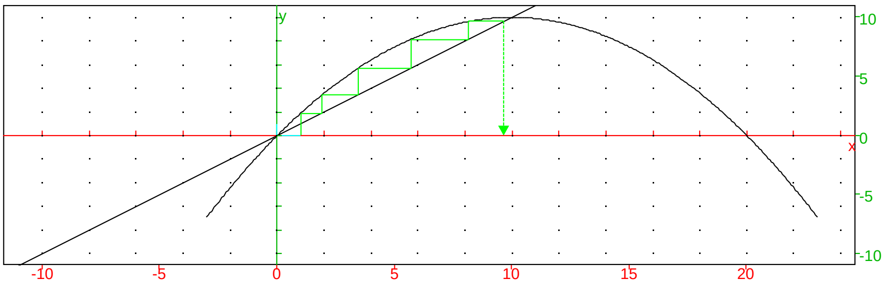
(a) On dresse son tableau de variation

x	0		10		20
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

(b) Par lecture du tableau de variations on obtient que sur $[0\,;\,20]$ le minimum de f est 0 et le maximum 10.

(c)

```
→ graphe_suite(f(x),x=[1,-3,23],5);
```



(d) On a $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$. On peut donc supposer qu'il existe au moins un entier naturel k tel que

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$$

Or f est croissante sur $[0\,;\,10]$ donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(10)$ et donc

$$1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 10$$

On a donc prouvé la propriété par récurrence.

(e) La suite est croissante et majorée donc convergente. La suite est définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur et à valeur dans $[0\,;\,10]$: elle converge donc vers un point fixe de f.

```
→ resoudre(f(x)=x)
```

$$[10, 0]$$

Or $u_0 = 1$ donc $u_n \geqslant 1$ pour tout entier naturel n : la limite ne peut pas être 0. C'est donc 10.

Partie B : un modèle continu

1. (a) $z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{20}\frac{1}{y}(10-y) = -\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{20}\right) = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$

   (b)

```
→ g:=1/desolve([z'=-z/2+1/20,z(0)=1],z)[0]
```

$$\left(\frac{\left(9+e^{\frac{1}{2}\times x}\right)\frac{1}{10}}{e^{\frac{1}{2}\times x}}\right)^{-1}$$

```
→ g:=unapply(g,x)
   (x)->1/((9+exp(1/2*x))*1/10/exp(1/2*x))
→ simplifier(g(x))
```

$$\frac{10e^{\frac{1}{2}\times x}}{\left(e^{\frac{1}{2}\times x}+9\right)}$$

2. → `simplifier(g(x)-10/(9*exp(-x/2)+1))`

$$0$$

3. → `d:=factoriser(deriver(g(x)))`

$$\frac{45e^{\frac{1}{2}\times x}}{\left(e^{\frac{1}{2}\times x}+9\right)^2}$$

→ `g(0)`

$$1$$

4. → `limite(g(x),x=+infinity)`

$$10$$

$\mathscr{C}_g$ admet donc une asymptote d'équation $y = 10$ au voisinage de $+\infty$.

x	0 $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$1 \nearrow 10$

5. → `resoudre(g(x)>=5)`

$$[x \geq (2\ln(9))]$$

→ `evalf(resoudre(g(x)>=5))`

$$[x \geq 4.394449]$$

II - Amérique du Sud novembre 2007

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}\right)$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E′, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et −1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et −1, on a :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

1. → `complex_variables:=1`

$$1$$

→ `f(z):=(z+1/z)/2`

```
(z)->(z+1/z)/2
```

→ `evalc(f(-i))`

$$0$$

2. → `resoudre(f(z)=z,z)`

$$[-1, 1]$$

3. → `factoriser(simplifier((f(z)+1)/(f(z)-1)))`

$$\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

III - Polynésie septembre 2007

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   (a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
   (b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Étude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. → `g(x):=2*exp(x)-x-2`

   `(x)->2*exp(x)-x-2`

   → `limite(g(x),x=+infinity); limite(g(x),x=-infinity);`

$$+\infty, +\infty$$

2. → `deriver(g(x))`

$$2e^x - 1$$

   → `resoudre(deriver(g(x))>0)`

$$[x > (\ln\left(\frac{1}{2}\right))]$$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{2}{e^1}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) → `g(0)`

$$0$$

→ `fsolve(g(x)=0,x=-2)`

$$-1.593624$$

x	$-\infty$	α_1	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	α_2	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$ ↘	0 ↘	$\ln\left(\frac{2}{e^1}\right)$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Partie B : Étude de la fonction principale

1. → `f(x):=exp(2*x)-(x+1)*exp(x)`

```
(x)->exp(2*x)-(x+1)*exp(x)
```

→ `limite(f(x),x=+infinity); limite(f(x),x=-infinity);`

$$+\infty, 0$$

2. → `deriver(f(x))`

$$e^{2x}2 + -\left(e^x\right) - \left((x+1)e^x\right)$$

→ `simplifier(deriver(f(x))/exp(x))`

$$-x + 2e^x - 2$$

3. → `f(fsolve(g(x)=0,x=-2))`

$$0.161903$$

4.

x	$-\infty$		-1.593624		0.000000		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↗	0.161903	↘	0.000000	↗	$+\infty$

5. → `graphe(f(x),x=-4..1)`