Chapitre 14 : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

I Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. (au programme : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ uniquement)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle forme bilinéaire symétrique sur E (abréviation *fbs*) toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

φ est linéaire à droite

φ est symétrique, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

- On appelle forme quadratique (abréviation *fq*) associée à une forme bilinéaire symétrique φ l'application $Q_\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ \vec{x} \mapsto Q(\vec{x}) = \varphi(\vec{x},\vec{x}) \end{array}$ (c'est la restriction de φ à la diagonale de $E \times E$)
- Relation importante :

Théorème :
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, Q la forme quadratique associée.
On a, pour tous $x, y \in E$:
(1) $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x,y)$
(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$
(3) $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(y) - Q(x)) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$
(Formules de polarisation)

Démonstration :…

- Caractérisation intrinsèque des formes quadratiques :

Problème :
Soit $Q : E \to \mathbb{K}$. Comment voir si Q est une forme quadratique ?
Le plus simple est de parachuter une *fbs* φ telle que $\forall x \in E, \varphi(x,x) = Q(x)$
Exemple :
Soit $l \in E^*$ une forme linéaire sur E.
Alors $l^2 : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ \vec{v} \mapsto l(\vec{v})^2 \end{array}$ est une forme quadratique.
En effet, posons $\varphi(u,v) = l(u) \times l(v)$
Alors φ est une *fbs*, et la forme quadratique associée à φ est bien l^2.

Théorème :
(1) Pour toute forme quadratique $Q : E \to \mathbb{K}$, il existe une unique *fbs* $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que Q est la forme quadratique associée à φ.
φ est définie par $\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$
(2) Une application $Q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si l'application $x, y \mapsto \dfrac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$ est bilinéaire et $\forall x \in E, Q(2x) = 4Q(x)$

Démonstration :
(1) A déjà été vu dans le théorème précédent.
Pour (2) :
Si Q est une forme quadratique, associée à φ, on a pour tous $x, y \in E$:

$$\frac{Q(x+y)-Q(x)-Q(y)}{2}=\varphi(x, y)$$

Qui est bilinéaire, et $\forall x \in E, Q(2x)=\varphi(2x,2x)=4\varphi(x, x)=4Q(x)$
Inversement :
Si $\alpha: \begin{array}{l} E^2 \rightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto \frac{Q(x+y)-Q(x)-Q(y)}{2} \end{array}$ est bilinéaire, et si $\forall x \in E, Q(2x)=4Q(x)$,
alors α est aussi symétrique, donc c'est une *fbs*, et pour tout $x \in E$,

$$\alpha(x, x)=\frac{Q(2x)-Q(x)-Q(x)}{2}=Q(x)$$

Donc Q est la forme quadratique associée à α.

Définition :
La correspondance qui à φ *fbs* associe Q_φ forme quadratique est bijective ; on dit que Q_φ est la forme quadratique associée à φ et que φ est la forme polaire (abr. *fp*) de Q_φ

II En dimension finie : matrices

- Définition :

Soit $\mathfrak{B}=(V_1,\ldots V_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ une *fbs*. On appelle matrice de φ dans $\mathfrak{B}$ la matrice $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)=(\varphi(V_i, V_j))_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}} \in S_n(\mathbb{K})$.

Remarque :
Si φ est un produit scalaire ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$), $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ s'appelle la matrice de Gram de $(V_1,\ldots V_n)$.
On appelle matrice d'une forme quadratique Q dans $\mathfrak{B}$ la matrice de la forme polaire de Q dans $\mathfrak{B}$.

Attention :
Il ne faut pas confondre : matrice de *fbs*/*fq* et matrice d'application linéaire.
Pour écrire la matrice d'une *fq*, on doit d'abord expliciter la forme polaire.

- Caractérisation :

Théorème :
On note $\mathfrak{B}=(e_1,\ldots e_n)$ une base de E.
(1) Soit $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ une *fbs*, et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :
On a $A=\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ si et seulement si pour tout $x=\sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y=\sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E,
$\varphi(x, y)={}^tXAY$ (où on a identifié $M_{1,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$), où $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
(2) Soit $Q: E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique, et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Alors $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(Q)$ si et seulement si A est symétrique et pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ de E, $Q(x) = {}^t XAX$.

Démonstration :

Les conditions sont déjà nécessaires :

(1) Pour tous $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ de E, on a :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \varphi(e_i,e_j) y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{i,j} y_j = {}^t XAY$$

(2) si $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(Q)$, alors A est bien symétrique, et pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ de E, on a :

$Q(x) = \varphi(x,x) = {}^t XAX$ où φ est la forme polaire de Q.

Les conditions sont suffisantes :

(1) pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a : $\varphi(e_i,e_j) = (0,\dots 1,\dots 0)A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix} = A_{i,j}$

Donc $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = A$

(2) On suppose que A est symétrique et que $\forall x \in E, Q(x) = {}^t XAX$

Soit φ la forme polaire de Q. Pour $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\left({}^t(X+Y)A(X+Y) - {}^t XAX - {}^t YAY\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left({}^t XAY + {}^t YAX\right)\end{aligned}$$

Or, ${}^t A = A$, donc ${}^t({}^t YAX) = {}^t X {}^t AY = {}^t XAY$

De plus, ${}^t YAX \in M_1(\mathbb{K})$ donc est symétrique.

Donc ${}^t YAX = {}^t XAY$

C'est-à-dire $\varphi(x,y) = {}^t XAY$

Et donc d'après (1), $A = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(Q)$

- Autre caractérisation des formes quadratiques (en dimension finie)

Théorème :

Une application $Q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si son expression dans une base $(e_1,\dots e_n)$ de E est de la forme :

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$$

Autrement dit, Q s'exprime par un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées

Homogène : Un polynôme P – éventuellement à plusieurs indéterminées – de degré $\deg P = d$ est dit homogène lorsque $\forall \lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda X) = \lambda^d P(X)$.

Démonstration :

Découle du théorème précédent.

- Structure :

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, on fixe $\mathfrak{B}$ une base de E.

L'ensemble des formes quadratiques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^E$, noté $\text{Quad}(E)$

L'ensemble des *fbs* de E est un sous-espace de $\mathbb{K}^{E\times E}$, noté $\text{BS}(E)$

Et les applications suivantes sont des isomorphismes :

$\varphi \in \text{BS}(E) \mapsto Q_\varphi \in \text{Quad}(E)$ où $\forall x \in E, Q_\varphi(x) = \varphi(x,x)$

$Q \in \text{Quad}(E) \mapsto \varphi \in \text{BS}(E)$ où φ est la forme polaire de Q.

$\varphi \in \text{BS}(E) \mapsto \text{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \in S_n(\mathbb{K})$

$Q \in \text{Quad}(E) \mapsto \text{mat}_{\mathfrak{B}}(Q) \in S_n(\mathbb{K})$

En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Quad}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dim_{\mathbb{K}}(\text{BS}(E))$

- Changement de bases, matrices congruentes :

Théorème :

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ une *fbs*, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$' deux bases de E.

On note $A = \text{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$, $A' = \text{mat}_{\mathfrak{B}'}(\varphi)$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}$'.

Alors $A' = {}^tPAP$

Définition :

Deux matrices symétriques A, A' sont dites congruentes lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = {}^tPAP$

La congruence des matrices symétriques est une relation d'équivalence.

Ainsi, deux matrices sont congruentes si et seulement si elles représentent la même *fbs* dans deux bases différentes.

Démonstration (du théorème) :

Pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = {}^tXAY$, où X, Y sont les matrices colonnes de x, y dans $\mathfrak{B}$. La matrice colonne X' de x dans $\mathfrak{B}$' est donnée par $X = PX'$, celle Y' de y par $Y = PY'$.

Ainsi, on a :

$\varphi(x,y) = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y'$

Comme c'est valable pour tous $x, y \in E$, on a bien ${}^tPAP = \text{mat}_{\mathfrak{B}'}(\varphi)$

- Rang des *fbs* et des *fq* :

Définition :

On appelle rang d'une *fbs*/*fq* le rang de sa matrice dans une base quelconque.

Le rang est indépendant de la base car deux matrices congruentes sont équivalentes donc ont même rang.

Définition :

Une *fbs*/*fq* de rang n est dite non dégénérée.

III Cas des réels : positivité

- Définition :

Soit $Q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-ev E.

Q est dite positive lorsque $\forall x \in E, Q(x) \geq 0$

Et définie–positive lorsque $\forall x \in E \setminus \{0\}, Q(x) > 0$

On définit de même une forme quadratique négative ou définie négative.

Une *fbs* sera dite positive, définie–positive, négative, définie–négative lorsque la forme quadratique associée l'est.

Attention :

Une *fbs* est rarement une fonction positive. En fait, elle est positive si et seulement si elle est nulle.

Théorème :

Inégalité de Cauchy–Schwarz pour une *fbs* positive :

Si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est une *fbs* positive, alors $\forall x, y \in E, |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$

Complément :

Soit φ une *fbs* positive. Alors $N = \{x \in E, \varphi(x,x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de *E*, et il y a égalité de Cauchy–Schwarz si et seulement si *N* contient une combinaison linéaire non triviale de *x* et *y*.

Démonstration :

Soient $x, y \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$0 \leq \varphi(x+ty, x+ty) = \varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y)$

Donc le polynôme $P : t \mapsto \varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y)$, de degré ≤ 2, est à valeurs positives. Deux cas :

Soit $\varphi(y,y) > 0$, et $\frac{\Delta}{4} = \varphi(x,y)^2 - \varphi(x,x)\varphi(y,y) \leq 0$

Soit $\varphi(y,y) = 0$, et donc $\deg P \leq 1$, soit $\varphi(x,y) = 0$

Et dans les deux cas l'inégalité est vérifiée.

Pour le complément :

Déjà, $0 \in N$ donc *N* est non vide.

Pour tous $x \in N, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x \in N$

Enfin, pour tous $x, y \in N$, on a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\varphi(x,y) = 0$

Et donc $\varphi(x+y, x+y) = 0$

Montrons maintenant l'équivalence :

Supposons qu'il y a égalité de Cauchy–Schwarz pour $x, y \in E$.

Si $\varphi(y,y) = 0$, alors *y* est une combinaison linéaire non triviale qui est dans *N*.

Sinon, le polynôme $P = \varphi(x,x) + 2X\varphi(x,y) + X^2\varphi(y,y)$ de degré 2 admet au moins une racine réelle *t*, puisqu'il a un discriminant nul. On a alors $\varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y) = 0$, soit $\varphi(x+ty, x+ty) = 0$ donc $x + ty \in N$ et $(1,t) \neq (0,0)$

Réciproquement, supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y \in N$

Si $\lambda = 0$, alors $\mu \neq 0$ donc comme *N* est un espace vectoriel, $y \in N$, et on a $|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} = 0$, c'est-à-dire $|\varphi(x,y)| = \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ $(= 0)$

Sinon, comme *N* est un espace vectoriel, $x + ty \in N$, où $t = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Ainsi, $\varphi(x+ty, x+ty) = \varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y) = 0$

Donc soit $\varphi(y,y) = 0$ et on a bien l'égalité, soit $4\varphi(x,y)^2 - 4\varphi(x,x)\varphi(y,y) \geq 0$, c'est-à-dire $|\varphi(x,y)| \geq \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ et donc $|\varphi(x,y)| = \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ puisque l'autre inégalité était déjà vraie d'après le théorème.

- Signature d'une forme quadratique réelle en dimension finie (Hors programme)

Soit $Q: E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

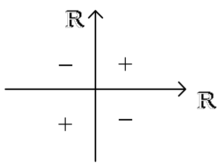
On appelle indice de positivité p de Q la dimension maximale d'un sous-espace F de E tel que $Q_{/F}$ est définie–positive,

Et indice de négativité q de Q la dimension maximale d'un sous-espace F de E tel que $Q_{/F}$ est définie–négative.

La signature est alors le couple (p, q)

Exemple :

$Q: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array}$ est une forme quadratique, de signature $(1,1)$:



On peut montrer que $\mathrm{rg}(Q) = p + q$ (plus tard, page 10)

IV Représentation des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques dans un espace euclidien

Ici, E désigne un espace vectoriel euclidien.

- Préambule : exemples de formes quadratiques :

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$.

Les applications $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|u(x)\|^2 \end{array}$ et $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto <x, u(x)> \end{array}$ sont des formes quadratiques.

La forme polaire de $x \mapsto \|u(x)\|^2$ est en effet $\varphi: \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (x,x) \mapsto <u(x), u(y)> \end{array}$, qui est bien une *fbs*.

La forme polaire de $x \mapsto <x, u(x)>$ est

$\varphi: \frac{1}{2}(<x, u(y)> + <x, u^*(y)>) = \frac{1}{2}(<x, u(y)> + <y, u(x)>)$

- Théorème de représentation des formes quadratiques dans un espace euclidien :

Théorème :

Pour toute *fbs* $\varphi: E^2 \to \mathbb{R}$, il existe un unique endomorphisme $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = <x, u(y)>$.

De plus, u est autoadjoint, et u et φ ont même matrice dans toute base orthonormée de E.

Définition :

u s'appelle l'endomorphisme symétrique associé à φ.

Attention :

Si $\mathfrak{B}$ n'est pas orthonormale, on n'a pas en général $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$.

En effet, par exemple $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ est toujours symétrique par définition de φ, alors que $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$ ne l'est pas toujours.

Théorème :

Pour toute forme quadratique $Q: E \to \mathbb{R}$, il existe un unique endomorphisme *symétrique* u tel que $\forall x \in E, Q(x) = \langle x, u(x) \rangle$

De plus, la forme polaire de Q est alors $(x, y) \mapsto \langle x, u(y) \rangle$

Q et u ont même matrice dans toute base orthonormée.

Attention :

Si on n'impose pas à u d'être symétrique, il n'y a plus unicité, puisque alors pour un endomorphisme antisymétrique v (c'est-à-dire tel que $v^* = -v$) quelconque, on aura $\forall x \in E, \langle x, v(x) \rangle = 0$ et donc si on trouve une solution u, alors $u + v$ est aussi solution, différente si $v \neq 0$.

Démonstration des théorèmes :

(1) Unicité de u :

Si u et u' sont deux solutions, alors $v = u - u'$ vérifie :

$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, v(y) \rangle = 0$ soit $\forall y \in E, \langle v(y), v(y) \rangle = 0$ et donc $v = 0$.

Existence, caractérisation… :

Soit $\mathfrak{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base orthonormée de E, et $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u) = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$

Alors :

- La matrice de u est symétrique en base orthonormée, donc u est autoadjoint.
- u et φ ont même matrice dans $\mathfrak{B}$ (!)
- Pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in E$, on a :

$$\langle x, u(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

Or, comme $(e_1, \dots e_n)$ est orthonormale, $\langle e_i, u(e_j) \rangle$ est le coefficient de coordonnées (i, j) de $A = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(u)$, et ce pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Comme $A = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$, on a donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle e_i, u(e_j) \rangle = \varphi(e_i, e_j)$

Donc $\langle x, u(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_i \varphi(e_i, e_j) = \varphi(x, y)$

- u et φ ont même matrice dans toute base orthonormale :

Soit $\mathfrak{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$ une base orthonormée de E.

Alors la matrice de u dans $\mathfrak{B}'$ est $A' = (\underbrace{\langle e'_i, u(e'_j) \rangle}_{= \varphi(e'_i, e'_j)})_{i, j = 1..n}$ car $\mathfrak{B}'$ est orthonormale.

Donc $\operatorname{mat}_{\mathfrak{B}'}(u) = \operatorname{mat}_{\mathfrak{B}'}(\varphi)$.

(2) Existence, propriétés :

Soit φ la forme polaire de Q, u l'unique endomorphisme donné par le théorème précédent tel que $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$

Ainsi, u est autoadjoint, et u et φ ont même matrice dans toute base orthonormale, donc c'est pareil pour Q et φ.

Unicité :

Si u, u' sont deux endomorphismes *autoadjoints* tels que $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle = \langle x, u'(x) \rangle$

Alors $v = u - u^*$ est autoadjoint, et $\forall x \in E, \langle x, v(x) \rangle = 0$

Donc $\forall x,y\in E, <x+y,v(x+y)>=0=\underbrace{<x,v(x)>}_{=0}+<x,v(y)>+<y,v(x)>+\underbrace{<y,v(y)>}_{=0}$

Soit $\forall x,y\in E, <x,v(y)>=<-v(x),y>$

On reconnaît donc $v^*=-v$. Mais $v^*=v$. Donc $v=0$

- « Ménage à 4 » :

Dans un espace euclidien, on dispose :

- Des endomorphismes autoadjoints
- Des matrices symétriques
- Des formes bilinéaires symétriques
- Des formes quadratiques.

Qui constituent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels isomorphes.

Les espaces $S(E)=\{u\in L_{\mathbb{R}}(E), u^*=u\}$, $S_n(\mathbb{R})$, $\text{Quad}(E)$, $\text{BS}(E)$ où E est un espace de dimension n sur $\mathbb{R}$ sont naturellement isomorphes :

$\begin{aligned} S(E) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto \text{mat}_{\mathfrak{B}_0}(u)\end{aligned}$ où $\mathfrak{B}_0$ est une base orthonormée quelconque fixée.

$\begin{aligned} BS(E) &\to \text{Quad}(E) \\ \varphi &\leftrightarrow Q_\varphi\end{aligned}$

$\begin{aligned} S(E) &\to \text{Quad}(E) \\ \pi &\mapsto (x\in E\mapsto <x,\pi(x)>)\end{aligned}$

$\begin{aligned} S(E) &\to \text{BS}(E) \\ \pi &\mapsto ((x,y)\in E^2\mapsto <x,\pi(y)>)\end{aligned}$

Exemple :

Soit $Q: \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto x^2+2y^2-z^2+4xy+yz-zx\end{aligned}$ (on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire naturel)

On veut la matrice de Q dans la base canonique, l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$ associé à Q.

- Pour la matrice :

On a $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}=x+2y-\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}=2x+2y+\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z$.

Ainsi, la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix}$ est la matrice du système de formes linéaires $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$.

- Endomorphisme associé à Q :

Alors $\pi:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto(x',y',z')$

Où $x'=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)$, $y'=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)$, $z'=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)$.

En effet, on a $\text{mat}_{\text{cano}}(\pi)=A$, et comme la base canonique est orthonormale, il suffit de montrer que $A=\text{mat}_{\text{cano}}(Q)$.

Pour cela, on a la proposition :

Proposition :

On fixe $\mathfrak{B}=(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Soit Q une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire.

Ainsi, Q peut être vu comme fonction de n variables réelles :

Pour $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \in E$, on peut écrire Q sous la forme $Q(\vec{x})=Q(x_1,\dots x_n)$.

Alors pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j)$

En effet :

Déjà, la quantité existe bien car on a vu que Q s'écrivait sous forme polynomiale en les coordonnées, disons sous la forme $Q(x_1,\dots x_n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}x_k x_l$ où les $a_{k,l}$ sont des réels, donc Q est de classe C^∞.

Alors pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\frac{1}{2}\big(Q(\vec{e}_i+\vec{e}_j)-Q(\vec{e}_j)-Q(\vec{e}_j)\big)$$

Et $Q(\vec{e}_i+\vec{e}_j)=a_{i,j}+a_{j,i}+a_{i,i}+a_{j,j}$, $Q(\vec{e}_i)=a_{i,i}$, $Q(\vec{e}_j)=a_{j,j}$

Et donc $\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\frac{1}{2}(a_{i,j}+a_{j,i})$

D'autre part, $\forall\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i\in E, \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{k,l}\frac{\partial(x_k x_l)}{\partial x_i}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_{k,i}x_k+\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n}a_{i,l}x_l+2a_{i,i}x_i$

Soit $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j)=\begin{cases}a_{j,i}+a_{i,j} \text{ si } x\neq i\\ 2a_{i,i} \text{ si } j=i\end{cases}=a_{i,j}+a_{j,i}$

Et donc on a bien $\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\vec{e}_j)$.

Ainsi, pour reprendre l'exemple, la matrice de Q dans la base canonique est bien la matrice introduite.

- Réduction des *fbs* et *fq* en base orthonormale.

Théorème :

(1) Pour toute *fbs* $\varphi:E^2\to\mathbb{R}$, il existe une base orthonormée $(e_1,\dots e_n)$ de E et des réels $\lambda_1,\dots\lambda_n$ tels que $\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E,\forall y\sum_{i=1}^{n}y_ie_i\in E,\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iy_i$.

$(e_1,\dots e_n)$ est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme autoadjoint associé à φ, et $\lambda_1,\dots\lambda_n$ sont les valeurs propres associées à ces vecteurs.

(2) Pour toute forme quadratique $Q:E\to\mathbb{R}$, il existe une base orthonormée $(e_1,\dots e_n)$ de E et des réels $\lambda_1,\dots\lambda_n$ tels que $\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E, Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$

$(e_1,\dots e_n)$ est une base de vecteurs propres de l'endomorphisme autoadjoint associé à Q, et $\lambda_1,\dots\lambda_n$ sont les valeurs propres associées à ces vecteurs.

Démonstration :

Soit π l'endomorphisme associé à φ (resp. Q).

D'après le théorème spectral, il existe une base $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_n)$ de vecteurs propres de π telle que la matrice de π dans $\mathfrak{B}$ soit diagonale.

Disons $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\pi)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ où λ_i est la valeur propre associée à e_i.

Comme $\mathfrak{B}$ est orthonormale, on a $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi)=\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}(\pi)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ (resp. pour Q)

Donc pour $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E$, $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i\in E$,

$$\varphi(x,y)={}^tX\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iy_i \text{ et } Q(x)={}^tX\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}X=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$$

Définition :

Les espaces propres de π, endomorphisme autoadjoint associé à φ/Q sont appelés les directions principales de φ/Q.

Exemple : moment d'inertie :

Soit S un solide de $\mathbb{R}^3$, $\rho(M)$ la densité volumique, $\mu(S)=\iiint\rho(M)dM>0$ la masse du solide.

Soit $O\in\mathbb{R}^3$. Pour $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, on pose $Q_O(\vec{v})=\iiint_{M\in S}\rho(M)<\overrightarrow{OM},\vec{v}>^2 dM$

Alors Q_O est une forme quadratique, de forme polaire

$\varphi_O(\vec{v},\vec{w})=\iiint_{M\in S}\rho(M)<\overrightarrow{OM},\vec{v}><\overrightarrow{OM},\vec{w}>dM$

D'après le théorème de réduction des *fq* et *fbs* en base orthonormale, il existe une base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ et des réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\varphi_0=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$

C'est-à-dire $Q_0(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3e_3^2$

Donc $\iiint_{M\in S}\rho(M)<\overrightarrow{OM},e_i><\overrightarrow{OM},e_j>dM=\begin{cases}\lambda_i \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

- Hors programme : interprétation de la signature :

Théorème :

Soit Q une forme quadratique de signature (p,q) et π l'endomorphisme associé à Q.

Alors p est le nombre de valeurs propres >0 de π, et q le nombre de valeurs propres <0 de π.

Remarque : on en tire alors que $\mathrm{rg}(Q)=\mathrm{rg}(\pi)=p+q$.

Démonstration :

On note p' le nombre de valeurs propres strictement positives de π, q' le nombre de valeurs propres strictement négatives, et m la multiplicité de 0 comme valeur propre de π.

D'après le théorème spectral, il existe alors une base orthonormée de valeurs propres de π, telle que $\mathrm{mat}_{\mathfrak{B}}\pi=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&\\ &&\lambda_{p'}&&&&&\\ &&&\mu_1&&&&\\ &&&&\ddots&&&\\ &&&&&\mu_{q'}&&\\ &&&&&&0&\\ &&&&&&&\ddots\end{pmatrix}$

On pose $F=\text{Vect}(e_1,\dots e_{p'})$

Alors pour tout $x=\sum_{i=1}^{p'} x_i e_i \in F\setminus\{0\}$, on a $Q(x)=\sum_{i=1}^{p'}\lambda_i x_i^2>0$

Donc $Q_{/F}$ est définie–positive.

De même, $Q_{/G}$ où $G=\text{Vect}(e_{p'+1},\dots e_{p'+q'})$ est définie–négative.

Donc déjà $p\geq p'$, $q\geq q'$

On a $F^{\perp}=\text{Vect}(e_{p'+1},\dots e_n)$.

Soit H un sous-espace de E de dimension p tel que $Q_{/H}$ soit définie–positive.

Alors $H\cap F^{\perp}=\{0\}$.

En effet, pour $z=\sum_{i=p'+1}^{n} z_i e_i \in F^{\perp}$, on a $Q(z)=\sum_{i=1}^{q'}\mu_i z_{p'+i}^2\leq 0$

Donc si $z\in H\cap F^{\perp}$, alors $z=0$.

Donc $\dim H\leq \dim F=p'$, c'est-à-dire $p\leq p'$

De même, $q\leq q'$, puis $p=p'$, $q=q'$.

Exercice :

Soient Q, Q' deux formes quadratiques sur E.

Alors il existe $u\in GL_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $Q=Q'\circ u$ si et seulement si Q et Q' ont même signature.

Démonstration :

S'il existe $u\in GL_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $Q=Q'\circ u$, alors $Q_{/F}$ est définie–positive si et seulement si $Q'_{/u(F)}$ l'est, et F, $u(F)$ ont même dimension. Idem pour définie–négative.

Donc la signature est la même.

Réciproquement, supposons que Q et Q' ont la même signature (p,q).

Alors il existe deux bases orthonormales $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_n)$ et $\mathfrak{B}'=(e'_1,\dots e'_n)$ telles que :

$$\text{mat}_{\mathfrak{B}}(Q)=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&\\ &&\lambda_p&&&&&\\ &&&\mu_1&&&&\\ &&&&\ddots&&&\\ &&&&&\mu_q&&\\ &&&&&&0&\\ &&&&&&&\ddots\end{pmatrix} \text{ et } \text{mat}_{\mathfrak{B}'}(Q')=\begin{pmatrix}\lambda'_1 &&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&\\ &&\lambda'_p&&&&&\\ &&&\mu'_1&&&&\\ &&&&\ddots&&&\\ &&&&&\mu'_q&&\\ &&&&&&0&\\ &&&&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

Où $\forall i\in[\![1,p]\!],\lambda_i>0,\lambda'_i>0$ et $\forall i\in[\![1,q]\!],\mu_i<0,\mu'_i<0$.

Ainsi, pour $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\in E$, $Q(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i^2+\sum_{i=1}^{q}\mu_i x_{p+i}^2$

Soit u l'automorphisme de E tel que $\forall i\in[\![1,n]\!], u(e_i)=k_i e'_i$ où $k_i\neq 0$ est fixé après.

Alors pour tout $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\in E$, $(Q'\circ u)(x)=Q'\left(\sum_{i=1}^{n} x_i k_i e'_i\right)=\sum_{i=1}^{p} x_i^2 k_i^2\lambda'_i+\sum_{i=1}^{q} x_{i+p}^2 k_{i+p}^2\mu'_i$

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, λ'_i et λ_i ont même signe, et pareil pour μ_i, μ'_i quand $i\in[\![1,q]\!]$.

Ainsi, on peut poser $k_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda'_i}} \text{ si } i = 1..p \\ \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu'_i}} \text{ si } i = p+1..p+q \\ 1 \text{ si } i > p+q \end{cases}$

Et on aura bien par construction $Q' \circ u = Q$.

V Application des *fq* et *fbs* aux endomorphismes autoadjoints

- Définition :

Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.
On dit que u est positif, négatif, défini–positif, défini–négatif lorsque
$\forall x \in E \setminus \{0\}, < x, u(x) > \geq 0 / \leq 0 / > 0 / < 0$

- Caractérisation :

Théorème :
Soit u un endomorphisme autoadjoint.
(1) Alors u est positif si et seulement si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
(2) Les assertions suivantes sont équivalentes :
- u est défini–positif
- $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$
- u est positif et inversible.

Démonstration :
On utilise le théorème spectral :
Supposons que u est positif. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ.
Alors $\lambda \|\vec{v}\|^2 = < \vec{v}, \lambda\vec{v} > \geq 0$. Donc comme $\|\vec{v}\|^2 \geq 0$, $\lambda \geq 0$
Réciproquement, supposons que $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots e_n)$ de vecteurs propres de u. On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ la valeur propre associée à e_i.

Alors, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a : $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$

Et donc $< x, u(x) > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ car la base est orthonormée.

Donc comme les λ_i sont positifs, on a bien $< x, u(x) > \geq 0$.
Pour les équivalences :
Si u est défini–positif, alors pour toute valeur propre λ de u, on a en notant $\vec{v}$ un vecteur propre associé à λ : $\lambda \|\vec{v}\|^2 = < \vec{v}, \lambda\vec{v} > = < \vec{v}, u(\vec{v}) > > 0$, et donc $\lambda > 0$.
Si $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors d'après le point précédent u est positive, et comme $0 \notin \mathrm{sp}(u)$, u est inversible.
Enfin, si u est positive et inversible, alors ses valeurs propres sont positives, et comme elles sont non nulles (car u est inversible) elles sont strictement positives.

En reprenant le point précédent, on a alors pour $x \in E \setminus \{0\}$, $< x, u(x) > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0$.

- Remarque :

En général, la restriction d'un endomorphisme symétrique u à un sous-espace F n'est pas un endomorphisme de F ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit un est que $u(F)\subset F$.

Par contre, la restriction d'une forme quadratique Q à un sous-espace F de E est encore une forme quadratique ; plus précisément, si la forme polaire de Q est φ, alors la forme polaire de $Q_{/F}$ est $\varphi_{/F^2}$ qui est toujours une *fbs*.

- Exemples, propositions importants :

(1) Exercice :

Soit Q une forme quadratique, π l'endomorphisme autoadjoint associé à Q.

Pour tout sous-espace F de E, l'endomorphisme de F associé à $Q_{/F}$ est $p_F\circ\pi_{/F}$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F.

Démonstration :

Déjà, $p_F\circ\pi_{/F}\in L(F)$

Pour $x,y\in F$, on a :

$$\begin{aligned}<x,p_F\circ\pi_{/F}(y)> &=<x,p_F\circ\pi(y)>=<p_F(x),\pi(y)> \text{ car } p_F{}^*=p_F\\ &=<x,\pi(y)>=<y,\pi(x)> \text{ car } \pi^*=\pi\\ &=<y,p_F\circ\pi_{/F}(x)> \text{ car } x\in F \text{ et } \pi_{/F}\in L(F)\end{aligned}$$

Ensuite, pour $x\in F$, $Q_{/F}(x)=Q(x)=<x,\pi(x)>=<x,p_F\circ\pi_{/F}(x)>$

(2) Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif :

Montrer que pour tout $\pi\in S(E)$ positif, il existe un endomorphisme autoadjoint s positif, tel que $\pi=s\circ s$.

Ou, matriciellement : si $M\in S_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive,

(c'est-à-dire $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX\geq 0$ ou $\mathrm{sp}(M)\subset\mathbb{R}_+$)

Alors il existe S symétrique positive telle que $S^2=M$

De plus, s (resp. S) est unique.

Démonstration :

Soit $\pi\in L_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1,...e_n)$ de vecteurs propres de π. On note, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i\geq 0$ la valeur propre associée à e_i.

Soit s l'endomorphisme de E tel que $\forall i\in[\![1,n]\!], s(e_i)=\sqrt{\lambda_i}e_i$. Alors s est autoadjoint car diagonal en base orthonormée, et positif car $\forall i\in[\![1,n]\!],\sqrt{\lambda_i}\geq 0$.

On a de plus $s\circ s=\pi$

Unicité :

Supposons qu'un endomorphisme autoadjoint positif s vérifie $s\circ s=\pi$.

Soient $\lambda_1,...\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de π.

Alors $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_{\lambda_i}(\pi)$, et la somme est orthogonale.

Comme $s\circ s=\pi$, s et π commutent.

Donc s laisse stable les $E_{\lambda_i}(\pi), i\in[\![1,p]\!]$.

Ainsi, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $s_{/E_{\lambda_i}(\pi)} = s_i$ est encore autoadjoint positif (car $\mathrm{sp}(s_i) \subset \mathrm{sp}(s)$)

Soit μ une valeur propre de s_i, $\vec{v} \in E_{\lambda_i}(\pi)$ associé à μ.

Alors $s_i(\vec{v}) = \mu.\vec{v}$, donc $\pi(\vec{v}) = \mu^2\vec{v}$

Et donc $\mu^2 = \lambda_i$. Comme $\mu \geq 0$, on a alors $\mu = \sqrt{\lambda_i}$

Ainsi, s_i a une valeur propre $\sqrt{\lambda_i}$. Comme de plus s_i est diagonalisable, on a $s_i = \sqrt{\lambda_i}\mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}(\pi)}$, d'où l'unicité de s_i, puis de s.

(3) Décomposition polaire

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $A = SQ$.

($S_n^+(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques positives ; $S_n^{++}(\mathbb{R})$: définies–positives ; idem avec –)

De plus, (S,Q) est unique.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, il y a existence de la décomposition mais pas unicité.

Démonstration :

Si $A = SQ$ où $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$, alors :

$A^tA = SQ^tQ^tS = S^2$

De plus, A^tA est symétrique positive :

Déjà, A^tA est symétrique, et pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXA^tAX = \left\|{}^tAX\right\|^2 \geq 0$

Donc S est défini de façon unique d'après le point précédent (c'est la racine carrée de A^tA). Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a ainsi $S \in GL_n(\mathbb{R})$.

Et donc $Q = S^{-1}A$, d'où aussi l'unicité de Q.

Existence :

On prend pour S l'unique racine carrée symétrique positive de A^tA.

Alors S est inversible car A l'est, et on peut poser $Q = S^{-1}A$.

On a donc ${}^tQQ = {}^tA^tS^{-1}S^{-1}A = {}^tA(S^2)^{-1}A = {}^tA(A^tA)^{-1}A = I_n$.

Donc $Q \in O_n(R)$, et $A = SQ$

Si maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement inversible :

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ tendant vers A (il en existe car $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$).

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $A_p = S_pQ_p$ où S_p est symétrique positive, et $Q_p \in O_n(\mathbb{R})$.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite $(Q_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge, disons vers $R \in O_n(\mathbb{R})$

Mais alors $S_{\varphi(p)} = A_{\varphi(p)}{}^tQ_{\varphi(p)}$, qui tend vers $S = A^tR$.

Comme R est inversible, $A = SR$, et S est symétrique positive car l'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

En effet, $S_n(\mathbb{R})$ est le noyau de $\alpha : M \mapsto {}^tM - M$, qui est une application continue, donc $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Et si on pose pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\beta_X(M) = {}^tXMX$, on a

$$S_n^+(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})} \beta_X^{-1}([0;+\infty[) = \alpha^{-1}\{0\} \cap \bigcap_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R})} \beta_X^{-1}([0;+\infty[)$$

Qui est donc une intersection de fermés donc un fermé.

Donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ ce qui montre le résultat.

Version complexe :

Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique $M = HU$ où *H* est hermitienne positive (à valeurs propres réelles positives) et *U* est unitaire.

Or, toute matrice unitaire s'écrit $U = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$ où $\forall j \in [\![1,n]\!], |\lambda_j| = 1$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on prend alors $\theta_i \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_j = e^{i.\theta_j}$

Et on pose $H' = P\begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_n \end{pmatrix}P^{-1}$.

Ainsi, *H'* est hermitienne, et $e^{iH'} = U$

Donc $M = He^{iH'}$, où *H*, *H'* sont hermitiennes et *H* définie positive.

(C'est la généralisation de $z = \rho e^{i\theta}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$)

(4) Description variationnelle des valeurs propres de $A \in S_n(\mathbb{R})$ ou $u \in S(E)$.

Soit *u* un endomorphisme symétrique de *E* de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$

Alors :

- $\lambda_1 = \min_{\|x\|=1} < x, u(x) >$, $\lambda_n = \max_{\|x\|=1} < x, u(x) >$.
- Soit $\mathfrak{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension *k* de *E*, Σ la sphère unité.

On a alors $\lambda_k = \min_{F \in \mathfrak{F}_k}\left(\max_{x \in \Sigma \cap F} < x, u(x) >\right) = \max_{F \in \mathfrak{F}_{n+1-k}}\left(\min_{x \in \Sigma \cap F} < x, u(x) >\right)$

Démonstration :

- Soit $(e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de *u* telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. On a :

$$< x, u(x) > = < \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j > = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i < e_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j > = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i$$

Donc $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_n \|x\|^2$,

et les valeurs minimale et maximale sont atteintes en e_1 et e_n.

- Soit $(e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de *u* telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], u(e_i) = \lambda_i e_i$

On pose $G_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots e_k) \in \mathfrak{F}_k$, $H_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots e_n) \in \mathfrak{F}_{n+1-k}$

Alors $\max_{x\in\Sigma\cap G_k} <x,u(x)>=\lambda_k$.

En effet, pour $x\in\Sigma\cap G_k$, disons $x=\sum_{i=1}^{k}x_ie_i$, on a :

$<x,u(x)>=\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2\lambda_i\leq\lambda_k\|x\|^2=\lambda_k$, et atteint pour $x=e_k$.

Ainsi, on a déjà $\lambda_k\geq\min_{F\in\mathfrak{F}_k}\left(\max_{x\in\Sigma\cap F}<x,u(x)>\right)$

Et de même, $\min_{x\in\Sigma\cap H_k}<x,u(x)>=\lambda_k$, et $\max_{F\in\mathfrak{F}_{n+1-k}}\left(\min_{x\in\Sigma\cap F}<x,u(x)>\right)\geq\lambda_k$

Soit alors $F\in\mathfrak{F}_k$. Alors $F\cap H_k\neq\{0\}$ car $\dim H_k+\dim F=n+1>n$.

Alors, pour $x\in F\cap H_k\cap\Sigma$, on a $<x,u(x)>\geq\min_{x\in\Sigma\cap H_k}<x,u(x)>=\lambda_k$

Et donc $\max_{x\in\Sigma\cap F}<x,u(x)>\geq\lambda_k$, d'où l'égalité.

On fait la même chose pour $F\in\mathfrak{F}_{n+1-k}$

VI Interprétation du théorème de réduction des *fq* dans un espace euclidien en termes de réduction simultanée (hors programme)

- Soit Q une *fq* (ou φ une *fbs*) quelconque sur E :

Une base $(V_1,\dots V_n)$ de E est dite orthogonale pour la forme quadratique Q (ou pour la *fbs* φ) lorsque la matrice de Q (φ) dans $(V_1,\dots V_n)$ est diagonale.

C'est-à-dire si pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ distincts, $\varphi(V_i,V_j)=0$ où φ est la forme polaire de Q, ou encore s'il existe des réels $a_1,\dots a_n$ tels que

$$\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_iV_i\in E,\forall y=\sum_{i=1}^{n}y_iV_i\in E,\begin{cases}\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_ia_i\\ Q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2\end{cases}$$

(Une telle expression s'appelle une décomposition en carrés de Q)

- Cas d'un espace euclidien :

Théorème (réduction d'une *fq*/*fbs* en base orthonormée) :
Soit Q une *fq* sur l'espace euclidien $(E,<\ ,\ >)$.
Alors il existe une base $\mathfrak{B}=(e_1,\dots e_n)$ telle que :
$\mathfrak{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire de E.
$\mathfrak{B}$ est orthogonale pour Q.
De plus, on a pour tout $(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$, $Q\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2$ où λ_i est la valeur propre de l'endomorphisme associé à Q.

Démonstration :
Résulte du paragraphe précédent.

Corollaire :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, Q_1, Q_2 deux formes quadratiques sur E dont l'une au moins est définie–positive.

Alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E orthogonale pour Q_1 et Q_2.

Si Q_1 est définie–positive, on peut imposer $\mathfrak{B}$ orthonormale pour Q_1, c'est-à-dire :

Si $\mathfrak{B} = (e_1,...e_n)$, et φ_1 est la forme polaire de Q_1, alors $\varphi_1(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.

Démonstration :

On suppose par exemple que Q_1 est définie–positive.

Soit φ_1 la forme polaire de Q_1. On note $\varphi_1 =< , >$

Alors $< , >$ est un produit scalaire sur E, et Q_2 est une forme quadratique sur l'espace euclidien $(E, < , >)$, donc on peut appliquer le théorème à Q_2.

Application :

Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ où A est définie–positive. Alors AB est diagonalisable.

(Et les valeurs propres de AB ont le signe de celles de B).

Démonstration :

A^{-1} est aussi définie–positive ;

On considère alors $Q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique de matrice A^{-1} dans la base canonique, $Q_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ celle de matrice B dans la base canonique.

Alors Q_1 est définie–positive, et la forme polaire φ_1 de Q_1 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une base $\mathfrak{B}$ qui sera orthonormale pour Q_1 et orthogonale pour Q_2.

Donc $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(\varphi_1) = I_n$ et $\text{mat}_{\mathfrak{B}}(Q_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Si on note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathfrak{B}$, on aura alors :

$I_n = {}^tPA^{-1}P$, $D = {}^tPBP$ (formules de changement de base pour une forme quadratique)

Et donc $A^{-1} = {}^tP^{-1}P^{-1}$, soit $A = P{}^tP$ et $B = {}^tP^{-1}DP^{-1}$

D'où $AB = PDP^{-1}$.

VII Coniques dans le plan euclidien

- Equation d'une conique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé :

$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

On pose $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

On suppose q non nulle (sinon on a un plan), et que la conique n'est pas dégénérée (C'est-à-dire non vide, ni réduite à un point ou une (des) droites. Ainsi, elle contient une infinité de points)

Remarque :

O est centre de symétrie si et seulement si $d = e = 0$

- Centre de symétrie :

On cherche $\Omega(x_0, y_0)$ tel que l'équation dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit de la forme

$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + f' = 0$

Or, on voit que $F(x'+x_0, y'+y_0) = F(x_0, y_0) + x'\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + q(x', y')$

Ainsi, Ω est centre de symétrie si et seulement si $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (lorsque la conique est non dégénérée),

C'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} 2ax_0 + 2by_0 + d = 0 \\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0 \end{cases}$ ou $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

NB : $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est la matrice de Q dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

- Réduction :

Cas où q n'est pas dégénérée (c'est-à-dire de rang 2) :

Ainsi, $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, et donc le système $AX = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ a une (unique) solution.

Donc Γ a pour centre de symétrie $\Omega = -\dfrac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

Par ailleurs, il existe (e_1, e_2) dans laquelle la matrice de q est diagonale, c'est-à-dire telle que $q(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2$

Alors l'équation de Γ dans le repère orthonormé (Ω, e_1, e_2) est $\lambda x^2 + \mu y^2 + F(\Omega) = 0$

En effet, dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation est $q(x, y) + F(\Omega) = 0$

Et comme $q(x'e_1 + y'e_2) = \lambda x'^2 + \mu y'^2$, dans (Ω, e_1, e_2) c'est bien $\lambda x'^2 + \mu y'^2 + F(\Omega) = 0$

Discussion :

Si $F(\Omega) \neq 0$, alors selon les signes de λ, μ ($\lambda, \mu \neq 0$ car $\lambda\mu = \det A \neq 0$) des équations de la forme :

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, qui est une ellipse

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, qui est $\varnothing$ (dégénérée)

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$, qui sont des hyperboles

Si $F(\Omega) = 0$:

Soit $\pm\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right) = 0$, donc $\Gamma = \{\Omega\}$ (dégénérée)

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, qui est la réunion de deux droites (dégénérée)

Remarque :

Pour une ellipse, il faut que $\det A = \lambda\mu > 0$

Pour une hyperbole, il faut que $\det A = \lambda\mu < 0$

(La réciproque est vraie si la conique n'est pas dégénérée)

- Cas où q est dégénérée (c'est-à-dire pas de rang 2) :

On a ainsi $\det A = 0$

Il n'y a donc pas forcément de centre de symétrie (ou une infinité)

On diagonalise A en base orthonormée :
Il existe (e_1, e_2) base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que :
$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{R})$
Ainsi, $q(x'e_1 + y'e_2) = \lambda x'^2$
L'équation de Γ dans (O, e_1, e_2) s'écrit ainsi sous la forme $\lambda x^2 + d'x + e'y + f' = 0$
Discussion :

Si $e' = 0$, alors l'équation devient $\lambda\left(x + \frac{d'}{2\lambda}\right)^2 = -f + \frac{d'^2}{4\lambda} = \text{cte}$

Si $\text{cte} < 0$, c'est l'équation de $\varnothing$
Si $\text{cte} = 0$, c'est l'équation d'une droite
Si $\text{cte} > 0$, c'est l'équation de deux droites parallèles.

Et dans tous les cas la conique est dégénérée.

Si $e' \neq 0$, on peut l'écrire sous la forme $\left(x + \frac{d'}{2\lambda}\right)^2 + e''y = \text{cte}$ où $e'' \neq 0$

Et on a ainsi l'équation d'une parabole.
Résumé :

- Si q n'est pas dégénérée, on a un centre de symétrie, et la conique sera :

Une ellipse si $\det A > 0$ et si elle n'est pas dégénérée.
Une hyperbole si $\det A < 0$ et si elle n'est pas dégénérée.
Sinon, on peut avoir $\Gamma = \varnothing, \{\Omega\}$, deux droites sécantes

- Si q est dégénérée, on a une parabole lorsque la conique n'est pas dégénérée, et $\varnothing$, une droite ou deux droites parallèles lorsqu'elle l'est.

VIII Quadriques dans espace euclidien de dimension 3

- Zoologie :

- Ellipsoïde (E) :

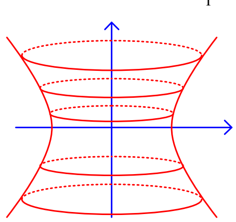
Equation en repère orthonormé de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Si $a = b = c$, on a une sphère
Si $a = b \neq c$, on a un ellipsoïde de révolution.

- Hyperboloïde :

A une nappe (H_1) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

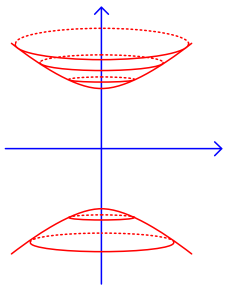
H_1 est connexe puisqu'elle a pour équation $\frac{z}{c} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$ et $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ peut prendre la valeur 0. H_1 est de révolution lorsque $a = b$



A deux nappes (H_2) : $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

On a $\dfrac{z}{c}=\pm\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}}$, donc $\left|\dfrac{z}{c}\right|$ ne peut pas prendre de valeur plus petite que 1.

Donc le graphe ne sera pas connexe (2 nappes). H_2 est de révolution lorsque $a=b$.



- Cône (du 2nd degré) (C) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

On a une équation réduite homogène en (x,y,z).

Remarque : si $M\in C$, alors $OM\subset C$

Lorsque $a=b$: cône de révolution d'axe Oz.

- Cylindre à base elliptique (CE) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

  hyperbolique (CH) : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

  parabolique (CP) : $y^2=2px$

Ce sont des équations incomplètes en z.

Ainsi, si $M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in C$, alors $\left\{M\begin{pmatrix}a\\b\\z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}\subset C$

- Paraboloïde elliptique (PE) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$.

Si $a=b$: paraboloïde de révolution.

- Paraboloïde hyperbolique (PH) : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$

(Correspond à une « selle de cheval »)

- Remarque sur les surfaces réglées :

Hors programme :

Une surface réglée est une surface Σ de $\mathbb{R}^3$ telle qu'en tout point $A\in\Sigma$, il existe une droite D_A vérifiant $A\in D_A\subset\Sigma$.

Exemple :

L'ellipsoïde est non réglé.

L'hyperboloïde à deux nappes est non réglé.

L'hyperboloïde à une nappe est doublement réglé :

Si on a une équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, Alors on peut l'écrire $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$

Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ la droite D_λ d'équations $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda(1-\frac{y}{b})\\ 1+\frac{y}{b}=\lambda(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})\end{cases}$ est incluse dans H_1 car si $M(x,y,z)\in D_\lambda$, on a $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)=1-\frac{y^2}{b^2}$

(Les plans définissant D_λ ne sont pas parallèles car $\left(\frac{1}{a},\frac{\lambda}{b},\frac{-1}{c}\right)\wedge\left(\frac{\lambda}{a},\frac{-1}{b},\frac{\lambda}{c}\right)\neq\vec{0}$)

Et de même, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $D'_\mu:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu(1+\frac{y}{b})\\ 1-\frac{y}{b}=\mu(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})\end{cases}$ est incluse dans H_1

Enfin, pour tout $M(x,y,z)\in H_1$, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $M(x,y,z)\in D_\lambda, D'_\mu$

Prendre par exemple $\lambda=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}$ si $y\neq b$ …

Paraboloïde elliptique : non réglé

Paraboloïde hyperbolique : doublement réglé :

$D_\lambda:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{z}{c}=\lambda(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})\end{cases}$ est incluse dans PH

$D'_\mu:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu\\ \frac{z}{c}=\mu(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\end{cases}$ aussi.

Les cylindres sont tous réglés par des droites verticales.

- Recherche de l'équation réduite d'une quadrique :

Equation générale d'une quadrique Σ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. :

$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fxz+gx+hy+iz+j=0$

On note ici encore $q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fxz$, forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

On suppose q non nulle, et on considère $A=\begin{pmatrix}a&d&f\\d&b&e\\f&e&c\end{pmatrix}$, matrice de q dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On doit :

Réduire q en base orthonormée (diagonaliser A)

Rechercher un centre éventuel :

Ω est centre de symétrie de la quadrique si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\Omega)=\vec{0}$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z)=\vec{0}$ équivaut à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$, on voit déjà que si q est non dégénérée, alors Σ a un unique centre de symétrie.

Pratique :

On cherche les valeurs propres de A, λ,μ,ν et une base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de vecteurs propres.

- 1[er] cas : $\lambda\mu\nu=\det A\neq 0$:

Il y a alors un unique centre de symétrie, Ω.

L'équation de Σ dans (Ω,e_1,e_2,e_3) est alors $\lambda x'^2+\mu y'^2+\nu z'^2+f(\Omega)=0$

On reconnaît alors l'équation de $\varnothing, E, H_1, H_2, \{0\}, C$ selon les valeurs de $\lambda, \mu, \nu, f(\Omega)$

- $2^{\text{ème}}$ cas :

Si $\lambda\mu \neq 0$ et $\nu = 0$ (q est alors dégénérée)

L'équation de Σ dans (O, e_1, e_2, e_3) est alors :

$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + g' x' + h' y' + i' z' + j = 0$

Ou $\lambda\left(x' + \dfrac{g'}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y' + \dfrac{h'}{2\mu}\right)^2 + i' z' + j'' = 0$

Si $i' \neq 0$, on a un PE si $\lambda\mu > 0$, PH si $\lambda\mu < 0$

Si $i' = 0$, soit $j'' = 0$ et on a une droite ($\lambda\mu > 0$) ou deux plans ($\lambda\mu < 0$)

Soit $j'' \neq 0$ et on a un CE, CH ou $\varnothing$.

- $3^{\text{ème}}$ cas :

Si $\lambda \neq 0$ et $\mu = \nu = 0$.

Alors l'équation dans (O, e_1, e_2, e_3) devient :

$\lambda x'^2 + g' x' + h' y' + i' z' + j = 0$,

Soit $\lambda\left(x' + \dfrac{g'}{2\lambda}\right)^2 + h' y' + i' z' + j'' = 0$

Si $(h', i') = (0,0)$, on a $\varnothing$, un plan ou deux plans parallèles.

Si $(h', i') \neq (0,0)$:

Par changement de base orthonormée dans le plan (O, y', z'), on se ramène à :

$h' y' + i' z' = \sqrt{h'^2 + i'^2}\, y''$

Donc $\lambda x''^2 + \sqrt{h'^2 + i'^2}\left(y'' + \dfrac{j''}{\sqrt{h'^2 + i'^2}}\right) = 0$

C'est-à-dire un cylindre à base parabolique.

- Caractérisation des quadriques de révolution :
- Si Σ est une quadrique, et si A a une valeur propre double λ non nulle, alors Σ est de révolution et son axe est orthogonal au plan propre $\ker(A - \lambda I_3)$
- Si A admet 0 comme valeur propre double, alors Σ est un cylindre à base parabolique ou une quadrique dégénérée.