Chapitre 13 : Espaces euclidiens, hermitiens

I Préliminaire

A) Terminologie

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie
Un espace hermitien est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.
Dans les deux cas, ce sont des espaces de Hilbert.

On note dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(E, < , >)$ un espace euclidien/hermitien.

B) Rappels

- Existence de base orthonormale :

Théorème :
Tout espace euclidien/hermitien a des bases orthonormales.

- Sous-espaces :

Théorème :
Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $F \oplus F^{\perp} = E$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$

- Formes linéaires :

Théorème :
Pour tout forme linéaire $l : E \to \mathbb{K}$, il existe un unique $\vec{a} \in E$ tel que :
$\forall \vec{x} \in E, l(\vec{x}) = <\vec{a}, \vec{x}>$
(Déjà vu, mais hors programme hors dimension finie)
Démonstration :
Unicité :
Si $\forall x \in E, <a, x> = <a', x>$
Alors $\forall x \in E, <a - a', x> = 0$, soit $<a - a', a - a'> = 0$, donc $a = a'$
Existence :
Soit $(e_1, ... e_n)$ une base orthonormée de E, on note $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ où $a_i = \overline{l(e_i)}$
Alors pour tout $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a $l(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i x_i = <\vec{a}, \vec{x}>$
Remarque :
On peut utiliser le lemme :
Une partie A de E engendre E si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$
Démonstration :
On a $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$, donc $A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \{0\}^{\perp} = E = ((\mathrm{Vect}(A))^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)$

- Expression en base orthonormée :

Théorème :
Si $(e_1, ... e_n)$ est une base orthonormée de E, alors pour tous $x, y \in E$, on a :
$x = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$, et $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x >< e_i, y >$

C) Matrices remarquables

- Produit scalaire canonique sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$:

Pour $A,B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose $<A,B>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{A}_{i,j}B_{i,j}=\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}\times B)=\mathrm{Tr}({}^tB\times\overline{A})$

Alors $<\,,\,>$ est un produit scalaire.

- Expression du produit matriciel :

Soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$

Alors $({}^t\overline{A}\times B)_{i,j}=<\mathrm{Col}_i(A),\mathrm{Col}_j(B)>$

En effet, $({}^t\overline{A}\times B)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}({}^t\overline{A})_{i,k}B_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_{k,i}B_{k,j}$

- Matrice adjointe de $A\in M_n(\mathbb{K})$:

Définition :

La matrice adjointe de $A\in M_n(\mathbb{K})$, c'est la matrice A^* définie par $A^*={}^t\overline{A}$

(Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $A^*={}^tA$)

Proposition :

On munit $M_{n,1}(\mathbb{K})$ du produit scalaire $<X,Y>={}^t\overline{X}\times Y=\sum_{k=1}^{n}\overline{X}_kY_k$ (en identifiant $M_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$)

Pour tout matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ et $X,Y\in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$<X,AY>=<A^*X,Y>$

En effet, $<A^*X,Y>={}^t\overline{(A^*X)}\times Y={}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A^*}\times Y=<X,AY>$

- Matrices symétriques, antisymétriques, hermitiennes, anti-hermitiennes.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

Une matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique (resp. antisymétrique) lorsque ${}^tA=A$ (resp. ${}^tA=-A$)

Proposition :

Les ensembles $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires, et pour tout $A\in M_n(\mathbb{R})$, on a $\frac{A+{}^tA}{2}\in S_n(\mathbb{R})$ et $\frac{A-{}^tA}{2}\in A_n(\mathbb{R})$.

Si de plus on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, alors $S_n(\mathbb{R})^\perp=A_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

Déjà, les sous-espaces sont supplémentaires, compte tenu de la remarque…

Montrons que $S_n(\mathbb{R})^\perp=A_n(\mathbb{R})$:

Soit $B\in A_n(\mathbb{R})$

Alors pour tout $A\in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tAB)=\mathrm{Tr}({}^tBA)=-\mathrm{Tr}(BA)=-\mathrm{Tr}(AB)=-\mathrm{Tr}({}^tAB)$

Soit $\mathrm{Tr}({}^tAB)=0$.

Donc $B\in S_n(\mathbb{R})^\perp$, d'où une première inclusion, puis l'égalité puisque les deux espaces sont de même dimension.

Attention :

$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ ne sont pas stables par produit.

En fait, pour $A,B\in S_n(\mathbb{R})$, $AB\in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow AB=BA$.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:

On dit que $A\in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne lorsque $A^*=A$, et anti-hermitienne lorsque $A^*=-A$.

Proposition :

- l'ensemble $H_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$
- $A\in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si iA est anti-hermitienne.
- On a $M_n(\mathbb{C})=H_n(\mathbb{C})\oplus iH_n(\mathbb{C})$ (attention : somme de $\mathbb{R}$-ev)

Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{C})=n^2$.

Démonstration :

- …
- Pour $A\in M_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence : $A^*=A \Leftrightarrow (iA)^*=-(iA)$
- $H_n(\mathbb{C})$, $iH_n(\mathbb{C})$ sont des sous-$\mathbb{R}$-ev de $M_n(\mathbb{C})$,

Et $H_n(\mathbb{C})\cap iH_n(\mathbb{C})=\{0\}$ car si $A^*=A$ et $A^*=-A$, alors $A=0$

De plus, $M_n(\mathbb{C})=H_n(\mathbb{C})+iH_n(\mathbb{C})$:

Toute matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit $A=\underbrace{\frac{A+A^*}{2}}_{\in H_n(\mathbb{C})}+i\underbrace{\frac{A-A^*}{2i}}_{\in H_n(\mathbb{C})}$

Enfin, $2\dim_{\mathbb{R}} H_n(\mathbb{C})=\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C})=2n^2$

Remarque :

$A\in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si $\forall i,j\in [\![1,n]\!], \overline{a_{i,j}}=a_{j,i}$

C'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases}\forall i\in [\![1,n]\!], a_{i,i}\in\mathbb{R}\\ \forall i>j, a_{i,j}=\overline{a_{j,i}}\end{cases}$

D) Groupes orthogonaux et unitaires

- Définition :

On dit que $A\in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $A\,{}^tA={}^tAA=I_n$

On dit que $A\in M_n(\mathbb{C})$ est unitaire lorsque $AA^*=A^*A=I_n$

Propriété :

Tout matrice orthogonale est inversible de déterminant ± 1

Toute matrice unitaire est inversible de déterminant de module 1.

(Pour $A\in M_n(\mathbb{C})$, $\det(A^*)=\det({}^t\overline{A})=\det\overline{A}=\overline{\det A}$)

- Groupes O_n, SO_n, U_n, SU_n.

Théorème :

- L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonales est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$. On appelle ce groupe le groupe orthogonal.
- L'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe distingué de $(O_n(\mathbb{R}),\times)$, appelé groupe spécial orthogonal.
- L'ensemble $U_n(\mathbb{C})$ des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ unitaires est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}),\times)$, appelé groupe unitaire.
- L'ensemble $SU_n(\mathbb{C})$ des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ unitaires de déterminant 1 est un sous-groupe distingué de $(U_n(\mathbb{C}),\times)$, appelé groupe spécial unitaire.

Remarque :

$O_n(\mathbb{R}) = U_n(\mathbb{C}) \cap M_n(\mathbb{R})$

$SO_n(\mathbb{R}) = SU_n(\mathbb{C}) \cap M_n(\mathbb{R})$

Démonstration :

(Les deux premiers tirets ont déjà été vu, ou se montrent de la même manière)

- Déjà, $U_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$

$U_n(\mathbb{C})$ n'est pas vide, car contient I_n.

Pour $A, B \in U_n(\mathbb{C})$, $AB^{-1} \in U_n(\mathbb{C})$. En effet,

$(AB^{-1})\times(AB^{-1})^* = AB^{-1}(B^{-1})^* A^* = AB^{-1}\,{}^t\overline{B^{-1}}A^* = AB^{-1}BA^* = I_n$

- $SU_n(\mathbb{C})$ est le noyau du morphisme de groupes

$$\begin{aligned}(U_n(\mathbb{C}),\times) &\to \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}\\ A &\mapsto \det A\end{aligned}$$

Donc un sous-groupe distingué de la source.

(Mais $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas distingué dans $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$!)

- Caractérisation à l'aide de bases orthonormales :

Théorème :

Soit E un espace euclidien/hermitien de dimension n.

Soit $\mathfrak{B}_0$ une base orthonormale de E, $\mathfrak{B}$ une base de E, et P la matrice de passage de $\mathfrak{B}_0$ à $\mathfrak{B}$.

Alors $\mathfrak{B}$ est orthonormale si et seulement si P est orthogonal/unitaire.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{B}_0 = (e_1,\dots e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit $\mathfrak{B} = (v_1,\dots v_n)$ une (autre) base de E.

On note $P = (p_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_0}(\mathfrak{B})$

On a alors $\forall j \in [\![1,n]\!], v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i$

Donc $\forall j,k \in [\![1,n]\!], < v_j, v_k >= \sum_{i=1}^{n} \overline{p_{i,j}}\,p_{i,k} = ({}^t\overline{P}\times P)_{j,k}$

Donc $\mathfrak{B}$ est orthonormale si et seulement si $\forall j,k \in [\![1,n]\!], ({}^t\overline{P}\times P)_{j,k} = \delta_{j,k}$ c'est-à-dire si et seulement si ${}^t\overline{P}\times P = I_n$.

Corollaire :

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $A\in U_n(\mathbb{C})/O_n(\mathbb{R})$

(2) Les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire

(3) Les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire.

Démonstration :

On applique le théorème précédent avec $E=\mathbb{K}^n$, $\mathfrak{B}_0$ sa base canonique qui est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Alors (1) $\Leftrightarrow$ (2) car A est la matrice de passage de $\mathfrak{B}_0$ à $(v_1,...v_n)$ où $(v_1,...v_n)$ est la j-ème colonne de A.

Et (1) $\Leftrightarrow$ (3) car $A\in U_n(\mathbb{C})\Leftrightarrow {}^tA\in U_n(\mathbb{C})$

E) Propriété des endomorphismes d'un espace euclidien/hermitien

Lemmes à connaître :

- Existence de sous-espaces stables

Théorème (déjà vu) :

- Si $u\in L_{\mathbb{C}}(E)$ où E est de dimension n finie ($n\geq 1$), alors u admet au moins une droite stable.
- (HP) Si $u\in L_{\mathbb{R}}(E)$ où E est de dimension finie n ($n\geq 1$), alors u admet au moins un sous-espace stable non nul de dimension inférieure à 2.

- Trigonalisation en base orthonormale :

Lemme (Hors programme) :

Soit E un espace euclidien/hermitien, et $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$.

Si u est trigonalisable, alors u est trigonalisable en base orthonormale.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme $u\in L_{\mathbb{C}}(E)$ est trigonalisable en base orthonormale.

(Remarque : l'énoncé est faux avec « diagonalisable »)

Corollaire :

Toute matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit $A=P^{-1}TP$ où $P\in U_n(\mathbb{C})$ et T est trigonale supérieure.

Démonstration :

Si u est trigonalisable, il existe un drapeau de sous-espaces stables $\{0\}\subset F_1\subset ...\subset F_n=E$ (où $\forall j\in [\![1,n]\!], \dim F_j=j$)

Soit $(e_1,...e_n)$ une base orthonormale de E adaptée au drapeau, c'est-à-dire telle que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $(e_1,...e_j)$ est une base orthonormale de F_j.

Alors $\mathrm{mat}_{(e_1,...e_n)}u$ est trigonale supérieure car $\forall j\in[\![1,n]\!], u(e_j)\in u(F_j)\subset F_j$, c'est-à-dire que $u(e_j)$ se décompose sur $(e_1,...e_j)$.

Théorème spectral dans $\mathbb{C}$ (Hors–programme) :

$A\in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si il existe $P\in U_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$ c'est-à-dire si et seulement A est unitairement diagonalisable à valeurs propres réelles.

Démonstration :

Déjà, si A s'écrit $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$ où $P\in U_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1,..\lambda_n\in\mathbb{R}$,

Alors $A^*=(P^{-1})^*D^*P^*=PDP^{-1}=A$, donc A est hermitienne.

Réciproquement, supposons que A est hermitienne.

Alors A est trigonalisable avec une matrice unitaire.

Ainsi, $A=PTP^{-1}$ où $P\in U_n(\mathbb{C})$ et T est trigonale supérieure.

Ainsi, $T=P^{-1}AP$, donc $T^*=P^*A^*P^{-1}{}^*=P^{-1}AP=T$, donc T est aussi hermitienne, et donc diagonale réelle.

Proposition, définition :

Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est normale lorsque $A^*A=AA^*$.

Alors A est normale si et seulement si il existe $P\in U_n(\mathbb{C})$ et D diagonale tels que $A=PDP^{-1}$, c'est-à-dire que A est normale si et seulement si A est unitairement diagonalisable.

Démonstration :

Si A s'écrit $A=PDP^{-1}$, alors $A^*=(P^{-1})^*D^*P^*=P\overline{D}P^{-1}$

Donc $AA^*=PDP^{-1}P\overline{D}P^{-1}=PD\overline{D}P^{-1}=P\overline{D}DP^{-1}=A^*A$

Réciproquement, supposons A normale.

Alors A s'écrit $A=PTP^{-1}$ où $P\in U_n(\mathbb{C})$ et T est trigonale supérieure.

Mais alors $T=P^{-1}AP$, donc $T^*=P^{-1}A^*P$, soit $TT^*=T^*T$

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice trigonale soit normale :

On a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $(TT^*)_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}t_{i,k}.\bar{t}_{i,k}=\sum_{k=i}^{n}|t_{i,k}|^2$

Et $(T^*T)_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}\bar{t}_{k,i}.t_{k,i}=\sum_{k=1}^{i}|t_{k,i}|^2$

Ainsi, on montre par récurrence (forte) que $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\forall k\geq i+1,t_{i,k}=0$:

- Pour $i=1$, on a $\sum_{k=1}^{n}|t_{1,k}|^2=|t_{1,1}|^2$

Donc $\forall k\geq 2,t_{1,k}=0$.

- Soit $i\leq n-2$, supposons que $\forall l\leq i,\forall k>l,t_{l,k}=0$

Alors $(TT^*)_{i+1,i+1}=(T^*T)_{i+1,i+1}$

Donc $\sum_{k=i+1}^{n}|t_{i+1,k}|^2=\sum_{k=1}^{i+1}|t_{k,i+1}|^2$

Et par hypothèse de récurrence, il reste : $|t_{i+1,i+1}|^2 = \sum_{k=i+1}^{n} |t_{i+1,k}|^2$

C'est-à-dire $\forall k \geq i+2, t_{i+1,k} = 0$

Ce qui achève la récurrence.

Donc T est diagonale.

Proposition :

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est unitaire si et seulement si elle est unitairement diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Démonstration :

Si $A = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in U_n(\mathbb{C})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], |\mu_i| = 1$.

Alors $AA^* = P \begin{pmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\bar{\mu}_n \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I_n = A^*A$

Réciproquement, soit A unitaire.

Alors A est normale, donc A s'écrit $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

Et $AA^* = P \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Donc comme $AA^* = I_n$, on a $\forall i \in [\![1,n]\!], |\lambda_i|^2 = 1$

- Matrice d'un endomorphisme en base orthonormale :

Théorème :

Soit E un espace euclidien/hermitien, et $u \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $\mathfrak{B}$ une base orthonormée de E.

On a alors :

$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots e_n)}(u) = (< e_i, u(e_j) >)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$

Et en particulier $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, u(e_i) >$

Démonstration :

Découle des résultats vus pour les bases orthonormales.

II Géométrie des espaces euclidiens

Ici, $(E,<\ ,\ >)$ désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension n (finie)

A) Adjoint d'un endomorphisme

- Définition, existence et unicité :

Théorème, définition :

Soit $u\in L_{\mathbb{R}}(E)$. Alors :

- Il existe un unique endomorphisme de E, noté u^* et appelé adjoint de u, tel que $\forall (x,y)\in E^2, <x,u(y)>=<u^*(x),y>$
- Pour toute base orthonormée $\mathfrak{B}$, on a $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u^*)={}^t\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$

Démonstration :

Unicité :

Supposons que $v,w\in L_{\mathbb{R}}(E)$ vérifient :

$\forall (x,y)\in E^2, <x,u(y)>=<v(x),y>=<w(x),y>$

Alors, pour tous $x,y\in E$, $<v(x)-w(x),y>=0$

Et donc pour tout $x\in E$ (avec $y=v(x)-w(x)$), $v(x)=w(x)$.

Existence :

Soit $\mathfrak{B}=(e_1,...e_n)$ une base orthonormée de E, et on note $A=\text{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$.

On considère $v\in L_{\mathbb{R}}(E)$ de matrice ${}^tA$ dans $\mathfrak{B}$.

On a alors $\forall (x,y)\in E^2, <x,u(y)>=<v(x),y>$.

En effet, pour $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\in E$, $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j\in E$, on a :

$$<x,u(y)>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j<e_i,u(e_j)>$$

Comme $\mathfrak{B}$ est orthonormée, on a $<e_i,u(e_j)>=A_{i,j}$

Donc $<x,u(y)>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jA_{i,j}$.

Par ailleurs,

$$<v(x),y>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j<v(e_i),e_j>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j<e_j,v(e_i)>$$

Comme $\mathfrak{B}$ est orthonormée, on a $<e_j,v(e_i)>=(\text{mat}_{\mathfrak{B}}(v))_{j,i}=\left({}^tA\right)_{j,i}=A_{i,j}$

Et donc $<x,u(y)>=<v(x),y>$.

- Propriétés :

Théorème :

L'application $u\mapsto u^*$ est un anti-automorphisme involutif de l'algèbre $(L_{\mathbb{R}}(E),+,\circ,\cdot)$, c'est-à-dire que pour tous $u,v\in L_{\mathbb{R}}(E)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

- $(u+\lambda v)^*=u^*+\lambda v^*$
- $(u\circ v)^*=v^*\circ u^*$
- $\text{Id}_E^*=\text{Id}_E$
- $(u^*)^*=u$

Démonstration :
On fixe $\mathfrak{B}$ une base orthonormée de E.
Ensuite, l'étude de $u \mapsto u^*$ revient à celle de $A \mapsto {}^tA$

Propriété de l'adjoint d'un morphisme :

Théorème :
Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$. Alors :
(1) u et u^* ont le même polynôme caractéristique, donc les même valeurs propres.
(2) $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^{\perp}$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ker(u^* - \lambda \mathrm{Id}) = (\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}))^{\perp}$
(3) Un sous-espace F de E est stable par u^* si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u.
Remarque : on a même $\min u = \min u^*$

Démonstration :
Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale de E, $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$.
Alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u^*) = {}^tA$
Donc $\chi_{u^*} = \chi_{{}^tA} = \chi_A = \chi_u$
On a $\ker(u^*) \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$:
Pour $x \in \ker u^*$ et $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$ et :
$< x, y >=< x, u(z) >=< u^*(x), z >= 0$
Donc comme c'est valable pour tout $y \in \operatorname{Im} u$, $x \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.
Et $\dim \ker u^* = n - \mathrm{rg}(u^*) = n - \mathrm{rg}({}^tA) = n - \mathrm{rg}(A) = n - \dim \operatorname{Im} u = \dim (\operatorname{Im} u)^{\perp}$
D'où la première égalité.
Pour la deuxième :
$(\ker u)^{\perp} = (\ker((u^*)^*))^{\perp} = ((\operatorname{Im} u^*)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{Im} u^*$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\ker(u^* - \lambda \mathrm{Id}_E) = \ker((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^*) = (\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E))^{\perp}$
Stabilité :
Soit F un sous-espace de E stable par u^*.
On veut montrer que $F^{\perp}$ est stable par u, c'est-à-dire que $\forall y \in F^{\perp}, u(y) \in F^{\perp}$, ou encore que $\forall y \in F^{\perp}, \forall f \in F, < u(y), f >= 0$
On a en effet, pour $y \in F^{\perp}$ et $f \in F$,
$< u(y), f >=< f, u(y) >=< u^*(f), y >= 0$
Réciproque : c'est la même chose en remplaçant u^* par u.

B) Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

- Définition :

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$
Alors u est dit autoadjoint (ou symétrique) lorsque $u^* = u$
antisymétrique lorsque $u^* = -u$
orthogonal lorsque $u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$

- Caractérisation des autoadjoints :

Théorème :
Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) u est autoadjoint
(2) $\forall (x,y)\in E^2, <x,u(y)> = <u(x),y>$
(3) La matrice de u dans une base orthonormale est symétrique.
(4) La matrice de u dans toute base orthonormale est symétrique.

Démonstration :
$(1)\Rightarrow(4)$:
Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme autoadjoint de E.
On a alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u^*) = {}^t\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, donc $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)\in S_n(\mathbb{R})$
$(4)\Rightarrow(3)$: ok (il existe des bases orthonormales)
$(3)\Rightarrow(1)$: Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale telle que $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = S\in S_n(\mathbb{R})$
Alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u^*) = {}^tS = S$ car $\mathfrak{B}$ est orthonormale. Donc $u^* = u$

- Caractérisation des endomorphismes orthogonaux :

Théorème :
Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) u est orthogonal
(2) $\forall (x,y)\in E^2, <u(x),u(y)> = <x,y>$
(3) $\forall x\in E, \|u(x)\| = \|x\|$
(4) La matrice de u dans une base orthonormale est orthogonale
(5) La matrice de u dans toute base orthonormale est orthogonale.

Démonstration :
$(1)\Rightarrow(2)$:
On a $u^*\circ u = u\circ u^* = \mathrm{Id}_E$
Donc pour $(x,y)\in E^2$, $<u(x),u(y)> = <u^*\circ u(x),y> = <x,y>$.
$(2)\Rightarrow(3)$: On a $\forall x\in E, \|u(x)\| = \sqrt{<u(x),u(x)>} = \sqrt{<x,x>} = \|x\|$
$(3)\Rightarrow(1)$:
Pour $(x,y)\in E^2$, on a $\|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$
Donc en développant,
$\|u(x)\|^2 + 2<u(x),u(y)> + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2$
Et donc $\forall (x,y)\in E^2, <u(x),u(y)> = <x,y>$
C'est-à-dire $\forall (x,y)\in E^2, <u^*\circ u(x),y> = <x,y>$
Donc $u^*\circ u$ est l'adjoint de l'identité donc $u^*\circ u = \mathrm{Id}_E$
(4), (5) : …

- Définition :

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.
C'est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL(E),\circ)$, appelé groupe orthogonal.

Proposition :
Pour tout $u\in O(E)$, on a $\det u = \pm 1$.

Démonstration : la matrice de u en base orthonormale est orthogonale donc de déterminant ± 1.

L'ensemble des endomorphismes de déterminant 1 est noté $SO(E)$; c'est un sous-groupe de $(O(E),\circ)$, appelé groupe spécial orthogonal de E. Les éléments de $SO(E)$ sont appelés des rotations.

C) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles : théorème spectral

- Théorème :

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors :

(1) u est diagonalisable est ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux

(2) C'est-à-dire qu'il existe une base orthonormale $\mathfrak{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.

Théorème :

Toute matrice symétrique réelle A est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1,...\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$.

Démonstrations :

Déjà : pour $A\in S_n(\mathbb{R})$, χ_A est scindé.

En effet, soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propres de A, X vecteur colonne non nul tel que $AX=\lambda X$. Alors :

${}^t\overline{X}AX=\lambda{}^t\overline{X}X$ d'une part,

Et ${}^t\overline{X}AX={}^t\overline{(AX)}X=({}^t\overline{\lambda X})X=\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$ d'autre part.

Comme $X\neq 0$, on a ${}^t\overline{X}X=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0$

Donc $\overline{\lambda}=\lambda$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Maintenant :

Pour le premier théorème :

- Déjà, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

En effet, soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, et soient x et y deux vecteurs propres associés à λ et μ.

On a $<u(x),y>=<\lambda x,y>=\lambda<x,y>$ d'une part,

Et $<u(x),y>=<x,u(y)>=<x,\mu y>=\mu<x,y>$ d'autre part.

Donc $<x,y>=0$.

Donc les espaces propres associés à λ et μ sont orthogonaux.

- Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout espace E euclidien de dimension n, un endomorphisme autoadjoint u de E est diagonalisable en base orthonormale.

Pour $n=1$, tout endomorphisme est diagonal donc diagonalisable en base orthonormale.

Soit $n \geq 2$, on suppose que tout endomorphisme autoadjoint en dimension $\leq n-1$ est diagonalisable. Soit E un espace euclidien de dimension n.

On considère $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ autoadjoint.

Alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ car si on note $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$ où $\mathfrak{B}$ est orthonormale, alors A est symétrique et donc $\chi_u = \chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Donc u a au moins une valeur propre réelle λ.

Soit E_λ l'espace propre associé.

Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par $u^* = u$ car E_λ est stable par u.

On considère alors $v = u_{/E_\lambda^\perp}$.

Alors $v \in L_{\mathbb{R}}(E_\lambda^\perp)$.

De plus, v est autoadjoint.

(Car $\forall (x,y) \in E^2, < v(x), y >=< u(x), y >=< x, u(y) >=< x, v(y) >$)

Comme $\dim E_\lambda^\perp < \dim E$, par hypothèse de récurrence, v est diagonalisable en base orthonormale, et il existe une base orthonormale $(e_1,...e_p)$ de $E_\lambda^\perp$ constituée de vecteurs propres de v donc de u.

On considère de plus $(e_{p+1},...e_n)$ une base orthonormale de E_λ.

Ainsi $(e_1,...e_n)$ est une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

Pour le deuxième théorème :

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, et $u \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire naturel.

Ainsi, la base canonique est aussi orthonormale.

Donc u est autoadjoint, et il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormale de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base s'écrive $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont réels.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathfrak{B}$.

Alors P est orthogonale car les deux bases sont orthonormales.

Et on a de plus $A = P\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)P^{-1}$ d'où le résultat.

Autre démonstration du théorème spectral : méthode variationnelle.

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ autoadjoint, où E est de dimension $n \geq 1$.

On montre par récurrence sur n que u est diagonalisable en base orthonormale.

Pour $n = 1$ le résultat est toujours aussi évident.

Soit $n \geq 2$ supposons le résultat vrai pour $n-1$.

On pose alors pour $x \in E$, $\varphi(x) =< x, u(x) >$.

On note Σ la sphère unité de E, compacte car fermée, bornée en dimension finie.

On note $M = \sup_{x \in \Sigma} \varphi(x)$; il existe donc $e_1 \in \Sigma$ tel que $\varphi(e_1) = M$.

Alors e_1 est valeur propre de u associée à M.

En effet :

Par le choix de e_1, on a pour tout $x \in \Sigma$, $\varphi(x) \leq M$

Donc par homogénéité, $\forall x \in E^2, \varphi(x) \leq M\|x\|^2$

On a alors, pour tout $y \in E$:

$M\|y+e_1\|^2 \geq \varphi(y+e_1)$

Et donc

$$0 \leq M\|y+e_1\|^2 - \varphi(y+e_1) = M(\|y\|^2 + 2<y,e_1> + \|e_1\|^2)$$
$$- <y,u(y)> - <e_1,u(e_1)> - 2<u(e_1),y>$$

Mais $<e_1,u(e_1)> = \varphi(e_1) = M$, et $\|e_1\|^2 = 1$

Donc $0 \leq M\|y\|^2 + 2M<y,e_1> - <y,u(y)> - 2<u(e_1),y>$

Ainsi, pour tout $z \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$Mt^2\|z\|^2 - t^2\varphi(z) + 2t(M<z,e_1> - <u(e_1),z>) \geq 0$

Or, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $(\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + bt \geq 0) \Rightarrow b = 0$

Donc ici pour tout $z \in E$, $<Me_1 - u(e_1), z> = 0$

C'est-à-dire, avec $z = Me_1 - u(e_1)$, $u(e_1) = Me_1$

On peut ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{/e_1^\perp}$, car $H = e_1^\perp$ est stable par *u* et $u_{/H}$ est encore autoadjoint.

- Décomposition spectrale d'un endomorphisme symétrique :

Rappel :

Soit *E* un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, *u* un endomorphisme de *E* diagonalisable

Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda$ où E_λ est l'espace propre de *u* associé à la valeur propre λ.

Et si on note p_λ le projecteur sur E_λ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in \mathrm{sp}(u)\setminus\{\lambda\}} E_\mu$, alors :

$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \lambda p_\lambda$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathrm{sp}(u)$, $p_\lambda \circ p_\mu = \delta_{\mu,\lambda} p_\lambda$

Théorème :

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien *E*.

On note $\lambda_1, \dots \lambda_p$ les valeurs propres de *u*, distinctes, et pour $i \in [\![1,n]\!]$, p_i le projecteur orthogonal sur E_{λ_i}.

Alors $p_1, \dots p_p$ sont les projecteurs spectraux de *u*, et on a :

$\forall i,j \in [\![1,n]\!], p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, et $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$.

Démonstration :

Découle du rappel et du fait que les E_λ sont deux à deux orthogonaux.

D) Norme triple d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Rappel :

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien, $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$, on pose $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$

Alors $\|u\|$ est le plus petit réel *k* positif tel que *u* est *k*-lipschitzienne :

$$\|u\| = \min\{k > 0, \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|\}$$

Théorème :

Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien, $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$.

- Si u est symétrique, alors $\|u\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(u)\}$, c'est-à-dire le rayon spectral de *u*.
- Pour *u* quelconque, on a :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}}|< x, u(y) >| = \|u^*\| = \sqrt{\|u \circ u^*\|} = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$$

NB :

$u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont symétriques.

Démonstration : avec le théorème spectral :

Intérêt : dans une base orthonormée de vecteurs propres, tout s'exprime simplement : le produit scalaire, la norme associée, l'endomorphisme lui-même…

Soit $(e_1, \dots e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de *u*.

On note λ_i la valeur propre associée à e_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$, on a $\|u(x)\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n}|x_j|^2|\lambda_j|^2$

Pour *x* de norme inférieure à 1, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2 \leq 1$, on a :

$\|u(x)\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}\rho^2|x_j|^2 \leq \rho^2$ où $\rho = \max_{i\in[\![1,n]\!]}|\lambda_i|$.

De plus, ρ est atteint pour $x = e_{i_0}$ où i_0 est tel que $\rho = |\lambda_{i_0}|$

Ainsi, $\rho = \|u\|$

Maintenant :

Soit $K = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}}|< x, u(y) >|$

Déjà, *K* existe :

Pour tous $x, y \in E$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$|< x, u(y) >| \leq \|x\|\|u(y)\| \leq \|x\|\|y\|\|u\|$

Donc $\{|< x, u(y) >|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$ est non vide (contient 0) et majoré par $\|u\|$

Donc *K* est existe et déjà $K \leq \|u\|$.

On a alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $|< x, u(y) >| \leq K\|x\|\|y\|$ par homogénéité.

En effet, si $x = 0$ ou $y = 0$ l'inégalité est évidente, et sinon $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$ sont unitaires, donc $\left|< \frac{x}{\|x\|}, u(\frac{y}{\|y\|}) >\right| \leq K$, d'où $|< x, u(y) >| \leq K\|x\|\|y\|$

Pour tout $x \in E$ de norme $\|x\| \leq 1$, on a :

$\|u(x)\|^2 = < u(x), u(x) > \leq K\|u(x)\|\|x\|$

Donc $\|u(x)\| \leq K\|x\| \leq K$, d'où $\|u\| \leq K$, et donc $\|u\| = K$

Pour les formules :

On a $\|u^*\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |< x, u^*(y) >| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |< y, u(x) >| = \|u\|$

Et $\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\|\|u\| = \|u\|^2$

Inversement, pour $\|x\| \leq 1$, on a :

$\|u(x)\|^2 = < u(x), u(x) > = < x, u^* \circ u(x) > \leq \|x\|\|u^* \circ u(x)\|$

$\leq \|x\|^2 \|u^* \circ u\| \leq \|u^* \circ u\|$

Donc $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$, puis $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\|$

L'autre égalité se montre en remplaçant u par u^*

Application :

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire naturel)

On cherche $\|u\|$

On a $\mathrm{mat}_{\text{cano}}(u^*) = {}^tA$ (car la base canonique est orthonormale)

Donc $\mathrm{mat}_{\text{cano}}(u^* \circ u) = {}^tAA$

On a $\|u\| = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$, et $\|u^* \circ u\|$ est le rayon spectral de ${}^tAA$, symétrique.

E) Projection et symétries orthogonales, rotations

- Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Théorème :

$p \in L_{\mathbb{R}}(E)$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p = p^*$, c'est-à-dire si et seulement si p est un projecteur et est symétrique.

Conséquence :

Soit $p \in L_{\mathbb{R}}(E)$ de matrice A en base orthonormale.

Pour voir si p est un projecteur orthogonal, il suffit de calculer A^2 et de regarder si A est symétrique.

De plus, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(p) =$ dimension de l'espace sur lequel on projette.

Démonstration :

Soit p un projecteur orthogonal sur F.

Alors déjà $p^2 = p$ car p est un projecteur.

Soit de plus $(e_1,\dots e_p)$ une base orthonormée de F, $(e_{p+1},\dots e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. Ainsi, $(e_1,\dots e_n)$ est une base orthonormée de E, et :

$$\operatorname{mat}_{(e_1,\dots e_n)}(p)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \end{pmatrix}\\ \uparrow \\ p\end{array}$$, qui est une matrice symétrique donc $p^*=p$

Et on a bien de plus l'égalité pour la trace.

Réciproquement, si $p^2=p=p^*$

Alors p est un projecteur sur $F=\operatorname{Im}p=\ker(p-\mathrm{Id})$ parallèlement à $G=\ker p$.

Mais comme $p^*=p$, les sous-espaces propres F et G sont orthogonaux, donc $G=F^\perp$

Proposition (hors programme) :

Soit $u\in L_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u\circ u=u$

Alors u est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|u\|\leq 1$

Démonstration :

- Si u est un projecteur orthogonal, alors $u^*=u$,

Donc $\|u\|=\max\{|\lambda|,\lambda\in\operatorname{sp}(u)\}$

Si $u=0$, on a bien $\|u\|=0\leq 1$

Sinon, $\|u\|=1\leq 1$ (car les seules valeurs propres de u sont 1 et 0)

- Réciproquement, supposons que $\|u\|\leq 1$;

Déjà, u est un projecteur (car $u\circ u=u$), disons sur F parallèlement à G.

On veut montrer que F et G sont orthogonaux.

Soit $(f,g)\in F\times G$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $u(f+tg)=f$

Donc $\|f\|^2\leq\|u\|^2\|f+tg\|^2\leq\|f+tg\|^2=\|f\|^2+2t<f,g>+t^2\|g\|^2$

Soit $\forall t\in\mathbb{R},2t<f,g>+t^2\|g\|^2\geq 0$

Donc $<f,g>=0$

Exercice :

Soient $p_1,p_2\in L_{\mathbb{R}}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.

Alors $p_1\circ p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1\circ p_2=p_2\circ p_1$ et dans ce cas il est orthogonal.

Démonstration :

- Si $p_1\circ p_2=p_2\circ p_1$, alors

$$\begin{aligned}(p_1\circ p_2)^2&=p_1\circ p_2\circ p_1\circ p_2=p_1\circ p_2\circ p_2\circ p_1=p_1\circ p_2\circ p_1\\&=p_1\circ p_1\circ p_2=p_1\circ p_2\end{aligned}$$

Donc c'est un projecteur, et il est orthogonal car

$(p_1\circ p_2)^*=p_2{}^*\circ p_1{}^*=p_2\circ p_1=p_1\circ p_2$

- Si $p_1\circ p_2$ est un projecteur,

Alors il est orthogonal car $\|p_1 \circ p_2\| \leq \|p_1\| \|p_2\| \leq 1$

Et donc $(p_1 \circ p_2)^* = p_2^* \circ p_1^* = p_2 \circ p_1$ d'une part,

Et $(p_1 \circ p_2)^* = p_1 \circ p_2$ d'autre part.

Donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

- Symétries orthogonales :

Définition :

La symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F de E est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Donc $\forall (f,g) \in F \times F^\perp, s(f+g) = f - g$

Si p_F est le projecteur orthogonal sur F, et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F, on a alors $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$

Proposition (hors programme) :

Soit $s \in L_{\mathbb{R}}(E)$.

Deux des conditions suivantes entraînent la troisième :

(1) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$

(2) $s = s^*$

(3) $s \circ s^* = \mathrm{Id}_E$

Et l'ensemble des trois caractérise les symétries orthogonales.

Démonstration :…

- Isométries :

Soit E un espace euclidien de dimension n.

En dimension 1, les isométries de E sont $\pm \mathrm{Id}_E$

En dimension 2, les isométries directes sont les rotations et les isométries indirectes sont les réflexions.

Pour toute base orthonormée $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$, la matrice d'une rotation R dans $\mathfrak{B}$ est de la forme $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(R) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Si deux bases $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ont même orientation, alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_1}(R) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_2}(R)$

Si elles ont une orientation contraire, alors $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_1}(R) = {}^t\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}_2}(R)$

La matrice d'une réflexion dans une base orthonormée $\mathfrak{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ où θ dépend de $\mathfrak{B}$.

Remarque :

Si u est une rotation en dimension 2, alors $\det u = 1$ et $\mathrm{Tr}(u) = 2\cos\theta$

Si u est une réflexion, alors $\det u = -1$ et $\mathrm{Tr}(u) = 0$

Théorème : réduction des isométries d'un espace euclidien (hors programme)

Soit u une isométrie de E euclidien.

Alors il existe une base orthonormée $\mathfrak{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$ est de la forme

$$\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_m & & & & \\ & -I_p & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_q) \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Démonstration :

Montrons le résultat par récurrence sur $n = \dim E$

Si $n = 1$, 2 le résultat est vrai.

Soit $n \geq 3$, supposons le résultat vrai pour toute dimension $\leq n-1$, et considérons $u \in O(E)$, où E est de dimension n.

Alors u est un endomorphisme de $\mathbb{R}$-ev, donc u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Si u admet une droite stable D, alors l'hyperplan $D^{\perp}$ est stable par $u^* = u^{-1}$, donc $u^{-1}(D^{\perp}) \subset D^{\perp}$, et même $u^{-1}(D^{\perp}) = D^{\perp}$ puisque u^{-1} est injective.

Donc $u(D^{\perp}) = D^{\perp}$. De plus, $u_{/D}$ et $u_{/D^{\perp}}$ sont des isométries, donc $u_{/D} = \pm \mathrm{Id}_D$

Et par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \dots e_n)$ base orthonormée de $D^{\perp}$ telle que $\mathrm{mat}_{(e_2,\dots e_n)}(u_{/D^{\perp}}) = \begin{pmatrix} I_{m'} & & & & \\ & -I_{p'} & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_q) \end{pmatrix}$

Pour $e_1 \in D$ unitaire, on a soit $u(e_1) = e_1$; alors dans $\mathfrak{B} = (e_1, \dots e_n)$ la matrice est de la forme voulue.

Sinon, $u(e_1) = -e_1$, et dans $\mathfrak{B} = (e_2, \dots e_{m'}, e_1, e_{m'+1} \dots e_n)$ la matrice est comme voulue.

Si u n'a pas de droite stable, alors u admet un plan stable, disons π.

Alors π et $\pi^{\perp}$ sont stables par u. Donc $u_{/\pi^{\perp}}$ et $u_{/\pi}$ sont des isométries.

Comme $u_{/\pi}$ est une isométrie du plan sans droite stable, c'est une rotation, et il existe (e_{n-1}, e_n) base orthonormée de π telle que $\mathrm{mat}_{(e_{n-1},e_n)}(u_{/\pi}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à $u_{/\pi^{\perp}}$. Donc il existe une base orthonormale $(e_1, \dots e_{n-2})$ de $\pi^{\perp}$ telle que $\mathrm{mat}_{(e_1,\dots e_{n-2})}(u_{/\pi^{\perp}}) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(\theta_q) \end{pmatrix}$

(Il n'y a pas de droite stable donc pas de valeur propre réelle)

Et la matrice de u dans la base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de E est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrence.

Corollaire :

Une isométrie en dimension n est composée d'un produit d'au plus n réflexions.

En effet, une matrice de la forme vue dans le théorème s'écrit comme produit par blocs de réflexions en utilisant le fait que $R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

En dimension 3 :

Retournement : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (symétrie par rapport à une droite)

Réflexion : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (par rapport à un plan)

Vraie rotation : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Rotation + réflexion : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$