Chapitre 12 : Espaces préhilbertiens réels ou complexes

- Ici, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Pour $x\in\mathbb{R}$, $\bar{x}=x$
- E désigne un $\mathbb{K}$-ev.

I Produit scalaire

A) Définition

On appelle produit scalaire sur le $\mathbb{K}$-ev E toute application $\varphi: E\times E\to\mathbb{K}$ telle que

- φ est linéaire à droite : $\forall x,y,y'\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \varphi(x,y+\lambda y')=\varphi(x,y)+\lambda\varphi(x,y')$
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, φ est symétrique : $\forall x,y\in E, \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$

  Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, φ est hermitienne : $\forall x,y\in E, \varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$

NB : $\forall x\in\mathbb{K}, \varphi(x,x)\in\mathbb{R}$

- φ est définie positive : $\forall x\in E\setminus\{0\}, \varphi(x,x)>0$

Propriétés :

Soit φ un produit scalaire.

(1) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, φ est aussi linéaire à gauche.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, φ est anti-linéaire à gauche :

$\forall x,x',y\in E, \forall\lambda\in\mathbb{C}, \varphi(x+\lambda x',y)=\varphi(x,y)+\bar{\lambda}\varphi(x',y)$

(2) Pour $(x,x')\in E^2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a :

$\varphi(\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y)=|\lambda|^2\varphi(x,x)+2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\mu\varphi(x,y))+|\mu|^2\varphi(y,y)$

Remarque :

Soit $\varphi: E^2\to\mathbb{C}$ un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$-ev E.

Alors $\psi: E^2\to\mathbb{R}$ définie par $\psi=\operatorname{Re}(\varphi)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-ev E.

B) Exemples

- Sur $\mathbb{K}^n$: $(x_1,...x_n),(y_1,...y_n)\mapsto\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j y_j$.
- Sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$:

L'application $(A,B)\in M_{n,p}(\mathbb{K})^2\mapsto\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\overline{A_{i,j}}B_{i,j}=Tr({}^t\bar{A}B)$ est un produit scalaire.

- Espace $l_2(\mathbb{N})$

On note $l_2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites de carré sommable, c'est-à-dire les suites complexes u telles que la série de terme général $(|u_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème :

- $l_2(\mathbb{N})$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Pour $u,v\in l_2(\mathbb{N})$, la série de terme général $\bar{u}_n v_n$ est absolument convergente, et $\varphi : l_2(\mathbb{N})^2 \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire.

$$(u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{u}_n v_n$$

Démonstration :

- La suite nulle est dans $l_2(\mathbb{N})$, donc $l_2(\mathbb{N}) \neq \varnothing$.
- Pour $u\in l_2(\mathbb{N})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, la série de terme général $|\lambda u_n|^2 = |\lambda|^2|u_n|^2$ converge donc $\lambda u \in l_2(\mathbb{N})$.
- Pour $u,v\in l_2(\mathbb{N})$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}|u_n+v_n|^2 &= |u_n|^2+|v_n|^2+2\operatorname{Re}(\bar{u}_n v_n)\\ &\leq |u_n|^2+|v_n|^2+2|u_n||v_n|\\ &\leq 2\left(|u_n|^2+|v_n|^2\right)\end{aligned}$$

Car $\forall x,y\geq 0, 2xy\leq x^2+y^2$

La série de terme général $|u_n|^2+|v_n|^2$ est convergente, donc $u+v\in l_2(\mathbb{N})$.

- Existence de φ :

Soient $u,v\in l_2(\mathbb{N})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|\bar{u}_n v_n| \leq \frac{1}{2}\left(|u_n|^2+|v_n|^2\right)$, terme général d'une série convergente.

Donc φ existe pour tous $u,v\in l_2(\mathbb{N})$. Maintenant :

φ est linéaire à droite…

φ est hermitienne : $\forall u,v\in l_2(\mathbb{N}), \varphi(v,u) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\bar{v}_k u_k = \lim\limits_{n\to+\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n} v_k \bar{u}_k} = \overline{\varphi(u,v)}$

Soit $u\in l_2(\mathbb{N})$ non nulle.

La suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n}|u_k|^2$ est croissante et tend vers $\varphi(u,u)$.

Il existe $n_0\geq 0$ tel que $u_{n_0}\neq 0$, et alors $\forall N\geq n_0, S_N\geq |u_{n_0}|^2$

Donc $\varphi(u,u)\geq |u_{n_0}|^2 > 0$

- Espaces de fonctions :

Soit C l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, où a, b sont réels tels que $a<b$.

Pour $f,g\in C$, on pose $\varphi(f,g) = \int_a^b \bar{f}(t)g(t)dt$.

Théorème :

φ est un produit scalaire sur C.

Démonstration :

Elle repose sur le fait que si $\varphi : [a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, positive et d'intégrale nulle, alors $\varphi = 0$.

Autre exemple :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soit "$L_2(I)$" l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$ telles que $|f|^2$ est intégrable sur I.

Théorème :

- "$L_2(I)$" est un sous-espace de $C^0(I,\mathbb{C})$
- Pour $f,g \in$"$L_2(I)$", $\bar{f}\times g$ est intégrable sur I.
- L'application $(f,g)\mapsto \int_I \bar{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur "$L_2(I)$".

C) Inégalité de Cauchy–Schwarz et norme associée à un produit scalaire

- Notation :

Quand il n'y a pas de confusion possible, un produit scalaire sera noté $<,>$ ou $(\,,\,)$.

- Inégalité de Cauchy–Schwarz :

Théorème :

Soit $<,>$ un produit scalaire sur le $\mathbb{K}$-ev E.

Pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, on a :

$|<\vec{x},\vec{y}>|\leq\sqrt{<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}>}$

Avec égalité si et seulement si $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.

Démonstration :

Soit $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$.

Posons $<\vec{x},\vec{y}>=re^{i\alpha}$, avec $r\geq 0$.

Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, on a $<\vec{x}+\lambda\vec{y},\vec{x}+\lambda\vec{y}>\geq 0$

C'est-à-dire $<\vec{x},\vec{x}>+|\lambda|^2<\vec{y},\vec{y}>+2\operatorname{Re}(\lambda<\vec{x},\vec{y}>)\geq 0$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, et $\lambda=t.e^{-i\alpha}$, on a :

$t^2<\vec{y},\vec{y}>+2t.r+<\vec{x},\vec{x}>\geq 0$

Et donc $(2r)^2-4<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}>\leq 0$ ($\Delta=...\leq 0$)

Soit $|<\vec{x},\vec{y}>|\leq\sqrt{<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}>}$.

Cas d'égalité :

Si $|<\vec{x},\vec{y}>|=\sqrt{<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}>}$,

Alors pour $P=aX^2+bX+c$, avec $a=<\vec{y},\vec{y}>$, $c=<\vec{x},\vec{x}>$, $b=2r$ (notations introduites précédemment), on a $b^2-4ac=0$ et :

Soit $a\neq 0$, auquel cas P a une racine double $P(t)=a(t-t_0)^2$, et donc $P(t_0)=<\vec{x}+\lambda\vec{y},\vec{x}+\lambda\vec{y}>=0$ où $\lambda=t_0e^{-i\alpha}$, d'où $\vec{x}=-\lambda\vec{y}$.

Soit $a=0$, c'est-à-dire $<\vec{y},\vec{y}>=0$, donc $\vec{y}=\vec{0}$.

Et dans les deux cas $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.

(Si E est un espace réel, on a $\alpha\equiv 0\ [\pi]$, donc $\lambda\in\mathbb{R}$)

Inversement, si $(\vec{x},\vec{y})$ est liée :

Soit $\vec{y}=\vec{0}$, et on a bien l'égalité.

Soit $\vec{y}\neq\vec{0}$ et il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $x=\lambda y$.

Alors $|<\vec{x},\vec{y}>|=|\lambda|<\vec{y},\vec{y}>$

Et $<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}>=|\lambda|^2<\vec{y},\vec{y}>^2$

D'où l'égalité.

- Norme associée à un produit scalaire :

Théorème :

Si $<,>$ est un produit scalaire, alors l'application $x\in E\mapsto\sqrt{<x,x>}$ est une norme sur *E*.

Définition/notation :

En général, cette norme est notée $\| \ \|_2$, c'est la norme euclidienne/hilbertienne associée au produit scalaire.

Démonstration :

Posons pour $x\in E$, $\|x\|_2=\sqrt{<x,x>}$.

- L'application est bien positive
- Homogénéité : pour $x\in E,\lambda\in\mathbb{K},\|\lambda x\|_2=\sqrt{<\lambda x,\lambda x>}=|\lambda|\|x\|_2$.
- Séparation : si $\|x\|_2=0$, alors $<x,x>=0$
- Inégalité du triangle (ou inégalité de Minkowski) :

Soient $x,y\in E$. On a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2&=<x+y,x+y>=<x,x>+<y,y>+2\operatorname{Re}(<x,y>)\\&\leq\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2|<x,y>|\\&\leq\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2\leq(\|x\|_2+\|y\|_2)^2\end{aligned}$$

D'où $\|x+y\|_2\leq\|x\|_2+\|y\|_2$

Etude des cas d'égalité de Minkowski :

Si $\|x+y\|_2=\|x\|_2+\|y\|_2$, toutes les inégalités intermédiaires sont des égalité.

Donc $|<x,y>|=\|x\|_2\|y\|_2$, donc (x,y) est liée.

Et $\operatorname{Re}(<x,y>)=|<x,y>|$

Si $y=0$, on a l'égalité.

Sinon, $x=\lambda y$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Dans ces conditions, $|<x,y>|=|\lambda|<y,y>=|\lambda|\|y\|_2^2$

Et $\operatorname{Re}(<x,y>)=\operatorname{Re}(\bar{\lambda}<y,y>)=\|y\|_2^2\operatorname{Re}(\bar{\lambda})$

Donc $\operatorname{Re}(\bar{\lambda})=|\lambda|$, soit $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Réciproquement, si $y=0$ ou $x=\lambda y$ pour $\lambda\geq0$, on a bien l'égalité.

Bilan :

Il y égalité de Minkowski si et seulement si *x* et *y* sont positivement liés.

- Relations entre $\| \|_2$ et $< , >$:

Théorème :

Pour tous $x, y \in E$, on a :

(1) $\|x\|_2 = \sqrt{<x,x>}$

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $<x,y> = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right)$

(Identité de polarisation)

(3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$\mathrm{Re}(<x,y>) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right)$

$\mathrm{Im}(<x,y>) = \mathrm{Re}(-i<x,y>)\frac{1}{2}\left(\|ix+y\|_2^2 - \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2\right)$.

Remarque :

Les formules montrent que pour une application $u \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$ où E est muni du produit scalaire $< , >_E$, F du produit scalaire $< , >_F$, u conserve les normes si et seulement si u conserve les produits scalaires :

$\Leftarrow$: si $\forall (x,y) \in E^2, <u(x),u(y)>_F = <x,y>_E$

Alors avec $x = y$, $\forall x \in E, \|u(x)\|_F = \|x\|_E$

$\Rightarrow$: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour $(x,y) \in E^2$,

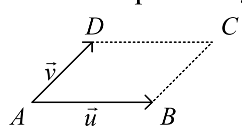
$$<u(x),u(y)>_F = \frac{\|u(x)+u(y)\|_2^2 - \|u(x)-u(y)\|_2^2}{4}$$

$$= \frac{\|u(x+y)\|_2^2 - \|u(x-y)\|_2^2}{4} = \frac{\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2}{4}$$

$$= <x,y>_E$$

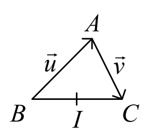
Dans le cas complexe, il faut vérifier pour la partie réelle et imaginaire…

Identité du parallélogramme / de la médiane :



On a $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, c'est-à-dire :

$2(\|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2) = \|\vec{u}+\vec{v}\|_2^2 + \|\vec{v}-\vec{u}\|_2^2$



Si I est le milieu de BC, alors $AI^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$

Ou $\|\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\|_2^2 = \frac{1}{4}(2\|\vec{u}\|_2^2 + 2\|\vec{v}\|_2^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|_2^2)$

En effet :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|_2^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(<\vec{u},\vec{v}>) + \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}(<\vec{u},\vec{v}>)$

D'où on tire les deux égalités.

D) Terminologie des espaces préhilbertiens

- Définitions :
- Espace préhilbertien : $(E,<\,,\,>)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev, $<\,,\,>$ un produit scalaire sur E.
- Espace préhilbertien réel de dimension finie : espace euclidien.
- Espace préhilbertien complexe de dimension finie : espace hermitien.
- A tout espace préhilbertien $(E,<\,,\,>)$ on peut associer un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_2)$ où $\|\ \|_2$ est la norme associée au produit scalaire.
- Espace de Hilbert : espace préhilbertien complet pour $\|\ \|_2$.

- Exemples :
- Les espaces euclidiens et hermitiens sont de Hilbert.

Théorème :
$(l_2(\mathbb{N}),<\,,\,>)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration :

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l_2(\mathbb{N})$.

Pour $p\in\mathbb{N}$, u_p est une suite de carré sommable, notée $u_p=(u_p(0),u_p(1),...)$.

(1) Construction de la limite :

Comme $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\ \|_2$, à n fixé $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ puisque $\forall p\geq q, |u_p(n)-u_q(n)|\leq\sqrt{\sum_{j=0}^{+\infty}|u_p(j)-u_q(j)|^2}=\|u_p-u_q\|_2$

Comme $\mathbb{C}$ est complet, $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $v_n\in\mathbb{C}$.

On pose alors v la suite de terme général v_n.

(2) Alors $v\in l_2(\mathbb{N})$, et $\lim_{n\to+\infty}\|v-u_p\|_2=0$. En effet :

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $P\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geq q\geq P, \|u_p-u_q\|_2\leq\varepsilon$

Pour $p\geq q\geq P$ et $N\in\mathbb{N}$, on a :

$\sum_{k=0}^{N}|u_p(k)-u_q(k)|^2\leq\|u_p-u_q\|_2^2\leq\varepsilon^2$.

Comme, pour tout $k=0..N$, $\lim_{p\to+\infty}u_p(k)=v_k$, on a pour tout $q\geq P$ et $N\in\mathbb{N}$:

$\sum_{k=0}^{N}|v_k-u_q(k)|^2\leq\varepsilon^2$.

A $q\geq P$ fixé, cette inégalité est vraie pour tout N, donc $v-u_q\in l_2(\mathbb{N})$, et $\|v-u_q\|_2^2\leq\varepsilon^2$.

Ainsi, $v\in l_2(\mathbb{N})$ et $\forall q\geq P, \|v-u_q\|_2\leq\varepsilon$ d'où la convergence.

- $C^0([0;1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $<\,,\,>$ défini par $<f,g>=\int_0^1\bar{f}g$ n'est pas complet (déjà vu).

- Exemples de fonctions continues sur un espace préhilbertien :

Théorème :
Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien.
(1) Pour tout $\vec{a}\in E$, l'application $\varphi_{\vec{a}}:\begin{array}{l}E\to\mathbb{K}\\ \vec{v}\mapsto\vec{a}\cdot\vec{v}\end{array}$ est une forme linéaire continue sur E, et $\|\varphi_{\vec{a}}\|=\|\vec{a}\|_2$.
(2) Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: soit E' le dual topologique de E.
Alors $\theta:\begin{array}{l}E\to E'\\ \vec{a}\mapsto\varphi_{\vec{a}}\end{array}$ est linéaire, continue, injective et même isométrique.
(3) Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: c'est la même chose mais θ est anti-linéaire.

Démonstration :
- L'application est linéaire car le produit scalaire est linéaire à droite.

Soit $\vec{a}\in E$.
Pour tout $\vec{v}\in E$, $|\varphi_{\vec{a}}(\vec{v})|=|<\vec{a},v>|\leq\|\vec{a}\|_2\|\vec{v}\|_2$
Donc $\varphi_{\vec{a}}$ est linéaire, continue et $\|\varphi_{\vec{a}}\|\leq\|\vec{a}\|_2$
Il y a même égalité :
Si $\vec{a}=\vec{0}$, elle est triviale.
Sinon, $\vec{v}=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|_2}$ vérifie $\varphi_{\vec{a}}(\vec{v})=\|\vec{a}\|_2$ et $\|\vec{v}\|_2=1$, donc $\|\varphi_{\vec{a}}\|\geq\|\vec{a}\|_2$.
- θ est linéaire car :

$\forall a,b\in E,\forall\lambda\in\mathbb{R},\theta(\vec{a}+\lambda\vec{b})=\varphi_{\vec{a}+\lambda\vec{b}}=\varphi_{\vec{a}}+\lambda\varphi_{\vec{b}}=\theta(\vec{a})+\lambda\theta(\vec{b})$
θ est isométrique car $\forall a\in E,\|\theta(\vec{a})\|=\|\vec{a}\|_2$
Et donc $\ker(\theta)=\{0\}$, c'est-à-dire que θ est injective.
- C'est la même chose sauf que $<\,,\,>$ est anti-linéaire à gauche.

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien

A) Orthogonalité de deux vecteurs

Définition :
Deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}\in E$ sont dits orthogonaux lorsque $<\vec{u},\vec{v}>=0$
(C'est une relation symétrique)

Théorème (Pythagore) :
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

Démonstration :
On a $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\mathrm{Re}(<\vec{u},\vec{v}>)$
La réciproque est vraie si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, fausse sinon.

B) Orthogonal d'une partie A de E.

Définition :

On pose $A^{\perp}=\{\vec{v}\in E, \forall \vec{a}\in A, <\vec{a},\vec{v}>=0\}$

Théorème :

(1) Pour $A\subset E$, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(2) $\varnothing^{\perp}=E$, $E^{\perp}=\{0\}$

(3) Si $A\subset B$, $B^{\perp}\subset A^{\perp}$

(4) Pour $A\subset E$, $A^{\perp}=\overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp}=\overline{A}^{\perp}=(\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.

Remarque :

Si F est un sous-espace vectoriel de E préhilbertien, on n'a pas toujours $(F^{\perp})^{\perp}=F$

Par exemple, si F n'est pas fermé, on ne peut pas avoir l'égalité.

On n'a pas non plus $E=F\oplus F^{\perp}$ en général.

Par contre, $F\cap F^{\perp}=\{0\}$

Exemple :

$E=C^{0}([0;1],\mathbb{R})$ muni de $<f,g>=\int_0^1 fg$

On note $F=\{f\in E, \forall t\in [0,\frac{1}{2}], f(t)=0\}$

Alors F est un fermé de E, et :

$F^{\perp}=\{f\in E, \forall t\in [\frac{1}{2},1], f(t)=0\}$

Donc $F\oplus F^{\perp}=\{f\in E, f(\frac{1}{2})=0\}$

Démonstration du théorème :

(1) $A^{\perp}=\{v\in E, \forall a\in A, <a,v>=0\}=\bigcap_{a\in A}\ker\varphi_a$ où $\varphi_a : x\mapsto <a,x>$ qui est une forme linéaire continue, et donc les $\ker\varphi_a$ sont des sous-espaces fermés de E. Donc $A^{\perp}$ est un sous-espace fermé de E.

(2) On a $\varnothing^{\perp}=E$ …

$E^{\perp}=\{0\}$, puisque pour $a\in E^{\perp}$, on a en particulier $<a,a>=0$ donc $a=0$

(3) Si $A\subset B$, alors pour $v\in B^{\perp}$, on a $\forall a\in A, <a,v>=0$ (car $\forall a\in A, a\in B$), et donc $v\in A^{\perp}$

(4) On a $A\subset\overline{A}$, donc $(\overline{A})^{\perp}\subset A^{\perp}$

De plus, si $v\in A^{\perp}$, alors $A\subset\ker\varphi_v$, sous-espace fermé de E.

Donc $\overline{A}\subset\ker\varphi_v$, $\mathrm{Vect}(A)\subset\ker\varphi_v$, $\overline{\mathrm{Vect}(A)}\subset\ker\varphi_v$

Donc $v\in\overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp}$, $v\in\mathrm{Vect}(A)^{\perp}$, $v\in\overline{A}^{\perp}$

D'où $A^{\perp}\subset\begin{cases}\overline{A}^{\perp}\\ \mathrm{Vect}(A)^{\perp}\\ \overline{\mathrm{Vect}(A)}^{\perp}\end{cases}$

C) Familles orthogonales et orthonormales

- Définition :

Une famille $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale lorsque pour tous $\alpha,\beta\in I$ distincts, $<v_\alpha,v_\beta>=0$

Elle est dite orthonormale si de plus $\forall\alpha\in I, \|v_\alpha\|_2=1$

Exemple :

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π périodiques, muni du produit scalaire $<f,g>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)dt$.

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on pose e_n l'application définie par $\forall t\in\mathbb{R}, e_n(t)=e^{i.n.t}$

Et pour $m\in\mathbb{N}, l\in\mathbb{N}^*$, $c_m:t\mapsto\cos(m.t)$, $s_l:t\mapsto\cos(l.t)$

Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire, et $(c_m,s_l)_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ l\in\mathbb{N}^*}}$ est orthogonale.

- Indépendance :

Théorème :

- Une famille orthogonale est libre si et seulement si elle ne contient pas de vecteur nul
- Une famille orthonormale est toujours libre.

Démonstration :

Soit $(\vec{v}_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul.

Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille à support fini de $\mathbb{K}$, supposons que $\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\vec{v}_\alpha=\vec{0}$.

Alors $\forall\beta\in I, 0=<\vec{v}_\beta,\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\vec{v}_\alpha>=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha<\vec{v}_\beta,\vec{v}_\alpha>=\lambda_\beta\|\vec{v}_\beta\|_2^2$.

Donc comme $\forall\beta\in I, \|\vec{v}_\beta\|_2^2\neq 0$, on a $\forall\beta\in I, \lambda_\beta=0$

La réciproque est évidente, et le deuxième point découle du premier.

- Décomposition sur un système orthonormal.

Théorème :

Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille orthonormale de E.

On note $F=\mathrm{Vect}(e_\alpha)_{\alpha\in I}$. Alors :

(1) Pour tout $\vec{f}\in F$, la famille $(<e_\alpha,\vec{f}>)_{\alpha\in I}$ est à support fini, et :

$\vec{f}=\sum_{\alpha\in I}<e_\alpha,\vec{f}>e_\alpha$

(2) Pour tout $\vec{f}\in F$ et $\vec{v}\in E$, on a :

$<\vec{v},\vec{f}>=\sum_{\alpha\in I}\overline{<e_\alpha,\vec{v}>}<e_\alpha,\vec{f}>$

Cas particulier :

Pour tout $\vec{f}\in F$, $\|\vec{f}\|_2^2=\sum_{\alpha\in I}|<e_\alpha,\vec{f}>|^2$

Démonstration :

(1) Pour $\vec{f}\in F$, il existe $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$ à support fini telle que $\vec{f}=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\vec{e}_\alpha$

De plus, pour tout $\beta \in I$, $<\vec{e}_\beta, \vec{f}> = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha \vec{e}_\alpha = \lambda_\beta$

Donc $\vec{f} = \sum_{\alpha\in I} <\vec{e}_\alpha, \vec{f}> \vec{e}_\alpha$ et la somme est finie.

(2) On a $\vec{f} = \sum_{\alpha\in I} <\vec{e}_\alpha, \vec{f}> \vec{e}_\alpha$ (somme finie)

Donc pour tout $\vec{v}\in E$, $<\vec{v}, \vec{f}> = \sum_{\alpha\in I} <\vec{e}_\alpha, \vec{f}><\vec{v}, \vec{e}_\alpha> = \sum_{\alpha\in I} \overline{<\vec{e}_\alpha, \vec{v}>}<\vec{e}_\alpha, \vec{f}>$

D) Procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt

Drapeau de sous-espaces :
C'est une suite $(F_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ ou $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de E telle que :
$\forall i\in \mathbb{N}\,([\![0;n-1]\!]), F_i \subset F_{i+1}$ et $\dim F_i = i$ (et $\dim F_n = n$)

Exemples :
- Drapeau associé à un système libre fini ou dénombrable :
Si $(V_1,\dots V_N)$ est libre, on pose $F_0=\{0\}$, et pour $i\in[\![0;n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots e_i)$
De même pour $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ …
La suite ainsi définie de sous-espaces est un drapeau de sous-espaces
- $(\mathbb{R}_n[X])_{n\geq -1}$ est un drapeau de $\mathbb{R}[X]$, où $\mathbb{R}_{-1}[X]=\{0\}$
C'est le drapeau associé à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème :
Soit $(E,<\ ,\ >)$ un espace préhilbertien. Alors :
(1) Tout drapeau est associé à un système orthonormal, c'est-à-dire :
Si $(F_i)_{i\in I}$ ($I=[\![0,N]\!]$ ou $\mathbb{N}$) est un drapeau de E, alors il existe un système orthonormal $(e_i)_{i\in I}$ tel que $\forall i\in I, F_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots e_i)$
(2) Pour tout système libre $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ (ou $(v_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$), il existe un unique système orthonormal $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ($(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$) tel que pour tout i, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_i) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots v_i)$ et $<e_i, v_i> \in \mathbb{R}_+^*$
De plus, les $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ($(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$) sont construits ainsi :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Et pour $i\geq 2$, $e_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ où $u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} <e_k, v_i> e_k$

Démonstration (de 2)
Dans le cas fini, on fait par récurrence sur $\mathbb{N}$:
Pour $n=1$: on cherche e_1 tel que $<e_1, v_1> \in \mathbb{R}_+^*$, et $e_1\in \mathrm{Vect}(v_1)$, $\|e_1\|=1$
Un tel e_1 s'écrit $e_1 = \lambda v_1$. De plus, $<e_1, v_1> = \bar{\lambda}\|v_1\|_2^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\|e_1\|_2 = |\lambda|\|v_1\|_2 = 1$

Donc $\lambda = \dfrac{1}{\|v_1\|_2}$; réciproquement, un tel λ convient.

Soit $n \geq 2$, supposons l'énoncé vrai pour $n-1$, et considérons n vecteurs $(v_1,...v_n)$ libres.

Par hypothèse de récurrence, il existe une unique famille orthonormale $(e_1,...e_{n-1})$ telle que $\forall i \in [\![1,n-1]\!], < e_i, v_i > \in \mathbb{R}_+^*$

On cherche alors e_n sous la forme $e_n = \lambda_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k$

Analyse :

On doit avoir pour tout $k \leq n-1$, $0 = < e_j, e_n > = \lambda < e_j, v_n > + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \underbrace{< e_j, e_k >}_{\delta_{i,k}}$

Soit $a_j = -\lambda < e_j, v_n >$

Donc $e_n = \lambda \left(v_n - \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j \right)$

On veut que $< e_n, v_n > > 0$

Or, $\lambda v_n = e_n + \lambda \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j$

Donc $< e_n, \lambda v_n > = 1$, soit $\lambda > 0$.

Enfin, il faut $\|e_n\|_2 = 1$.

Donc $|\lambda| \left\| v_n - \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j \right\|_2 = 1$, soit $\lambda = \dfrac{1}{\left\| v_n - \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j \right\|_2}$.

Synthèse :

Comme $\mathrm{Vect}(e_1,...e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(v_1,...v_{n-1})$, on a $v_n - \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j \neq 0$

Donc le λ introduit est bien défini, et $e_n = \lambda \left(v_n - \sum_{k=1}^{n-1} < e_j, v_n > e_j \right)$ vérifie bien les hypothèses voulues.

Version matricielle :

Décomposition *QR* d'une matrice inversible :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une matrice *Q*, unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, orthogonale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et une matrice *R* trigonale supérieure avec $\forall i \in [\![1,n]\!], r_{i,i} > 0$, telles que $A = QR$.

(Matrice unitaire : c'est une matrice *Q* telle que ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ pour le produit scalaire naturel, c'est-à-dire ${}^t\overline{Q}Q = I_n$)

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la méthode précédente aux colonnes de *A*, qui forment une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

E) Applications

- Existence de bases orthonormées en dimension finie

Théorème :
Tout espace préhilbertien de dimension finie admet au moins une base orthonormée.

Démonstration :
On orthonormalise une base quelconque.

- Théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie.

Théorème :
Soit *E* un espace préhilbertien, *F* un sous-espace de *E* de dimension finie. Alors :
- $F\oplus F^{\perp}=E$ (faux si *F* n'est pas de dimension finie)

On note p_F le projecteur sur *F* parallèlement à $F^{\perp}$.
- Si $(e_1,\dots e_n)$ est une base orthonormée de *F*, pour tout $v\in E$ on a :

$$p_F(v)=\sum_{j=1}^{n}<e_j,v>e_j$$

- Pour tout $v\in E$ et $y\in F$, on a $\|v-y\|_2\geq\|v-p_F(v)\|_2$, avec égalité si et seulement si $y=p_F(v)$

Définition :
p_F s'appelle le projecteur orthogonal sur *F*.

Le troisième tiret montre que $p_F(v)$ réalise la distance minimale entre *v* et *F*.
Ainsi, pour tout $v\in E$, $d(v,F)=\inf_{y\in F}\|v-y\|_2=\|v-p_F(v)\|_2$

Corollaire :
La distance de $v\in E$ à un sous-espace *F* de dimension finie est
$d(v,F)=\|v-p_F(v)\|_2$
Si $(e_1,\dots e_n)$ est une base orthonormale de *F*, alors

$$d(v,F)=\sqrt{\|v\|_2^2-\|p_F(v)\|_2^2}=\sqrt{\|v\|_2^2-\sum_{j=1}^{n}|<e_j,v>|^2}$$

Démonstration :
Soit $(e_1,\dots e_n)$ une base orthonormée de *F*.
Considérons $u:\begin{array}{l}E\to E\\ \vec{v}\mapsto\sum_{j=1}^{n}<e_j,\vec{v}>e_j\end{array}$.

On a $u\circ u=u$ (car pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $u(e_j)=e_j$),
Et $\mathrm{Im}\,u=F$.
En effet, $\mathrm{Im}\,u\subset\mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1,n]\!]}=F$, et $\forall j\in[\![1,n]\!], e_j=u(e_j)\in\mathrm{Im}\,u$
De plus, $\ker u=F^{\perp}$.
En effet, pour $x\in E$, $x\in\ker u$ si et seulement si $\forall j\in[\![1,n]\!],<e_j,x>=0$ c'est-à-dire si et seulement si $x\in\{e_1,\dots e_n\}^{\perp}=F^{\perp}$
Donc *u* est le projecteur sur *F* parallèlement à $F^{\perp}$.
En particulier, $F\oplus F^{\perp}=E$, d'où déjà les deux premiers tirets.

Pour l'inégalité :

On a, pour $v \in E$ et $y \in F$:

$\|v-y\|_2^2 = \|(v-p_F(v))+(p_F(v)-y)\|_2^2$

Or, $v-p_F(v) \in \ker p_F = F^\perp$ (car $p_F \circ p_F = p_F$

Et $p_F(v)-y \in F$

Donc d'après le théorème de Pythagore :

$\|v-y\|_2^2 = \|v-p_F(v)\|_2^2 + \|p_F(v)-y\|_2^2 \geq \|v-p_F(v)\|_2^2$

Avec égalité si et seulement si $\|p_F(v)-y\|_2^2 = 0$, c'est-à-dire $y = p_F(v)$

Pour le corollaire :

On a par définition $d(v,F) = \inf\limits_{y\in F} \|v-y\|_2$

Rappel :

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé, A une partie non vide de E.

On peut définir $d(v,A)$ pour tout $v \in E$, et $v \mapsto d(v,A)$ est continue, car 1-lipschitzienne.

Mais en général, il n'existe pas d'élément y de A tel que $d(v,A) = \|v-y\|$;

Par exemple, $d(v,A) = 0$ si et seulement si $v \in \overline{A}$; mais si $v \in \overline{A} \setminus A$, on a $\forall y \in A, \|v-y\| \neq 0$

Si A est compact, $d(v,A)$ est toujours atteint.

Si A est de dimension finie, $d(v,A)$ est toujours atteint mais pas forcément en un seul point.

D'après le théorème, on a $d(v,F) = \|v-p_F(v)\|_2$

Et pour tout $y \in F$, $\|v-y\|_2 = d(v,F)$ si et seulement si $y = p_F(v)$.

Expression de $v = p_F(v) + (v-p_F(v))$:

D'après le théorème de Pythagore, $\|v\|_2^2 = \|p_F(v)\|_2^2 + \|v-p_F(v)\|_2^2$

Et donc $d(v,F) = \sqrt{\|v\|_2^2 - \|p_F(v)\|_2^2}$

Si $(e_1,...e_n)$ est une base orthonormée de F, on a $p_F(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_j, v > e_j$, c'est-à-dire $\|p_F(v)\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} |< e_j, v >|^2$ d'où la deuxième expression.

- Cas particulier :

Propriétés :

- Si F est la droite $\mathbb{K}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul, alors pour tout $v \in E$,
  $p_F(v) = \dfrac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{u}\|_2^2}\vec{u}$

Et $d(v,F) = \sqrt{\|v\|_2^2 - \|p_F(v)\|_2^2} = \sqrt{\|v\|_2^2 - \dfrac{|<\vec{u},\vec{v}>|^2}{\|\vec{u}\|_2^2}}$

- Si F est un hyperplan de E de dimension finie, alors $F^\perp$ est une droite.

Pour $\vec{N}\in F^{\perp}\setminus\{0\}$, on a $\forall v\in E, p_F(v)=v-\dfrac{<\vec{N},v>}{\|\vec{N}\|^2}\vec{N}$

Et $d(v,F)=\dfrac{|<\vec{N},v>|}{\|\vec{N}\|^2}$

Démonstration :

- $e_1=\dfrac{u}{\|u\|_2}$ est une base orthonormée de F…

- On a $p_F=\mathrm{Id}_E-p_{F^{\perp}}$, et $d(v,F)=\|v-p_F(v)\|_2=\|p_{F^{\perp}}(v)\|_2$ …

Remarque :

On retrouve les formules de géométrie affine euclidienne :

Si D est la droite d'équation $ax+by+c=0$ ($(a,b)\neq(0,0)$) en repère orthonormal d'un plan euclidien, alors pour tout $M_0(x_0,y_0)$, $d(M_0,D)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Idem pour un plan en dimension 3 :

La distance de M_0 à $M: ax+by+cz+d=0$ est $d(M_0,M)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

- Exercice classique :

Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{\pi}(\sin t-a-bt-ct^2)^2dt$

Interprétation préhilbertienne du problème :

On pose $E=C([0,\pi],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $<f,g>=\int_0^{\pi}f(t)g(t)dt$.

On doit chercher le carré de la distance de $\sin\in E$ au sous-espace $\{t\mapsto a+bt+ct^2,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}=\mathbb{R}_2[X]$

En pratique :

On construit une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, puis on utilise les formules.

Ici, on peut réduire les calculs (gagner une dimension) :

On note $v=\sin$

Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$ *le* polynôme tel que

$\|v-P\|_2^2=\int_0^{\pi}(\sin t-P(t))^2dt=\int_0^{\pi}(\sin u-P(\pi-u))^2du$

Ainsi, comme $u\mapsto P(\pi-u)\in\mathbb{R}_2[X]$, on a par unicité de la projection :

$P(X)=P(\pi-X)$

Donc P s'écrit $P=a+bX(\pi-X)$

Donc v est la projection orthogonale sur $F=\mathrm{Vect}(E_0:t\mapsto 1,E_1:t\mapsto t.(\pi-t))$

On a $\|E_0\|_2^2=\pi$. On pose $e_0=\dfrac{E_0}{\sqrt{\pi}}$

On considère $E'_1=E_1-<e_0,E_1>e_0$:

On a $<e_0,E_1>=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}t.(\pi-t)dt=\dfrac{\pi^{5/2}}{6}$

Donc $E'_1 : t \mapsto t.(\pi - t) - \frac{\pi^2}{6}$

Et $\|E'_1\|_2^2 = \int_0^\pi (t^2 - \pi.t + \frac{\pi^2}{6})^2 dt = \frac{\pi^5}{180} = \left(\frac{\pi^{5/2}}{6\sqrt{5}}\right)^2$

On pose donc $e_1 = \frac{E'_1}{\|E'_1\|_2} : t \mapsto \frac{6\sqrt{5}}{\pi^{5/2}}\left(-t^2 + \pi.t - \frac{\pi^2}{6}\right)$

Projection de sin sur F :

$p_F(\sin) = <e_0, \sin> e_0 + <e_1, \sin> e_1$

Et $d(\sin, F) = \sqrt{\|\sin\|^2 - <e_0, \sin>^2 - <e_1, \sin>^2}$

Autre méthode (méthode de Gauss) :

On a vu que $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (\sin t - a - bt - ct^2)^2 dt = \inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (\sin t - u - v.t(\pi - t))^2 dt$

On pose $F(u,v) = \int_0^\pi (\sin t - u - v.t(\pi - t))^2 dt$; ainsi, on doit calculer $\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} F(u,v)$

On développe $F(u,v)$:

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \pi.u^2 + v^2\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt + 2uv\int_0^\pi t.(\pi - t)dt + \ldots \\
&= \alpha.u^2 + \beta.v^2 + 2\gamma.uv + 2\delta.v + 2\varepsilon.v + \eta \\
&= \alpha\left(u + \frac{\gamma}{\alpha}v + \delta\right)^2 + \beta' v^2 + 2\varepsilon' v + \eta'
\end{aligned}$$

On a $\beta' \neq 0$, car sinon cela signifierait qu'on peut annuler l'intégrale (on pourrait trouver *u*, *v* tels que $F(u,v) = 0$), ce qu'on sait impossible.

Donc $F(u,v) = \alpha\left(u + \frac{\gamma}{\alpha}v + \delta\right)^2 + \beta'\left(v + \frac{\varepsilon'}{\beta'}\right)^2 + \eta''$

Et η'' est le nombre cherché.

F) Théorème de projection sur un convexe complet non vide

Théorème (hors programme) :

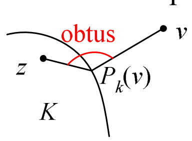
- Soit E un espace préhilbertien, K un convexe non vide complet. Alors :

$\forall v \in E, \exists! y \in K, d(v,K) = \|v - y\|_2$

Pour $v \in E$, un tel *y* est appelé projeté de *v* sur *K*, et on note $y = p_K(v)$

- $p_K(v)$ est caractérisé par $\forall z \in K, \mathrm{Re}(< p_K(v) - z, p_K(v) - v >) \leq 0$

Visualisation par les angles :



Démonstration :

Unicité :

Supposons que $y_1, y_2 \in K$ vérifient $\|v - y_1\|_2 = \|v - y_2\|_2 = d(v, K)$.

Alors $z = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \in K$ (car *K* est convexe), et vérifie :

$4\|v - z\|_2^2 = 2\|v - y_1\|_2^2 + 2\|v - y_2\|_2^2 - \|y_1 - y_2\|_2^2$ (identité du parallélogramme)

Soit $\|v - z\|_2^2 = d(v, K)^2 - \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|_2^2 \leq d(v, K)^2$, avec égalité si et seulement si $y_1 = y_2$

Comme par ailleurs $\|v - z\|_2^2 \geq d(v, K)^2$, on a $y_1 = y_2$ $(= z)$

Existence :

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de *K* telle que $\|v - y_n\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(v, K)$

Montrons que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy :

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, l'égalité de la médiane donne :

$\|y_n - y_m\|_2^2 = 2\|v - y_n\|_2^2 + 2\|v - y_m\|_2^2 - 4\left\|v - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|_2^2$

Or, $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$.

Donc $\left\|v - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|_2 \geq d(v, K)$

Et $\|y_n - y_m\|_2^2 \leq 2\|v - y_n\|_2^2 + 2\|v - y_m\|_2^2 - 4d(v, K)^2$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N, \|v - y_n\|_2^2 \leq d(v, K)^2 + \dfrac{\varepsilon^2}{4}$

Alors pour tous $n \geq m \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|_2^2 &\leq 2\|v - y_n\|_2^2 + 2\|v - y_m\|_2^2 - 4d(v, K)^2 \\
&\leq 2d(v, K)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2d(v, K)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 4d(v, K)^2 \\
&\leq \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans *K* qui est complet.

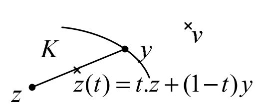
Donc elle converge vers $x \in K$ (car *K* est fermé), et $\|v - x\| = d(v, K)$

Caractérisation par les angles :

On veut montrer que $\forall z \in K, \mathrm{Re}(< p_K(v) - z, p_K(v) - v >) \leq 0$

Méthode de glissement :

Soit $z \in K$, on pose $y = p_K(v)$.



On a alors pour tout $t \in [0;1]$, $\|v - (t.z + (1 - t).p_K(v))\|_2^2 \geq \|v - p_K(v)\|_2^2$

Donc $\|v - p_K(v) - t.(z + p_K(v))\|_2^2 \geq \|v - p_K(v)\|_2^2$

C'est-à-dire $-2t\,\mathrm{Re}(< v - p_K(v), z - p_K(v) >) + t^2\|z - p_K(v)\|_2^2 \geq 0$

Ou $\forall t \in]0;1], t \times \|z - p_K(v)\|_2^2 \geq 2\,\mathrm{Re}(< v - p_K(v), z - p_K(v) >)$

Donc par passage à la limite quand $t \to 0^+$, $\mathrm{Re}(< v - p_K(v), z - p_K(v) >) \leq 0$

Inversement, si $y \in K$ vérifie $\forall z \in K, \mathrm{Re}(< y-z, y-v >) \leq 0$,

Alors $y = p_K(v)$.

En effet, pour tout $z \in K$, on a :

$$\|v-z\|_2^2 = \|v-y+y-z\|_2^2 = \|v-y\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(< v-y, v-z >) + \|y-z\|_2^2$$
$$= \|v-y\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}(< v-y, y-z >) + \|y-z\|_2^2 \geq \|v-y\|_2^2$$

Remarque :

On retrouve le théorème du programme : projection sur un sous-espace F de dimension finie (F est non vide, convexe et complet pour $\| \ \|_F$ car de dimension finie)

En outre, la projection sur $K = F$ de $v \in E$ est caractérisée par

$\forall z \in F, \mathrm{Re}(< p_K(v)-v, p_K(v)-z >) \leq 0$

C'est-à-dire $\forall t \in F, \mathrm{Re}(< p_K(v)-v, t >) \leq 0$

(car $t \in F \mapsto p_K(v)-t \in F$ est bijective)

De plus, on aura aussi $\forall t \in F, \mathrm{Re}(< p_K(v)-v, -t >) \leq 0$ et $\mathrm{Re}(p_K(v)-v, -t) \geq 0$

(Première inégalité : $-t \in F$, deuxième : bilinéarité du produit scalaire)

Donc $\forall t \in F, \mathrm{Re}(< p_K(v)-v, t >) = 0$

Et $\forall t \in F, \mathrm{Im}(< p_K(v)-v, t >) = \mathrm{Re}(< p_K(v)-v, -i.t >) = 0$

C'est-à-dire $\forall t \in F, < p_K(v)-v, t >= 0$

Ou $p_K(v)-v \in F^{\perp}$

Complément :

Théorème de représentation de Riesz :

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire *continue* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$, il existe un unique vecteur $\vec{v} \in \mathbb{H}$ tel que $\forall \vec{x} \in \mathbb{H}, f(\vec{x}) = < \vec{v}, \vec{x} >$

Démonstration :

- Unicité : déjà vue :

Si $\forall \vec{x} \in \mathbb{H}, < \vec{v}, \vec{x} >=< \vec{u}, \vec{x} >$, alors avec $\vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$, $\|\vec{v} - \vec{u}\| = 0$, c'est-à-dire $\vec{v} = \vec{u}$.

- Existence :

Si f est la forme linéaire nulle, $\vec{v} = \vec{0}$ convient.

Sinon, on note $F = \ker f$

Alors F est un sous-espace fermé (car f est continue) de $\mathbb{H}$ complet, donc F est complet.

On peut donc appliquer le théorème de projection avec $K = F$:

Soit $v_0 \in \mathbb{H}$ tel que $f(v_0) \neq 0$ et $a = p_F(v_0) \in F$ ($v_0 \neq a$ car $v_0 \notin F$)

On a alors $\forall t \in F, < v_0 - a, t >= 0$

Le vecteur $\vec{v} = k.(v_0 - a)$ où $k = \dfrac{f(v_0)}{< v_0 - a, v_0 >}$ ($< v_0 - a, v_0 >= \|v_0 - a\|^2 > 0$) vérifie

$\forall \vec{x} \in \mathbb{H}, < \vec{v}, \vec{x} >= f(x)$

En effet :

C'est vrai sur F, car les deux membres sont nuls, et c'est vrai pour $x = v_0$ car :

$< \vec{v}, v_0 >= k. < v_0 - a, v_0 >= f(v_0)$

Le théorème du programme :

Si F est un sous-espace de dimension finie de E, on a $F \oplus F^{\perp} = E$.

C'est encore vrai pour un sous-espace F de E complet pour $\| \ \|_2$, c'est-à-dire que si F est complet pour $\| \ \|_2$, alors $F \oplus F^{\perp} = E$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration :

F est en particulier complet non vide, donc on peut définir $p_F : E \to F$ caractérisé par $\forall x \in E, \forall f \in F, \mathrm{Re}(< p_F(x) - f, p_F(x) - x >) \leq 0$

C'est-à-dire, comme F est un espace vectoriel :

$\forall x \in E, \forall g \in F, \mathrm{Re}(< g, p_F(x) - x >) \leq 0$

Puis en faisant les « transformations » $g \mapsto -g$, $g \mapsto i.g$:

$\forall x \in E, \forall g \in F, < g, p_F(x) - x > = 0$

C'est-à-dire $\forall x \in E, p_F(x) - x \in F^{\perp}$

Alors :

$F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (toujours vrai)

Et pour $x \in F$, $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^{\perp}}$.

Donc $F \oplus F^{\perp} = E$.

Calcul de $(F^{\perp})^{\perp}$:

Soit $x \in E$; x s'écrit $x = f + g$ où $f \in F$, $g \in F^{\perp}$.

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in (F^{\perp})^{\perp} &\Leftrightarrow \forall k \in F^{\perp}, 0 = < x, k > = \underbrace{\overline{< f, k >}}_{=0} + \overline{< g, k >} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in F^{\perp}, 0 = < g, k > \\ &\Leftrightarrow g = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in F \end{aligned}$$

III Compléments

A) Théorème de Banach–Steinhaus

Lemme :

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fermés (au sens de l'inclusion) d'un espace de Banach E.

Si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$, alors à partir d'un certain rang, les F_n sont d'intérieur non vide.

Démonstration :

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n = E \setminus F_n$, qui est ouvert dans E.

Alors $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, qui n'est pas dense dans E.

Alors l'un des O_n, disons O_N, n'est pas dense dans E. En effet, si tous les O_n étaient denses dans E, alors leur intersection le serait aussi d'après la propriété de Baire puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Donc il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \cap O_N = \varnothing$, c'est-à-dire que $B(x_0, r) \subset F_N$, qui est donc d'intérieur non vide, d'où ensuite le résultat puisque la suite est croissante.

Théorème de Banach–Steinhaus :
Soit E un espace de Banach, F un evn.
On considère une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'éléments de $L_C(E,F)$.
Alors :
(1) $(T_i)_{i\in I}$ est bornée si et seulement si pour tout $x \in E$, $(T_i(x))_{i\in I}$ l'est.
(2) Si ce n'est pas le cas, l'ensemble des $x \in E$ tels que $(T_i(x))_{i\in I}$ n'est pas bornée est dense dans E.
En particulier, pour une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors l'ensemble des $x \in E$ tels que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge est dense dans E.

Démonstration :
Si $(T_i)_{i\in I}$ est bornée, alors pour tout $x \in E$, $(T_i(x))_{i\in I}$ est aussi bornée :
Si on note M tel que $\forall i \in I, \|T_i\| \leq M$, alors pour tout $x \in E$, on a :
$\forall i \in I, \|T_i(x)\| \leq \|T_i\|\|x\| \leq M\|x\|$, donc $(T_i(x))_{i\in I}$ est bornée.
On note maintenant A l'ensemble des $x \in E$ tels que $(T_i(x))_{i\in I}$ est bornée.
On a ainsi $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{i\in I}\{x \in E, \|T_i(x)\| \leq n\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ où $F_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E, \|T_i(x)\| \leq n\}$, intersection de fermés donc fermé.
Supposons que $A = E$. Alors d'après le lemme, à partir d'un certain rang N, les F_n sont d'intérieur non vide.
Il existe donc $x_0 \in F_N$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r) \subset F_N$, c'est-à-dire tels que pour tout $i \in I$ et $z \in E$ de module 1, $\|T_i(x_0 + r.z)\| \leq N$
Ainsi, pour tout $z \in E$ de module 1 et tout $i \in I$,

$$\begin{aligned} r.\|T_i(z)\| &= \|T_i(r.z)\| = \|T_i(x_0 + r.z) - T_i(x_0)\| \\ &\leq \|T_i(x_0 + r.z)\| + \|T_i(x_0)\| \\ &\leq 2N \end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in I$, $\|T_i\| \leq \dfrac{2N}{r}$.
Donc $(T_i)_{i\in I}$ est bornée, d'où l'équivalence.
Si maintenant $(T_i)_{i\in I}$ n'est pas bornée, alors les F_n sont tous d'intérieur vide, donc A est d'intérieur vide, et son complémentaire est dense dans E.

B) Utilisation de l'orthonormalisation

Théorème de Riesz hilbertien :
La boule unité fermée d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$ est compacte si, et seulement si, l'espace est de dimension finie.

Démonstration :
Déjà, si E est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte.

Supposons que E n'est pas de dimension finie, et montrons que la boule n'est pas compacte.

Alors E admet une famille libre dénombrable, disons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on peut supposer orthonormale avec le procédé d'orthonormalisation.

Ainsi, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la boule unité, et dont aucune sous-suite n'est de Cauchy, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $m>n$, on a $\|e_n-e_m\|_2=\sqrt{2}$ donc la suite n'a pas de valeur d'adhérence. Donc la boule unité n'est pas compacte.

Attention :

L'espace vectoriel engendré par une famille est l'ensemble des combinaisons linéaires *à support fini* d'éléments de la famille. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}e_n$ n'est pas à priori dans $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriétés :

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale d'un espace préhilbertien *E*, et *F* le sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

(1) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne_n$ vérifie le critère de Cauchy pour $\|\ \|_2$ associée au produit scalaire si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l_2$.

(2) Pour tout $x\in E$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}<e_n,x>e_n$ vérifie le critère de Cauchy (mais peut diverger), et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}|<e_n,x>|^2\leq\|x\|_2^2$. La distance de *x* à *F* est $\sqrt{\|x\|_2^2-\sum_{n=0}^{+\infty}|<e_n,x>|^2}$.

En particulier, $x\in E$ est dans l'adhérence de *F* si et seulement si $x=\sum_{n=0}^{+\infty}<e_n,x>e_n$ (au sens de la convergence pour $\|\ \|_2$).

Démonstration :

(1) : Si la suite de terme général $S_N=\sum_{k=0}^{N}a_ke_k$ est de Cauchy, alors $\|S_N\|_2^2=\sum_{k=0}^{N}|a_k|^2$ est bornée, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l_2$.

Réciproquement, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l_2$, alors pour $m>n$, on a $\|S_m-S_n\|_2^2=\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|^2\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|^2$.

(2) : Soit $x\in E$. On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $F_n=\mathrm{Vect}(e_k)_{k\leq n}$. La distance de *x* à F_n est alors d_n telle que $d_n^2=\|x\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}|<e_k,x>|^2$. Donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante, donc converge vers $a\geq 0$.

Comme tout élément de *F* est dans l'un des F_n, pour tout $f\in F$ on a $\|x-f\|_2\geq a$ et donc $d(x,f)\geq a$. Comme il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *F* telle que $\|x-u_n\|_2\to a$, on a même $d(x,f)=a$. Pour le cas particulier : $x\in\overline{F}\Leftrightarrow d(x,F)=0$.

C) Espaces préhilbertien séparables

Définition :

Un espace métrique (X,d) est dit séparable lorsqu'il admet une famille dénombrable et dense.

On a une caractérisation topologique du caractère séparable :

Propriété :

Un espace métrique (X,d) est séparable si et seulement si il existe une famille finie ou dénombrable d'ouverts non vides $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout ouvert non vide ω de X, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $O_n\subset\omega$.

Démonstration :

Si un espace métrique admet une partie dénombrable et dense, il suffit de prendre les boules ouvertes centrées en les points de cette partie et de rayons rationnels.

Pour la réciproque, il suffit de prendre un point dans chaque O_n.

Exemples :

(1) Les espaces normés de dimension finie sont séparables : si $(V_1,...V_n)$ est une base de E, alors $\left\{\sum_{j=1}^{n} r_j V_j, (r_1,...r_n)\in\mathbb{Q}^n\right\}$ est dénombrable et dense.

(2) Toute partie d'un espace métrique séparable, munie de la distance induite, est séparable.

(3) L'espace l_2 est un espace de Hilbert séparable car l'ensemble des suites complexes à support fini et à coefficients dans $\mathbb{Q}[i]=\{a+ib, a,b\in\mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense.

Théorème :

(1) Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si soit il est de dimensions finie soit il admet une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrant un sous-espace dense.

(2) Pour une telle suite, on a pour tous $x,y\in E$:

$x=\sum_{n=1}^{+\infty}<e_n,x>e_n$, au sens de la convergence pour $\| \|_2$ dans E.

$<x,y>=\sum_{n=1}^{+\infty}<e_n,x><e_n,y>$ où la série (complexe) converge absolument.

Définition :

Une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrant un sous-espace dense d'un espace préhilbertien est dite totale.

Démonstration :

(1) Si E n'est pas de dimension finie, alors d'une famille dénombrable dense $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite libre $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrant le même sous-espace $F=\mathrm{Vect}(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En orthonormalisant cette famille libre, on obtient une base orthonormale de F qui est dense dans E.

(2) La première formule résulte des propriétés vues précédemment sur les suites orthonormales.

Pour la deuxième :

Pour $x, y \in E$, on a $y = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} < e_k, y > e_k$ (au sens de $\| \|_2$) donc par continuité du produit scalaire, $< x, y >= \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} < e_k, y >< x, e_k > = \sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, y >< x, e_n >$.

Corollaire :

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale d'un espace préhilbertien E, alors l'application $A : x \in E \mapsto (< e_n, x >)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$ est linéaire, injective et isométrique (elle conserve $\| \|_2$ et $< , >$)

Si de plus E est complet, alors A est même bijective.

Démonstration :

Seul de dernier point est à montrer : si E est complet, alors pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge dans E. Soit x la somme de cette série.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $< e_p, x >= \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n < e_p, e_n > = a_p$

Donc $A(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et A est surjective.

D) Séparation des convexes dans un Hilbert

On ne considère ici que le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; le cas complexe s'y ramène en considérant la structure préhilbertienne réelle définie par $\mathrm{Re}(< , >)$.

Soit H un espace de Hilbert.

On appelle demi-espace fermé toute partie X de H de la forme $X = \{x \in H, l(x) \geq k\}$ où l est une forme linéaire continue non nulle et k un réel.

Théorème :

Soit C un convexe fermé non vide de l'espace *réel* H.

(1)On suppose que C ne contient pas $a \in H$. Alors il existe une forme linéaire continue $l \in H'$ telle que $\forall x \in C, l(x) > l(a)$

(2) C est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant

(3) Soient C_1, C_2 deux convexes non vides disjoints de H où C_1 est compact et C_2 fermé. Alors il existe $l \in H'$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2, l(x_1) > k > l(x_2)$.

Démonstration :

(1) : Soit $b \in C$ la projection de a sur C, et $l : x \mapsto < b - a, x >$. Pour $y \in C$, on a

$< b - a, y > - < b - a, a >=< b - a, y - a >=< b - a, y - b > + \|b - a\|_2^2 \geq \|b - a\|_2^2$.

(Vu dans la caractérisation de $b = p_C(a)$)

(2) : découle de (1)

(3) : Considérons $C = \{x_1 - x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$.

On vérifie alors C est convexe, et il ne contient pas 0.

Il est aussi fermé car si $(x_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de C_1 et C_2 telles que $x_1(n)-x_2(n)$ tend vers $a\in E$, alors par extraction on peut supposer $(x_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $y_1\in C_1$. Mais alors $x_2(n)=x_1(n)-(x_1(n)-x_2(n))$ converge aussi vers $y_2\in C_2$, et on a $a=y_1-y_2\in C$.

On applique ensuite (1) avec $a=0$

Théorème : Lax–Milgram :

Soit H un espace de Hilbert, u un endomorphisme continu de H tel qu'il existe $c>0$ de sorte que $\forall x\in H, \mathrm{Re}(<u(x),x>)\geq c\|x\|_2^2$.

Alors u est un homéomorphisme de H et $\left\|u^{-1}\right\|\leq 1/c$.

Preuve :

Pour montrer que u est surjectif, on montre que son image F est fermée et dense dans H, ce qui établira le résultat puisque u est continu.

Déjà, F est fermée :

Soit $y=\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u(x_n)\in\overline{F}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de H.

Pour $m,n\in\mathbb{N}$, on a $\|x_n-x_m\|_2\leq\frac{1}{c}\|u(x_n)-u(x_m)\|_2$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H complet, et donc converge vers $a\in E$. Par continuité, on a $y=u(a)\in F$.

F est aussi dense :

On a en effet $F^{\perp}=\{0\}$ puisque pour $z\in F^{\perp}$, on a $0=\mathrm{Re}(<u(z),z>)\geq c\|z\|_2^2$, donc $z=0$.

Enfin, l'inégalité de Cauchy–Schwarz montre que $\forall x\in E, c\|x\|_2^2\leq\|u(x)\|_2\|x\|_2$, soit $c\|x\|_2\leq\|u(x)\|_2$, d'où u est injectif (si $u(x)=0$, alors $x=0$), et u^{-1} est continu car

$$\forall y\in E, \exists x\in E, \left\|u^{-1}(y)\right\|_2=\|x\|_2\leq\tfrac{1}{c}\|u(x)\|_2=\|y\|_2$$

E) Théorie de Riesz des opérateurs autoadjoints compacts

- Compacité faible de la boule unité :

La boule unité d'un espace de Hilbert H n'est compacte que si H est de dimension finie, mais en toute dimension on peut souvent utiliser des extractions convergentes en un sens affaibli. Par exemple, dans l_2, si on note $e_p=(\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ la $n+1$-ième suite de la base canonique, alors pour tout $u\in l_2$, la suite $(<e_n,u>)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

On dit dans ce cas que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0. Plus généralement, il est clair que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace préhilbertien E converge pour $\| \ \|_2$ (c'est-à-dire qu'il y a convergence « forte ») vers $a\in E$, alors :

$\forall x\in E, <u_n,x>\to<a,x>$ (convergence faible)

Le théorème suivant met en évidence un autre des principaux intérêts des espaces de Hilbert.

Théorème :

(1) Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace de Hilbert H, il existe $y\in H$ et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tels que, pour tout $z\in H$, $<x_{\varphi(p)},z>$ tend vers $<y,z>$

(2) De plus, si $\|x_{\varphi(p)}\|_2$ tend vers $\|y\|_2$, alors $x_{\varphi(p)}$ tend vers y.

Démonstration :

(1) Soit E l'espace engendré par les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si E est de dimension finie, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence $y\in E$ (car x est borné) et y convient.

Sinon, E contient une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui l'engendre.

On se place dans F adhérence de E dans H. Alors F est un espace de Hilbert (fermé dans un espace complet)

Soit M un majorant des $\|x_n\|_2, n\in\mathbb{N}$. La suite $(<x_p,e_0>)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H (par M), donc il existe une extraction telle que $(<x_{\varphi_0(p)},e_0>)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

De même, $(<x_{\varphi_0(p)},e_1>)_{p\in\mathbb{N}}$ est borné donc admet une extraction $(<x_{\varphi_0\circ\varphi_1(p)},e_1>)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente. En recommençant et en utilisant le procédé diagonal ($\varphi(p)=\varphi_0\circ\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(p)$)

On trouve φ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(<x_{\varphi(p)},e_n>)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire b_n.

De plus, il existe M tel que, pour tout p, $M^2\geq\|x_{\varphi(p)}\|_2^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|<e_n,x_{\varphi(p)}>\right|^2$

Pour N fixé, on a donc $\forall p\in\mathbb{N},\sum_{n=0}^{N}\left|<e_n,x_{\varphi(p)}>\right|^2\leq M^2$. Donc, par passage à la limite, $\sum_{n=0}^{N}|b_n|^2\leq M^2$. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}b_ne_n$ converge dans H (qui est complet).

En posant $y=\sum_{n=0}^{+\infty}b_ne_n$, on a évidemment $\lim_{p\to+\infty}<x_{\varphi(p)},z>=<y,z>$ pour tout $z\in E$.

Pour $z\in F$ et $\varepsilon>0$, il existe $z'\in E$ tel que $\|z-z'\|_2<\dfrac{\varepsilon}{4M}$ et un entier p_0 tel que pour tout $p\geq p_0$, $\left|<x_{\varphi(p)},z'>-<y,z'>\right|\leq\varepsilon/2$.

Pour $p\geq p_0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|<x_{\varphi(p)},z>-<y,z>\right|&=\left|<x_{\varphi(p)},z'>-<y,z'>+<x_{\varphi(p)}-y,z-z'>\right|\\&\leq\tfrac{\varepsilon}{2}+\|x_{\varphi(p)}-y\|_2\|z-z'\|_2\leq\varepsilon\end{aligned}$$

La propriété à montrer est donc vraie sur F.

Elle l'est aussi sur $F^\perp$ (tout est nul).

Donc elle l'est sur $H=F\oplus F^\perp$ (F est complet)

Pour (2) :

Si $\|x_{\varphi(p)}\|_2$ tend vers $\|y\|_2$, alors on a :

$$\|x_{\varphi(p)}-y\|_2^2=\|y\|_2^2+\|x_{\varphi(p)}\|_2^2-2\,\mathrm{Re}(<y,x_{\varphi(p)}>)\to\|y\|_2^2 2-2\,\mathrm{Re}(<y,y>)=0$$

Adjoint d'un endomorphisme (vu plus en détail dans le cours sur les espaces hermitiens)

Soit u un endomorphisme de l'espace préhilbertien *E*. On dit que u admet u^* pour adjoint lorsque $\forall x, y \in E, < u(x), y >=< x, u^*(y) >$

Propriété :

Un endomorphisme a au plus un adjoint.

En effet :

Si deux endomorphismes v, w vérifient

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, < u(x), y > &=< x, v(y) > \\ &=< x, w(y) >\end{aligned}$$

Alors $\forall y \in E, \forall x \in E, < x, (v-w)(y) >= 0$

Donc $\forall y \in E, < (v-w)(y), (v-w)(y) >= 0$

Soit $\forall y \in E, v(y) = w(y)$.

- Adjoint d'un endomorphisme : cas d'un Hilbert :

Théorème :

Un endomorphisme u d'un espace de Hilbert a un adjoint si, et seulement si, il est continu.

Démonstration :

Supposons u continu. Pour tout $y \in H$, $x \mapsto < y, u(x) >$ est une forme linéaire continue sur *H*. Donc il existe un unique $u^*(y) \in H$ tel que $\forall x \in H, < y, u(x) >=< u^*(y), x >$

Et on vérifie aisément que u^* est linéaire.

Réciproquement, supposons que u admet u^* comme adjoint, et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la boule unité de *H*, et posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in H$, $l_n(y) =< u(x_n), y >$.

Alors $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues de *H* dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement (vers 0). D'après le théorème de Banach–Steinhaus, la suite $\|\|l_n\|\|$ est donc bornée et donc la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi (on a $\|u(x_n)\|_2 = \|\|l_n\|\|$). Ainsi, u est continue car bornée sur la boule unité.

- Endomorphismes autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert :

Opérateurs autoadjoints :

Un endomorphisme u de *H* est dit autoadjoint lorsque $\forall x, y \in H, < u(x), y >=< x, u(y) >$

Propriétés :

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace de Hilbert *H*.

On a $\forall x \in H, < u(x), x > \in \mathbb{R}$.

Toute valeur propre de u est réelle ; les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux ; u est continu.

Démonstrations :…

Opérateurs compacts :

Un endomorphisme u de *H* est dit compact si toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *H* admet une extraction $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Propriétés :

Tout opérateur compact est continu.

Tout espace propre d'un endomorphisme compact d'un espace de Hilbert *H* associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie.

Démonstration :

Un endomorphisme compact u est borné sur la boule unité de $\mathbb{H}$ car sinon il existerait une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de normes ≤ 1 tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée. On aurait alors une extraction φ de v telle que $\|v_{\varphi(n)}\|_2 \to +\infty$ et la suite $(u(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ contredirait la définition des opérateurs compacts.

Il existe donc un réel k tel que pour tout x de norme 1 on ait $\|u(x)\|_2 \leq k$

C'est-à-dire $\|u(x)\|_2 \leq k\|x\|$ puis le résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{H}$ (par homogénéité)

Donc u est continue.

Soit F un espace propre associé à une valeur propre non nulle λ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la boule unité de F. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u(\frac{x_n}{\lambda}))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite convergente.

Donc la boule unité fermée de F est compacte, c'est-à-dire que F est de dimension finie.

Valeurs propres des opérateurs autoadjoints compacts :

Les opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert sont les plus simples à étudier (après ceux dont l'image est de dimension finie)

On considère un opérateur autoadjoint u d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$.

Propriétés :

(1) u a une famille finie ou dénombrable de valeurs propres et si elle est dénombrable, on peut la classez dans une suite tendant vers 0.

(2) Tout sous-espace F de $\mathbb{H}$, fermé et non réduit à $\{0\}$, stable par u et non inclus dans le noyau de u contient un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. En particulier, u a des valeurs propres.

Démonstration :

Pour (1) :

Soit $\varepsilon = \frac{1}{N} > 0$. Considérons l'ensemble A_ε des valeurs propres λ de u telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$. Supposons que A_ε est infini, on peut trouver une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A_ε et des vecteurs propres unitaires associés $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme u est autoadjoint, les e_n forment un système orthonormal et, si $n \neq m$, on a $\|u(e_m) - u(e_n)\|_2^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\varepsilon^2$

La suite $(u(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc pas de valeur d'adhérence et contredit la définition de u.

Donc l'ensemble des valeurs propres non nulles de u, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}$, est une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis, donc est fini ou dénombrable.

De plus, en numérotant les $|\lambda| \geq 1$ puis ceux tels que $1 > |\lambda| \geq \frac{1}{2}$…ceux tels que $2^{-N} > |\lambda| \geq 2^{-N-1}$, on les classe dans une suite tendant vers 0.

Pour (2) :

Comme F est fermé dans $\mathbb{H}$ complet, c'est un espace de Hilbert pour la structure induite.

La continuité de u assure alors que $\{< u(x), x >, x \in F, \|x\|_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ est non vide, et majoré par $\|u\|$, donc on peut définir $M = \sup\{< u(x), x >, x \in F, \|x\|_2 \leq 1\}$.

- Supposons $M > 0$. Montrons qu'alors M est valeur propre de u.

Par définition de M, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la boule unité de F telle que $< u(x_n), x_n >$ tend vers M. Par homogénéité, on peut supposer que les x_n sont unitaires.

Ainsi, $\forall x\in F, M\|x\|_2^2 - <u(x),x> \geq 0$, c'est-à-dire que $(x,y)\mapsto M<x,y> - <u(x),y>$ est une forme bilinéaire symétrique (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou une forme sesquilinéaire hermitienne (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Dans les deux cas, elle est aussi positive et l'inégalité de Cauchy–Schwarz s'applique donc :

$$\forall y\in F, |M<x_n,y> - <u(x_n),y>|^2 \leq (M\|x_n\|_2^2 - <u(x_n),x_n>)(M\|y\|_2^2 - <u(y),y>)$$

Et donc en particulier $M<x_n,y> - <u(x_n),y>$ tend vers 0 pour tout $y\in F$.

Comme u est compact, on peut extraire de $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(u(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $V_0\in F$.

On pose alors $V_1 = \frac{V_0}{M}$.

Quitte à remplacer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut donc supposer que pour tout $y\in Y$, $<u(x_n),y>$ tend vers $M<V_1,y>$ et $<x_n,y>$ tend vers $<V_1,y>$. Comme de plus u est autoadjoint, $<u(x_n),y> = <x_n,u(y)>$ tend vers $<V_1,u(y)> = <u(V_1),y>$.

Donc par unicité de la limite, on a $\forall y\in F, <u(V_1),y> = M<V_1,y>$

C'est-à-dire $u(V_1) = MV_1$.

De plus, $V_1\neq 0$ car si V_1 était nul, on aurait $u(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $<u(x_n),x_n>\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ qui donnent alors $M=0$ ce qui est faux par hypothèse.

Donc M est bien valeur propre de u.

- Supposons maintenant $M=0$. On peut considérer $m=\inf\{<u(x),x>, x\in F, \|x\|_2\leq 1\}$.

Si $m<0$, on trouve un vecteur propre non nul associé à la valeur propre m. Si $m=M=0$, on a alors pour tout $x\in F$ de module inférieur à 1, $<u(x),x> = 0$, et la formule de polarisation pour la forme sesquilinéaire hermitienne $(x,y)\mapsto <u(x),y>$ donne $\forall x,y\in F, <u(x),y> = 0$ puis $u_{/F} = 0$

Réduction :

Théorème :

Il existe une suite orthonormale $(e_n)_{n\in I}$ finie ou infinie ($I=[\![1,P]\!]$ ou $I=\mathbb{N}^*$), et des scalaires $(\lambda_n)_{n\in I}$, tendant vers 0 si I est infini, tels que si F est l'adhérence de $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in I})$, alors $\ker u = F^\perp$ et pour tout $x\in\mathbb{H}$, on a $x=\sum_{n\in I} <e_n,x> e_n + h$ avec $h\in\ker u$ et $u(x) = \sum_{n\in I}\lambda_n <e_n,x> e_n$.

Démonstration :

Supposons que u a une suite infinie de valeurs propres. Prenons une base orthonormale de chaque espace propre associé à une valeur propre non nulle (ils sont de dimension finie). Avec ces bases, on forme une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u(e_n)=\lambda_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale car les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On note F l'adhérence de l'espace engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors F est un espace de Hilbert (fermé dans un complet), et on a :

$$\forall x\in F, x=\sum_{n\in I} <e_n,x> e_n \text{ et } u(x) = \sum_{n\in I}\lambda_n <e_n,x> e_n.$$

On note alors $G=F^\perp$. Ainsi, $G^\perp = F$ et pour $x\in F\setminus\{0\}$ on a $u(x)\neq 0$ donc $\ker u\cap F = \{0\}$.

Comme F est complet, on a $\mathbb{H}=F\oplus G$ et G est fermé dans $\mathbb{H}$. En appliquant la propriété vue précédemment à G, on voit que si $G\neq\{0\}$, on a $u_{/G}=0$ car sinon il contiendrait un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle ce qui est impossible.

On a donc $G\subset\ker u$, puis $G=\ker u$.

D'où alors l'expression de x et $u(x)$.

Le cas où u a un nombre fini de valeur propres est plus simple…

- Exemple : résolution d'un problème aux limites :

On considère une fonction $Q:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continue strictement positive et on pose $a=\min\limits_{[0,2\pi]} Q>0$

Propriété :

Pour toute fonction $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(2\pi)$, il existe une unique fonction $u=T(f):[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ de classe C^2 telle que $\begin{cases}-u''+Q.u=f\\ u(0)=u(2\pi)=0\end{cases}$

De plus, pour $f,g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continues telles que $f(0)=f(2\pi)$ et $g(0)=g(2\pi)$, on a $\int_0^{2\pi}T(f)'(t)T(g)'(t)+Q(t)T(f)(t)T(g)(t)dt=\int_0^{2\pi}T(f)(t)g(t)dt=\int_0^{2\pi}T(g)(t)f(t)dt$

Démonstration :

Existence :

Le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires assure l'existence de u_1 et v, w de classe C^2 telles que $-u_1''+Qu_1=f$, $-v''+Qv=-w''+Qw=0$ et $u_1(0)=u'_1(0)=v(0)=w'(0)=0$, $v'(0)=w(0)=1$.

Ainsi, u est solution de $-u''+Qu=f$ si et seulement si il existe des réels b et c tels que $u=u_1+bv+cw$ et alors $u(0)=u(2\pi)=0$ équivaut à $\begin{cases}b=0\\ cv(2\pi)=-u_1(2\pi)\end{cases}$.

En plus, on a $v(2\pi)\neq 0$ car sinon on aurait

$$\int_0^{2\pi}v'^2(t)dt=[vv']_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}v(t)v''(t)dt=-\int_0^{2\pi}Q(t)v^2(t)dt\leq -a\int_0^{2\pi}v^2(t)dt$$

Ce qui imposerait $v=0$ sur $[0,2\pi]$ et aboutirait à $v'(0)=0$.

On peut donc choisir b et c tels que $u(0)=u(2\pi)=0$

Unicité :

Si u_1,u_2 sont solutions, alors $u=u_1-u_2$ vérifie $-u''+Qu=0$ et $u(0)=0$ donc on a, d'après l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $u=u'(0)v$. Comme $v(2\pi)\neq 0$, on en déduit que $u=0$.

Pour f et g donnés, on a $T(f)(0)=T(f)(2\pi)=0$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}T(f)'(t)T(g)'(t)dt&=[T(f)T(g)']_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}T(f)(t)T(g)''(t)dt\\&=\int_0^{2\pi}T(f)(t)(g(t)-T(g)(t))dt\end{aligned}$$

D'où la première égalité, et la deuxième par symétrie.