

# Chapitre 16 : Intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle non compact

But :

Donner un sens aux intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ ,  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \dots$

Rappel sur les fonctions continues par morceaux :

- Sur un segment,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux s'il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$  telle que  $\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$  est continue, et  $f$  a des limites à droite et à gauche (finies) en tous les  $a_i$ .

Proposition :

Une fonction continue par morceaux sur un segment a un nombre fini de discontinuités qui sont de première espèce (il y a une limite finie à droite et à gauche en tout point)

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

- Sur un intervalle non compact  $I$  :

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux lorsque la restriction de  $f$  à tout segment inclus dans  $I$  est continue par morceaux.

Attention : une telle fonction peut avoir une infinité de points de discontinuité (toujours de première espèce) et peut ne pas être bornée.

Exemples :

Sur  $I = [0; +\infty[$

Une application  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux a soit un nombre fini de discontinuités, soit une infinité qu'on peut classer dans une suite  $a_n$  qui tend vers  $+\infty$

Exemple :  $E(x)$

Sur  $I = ]0; 1]$ . Dans le pire des cas, il existe une suite  $\varepsilon_n$  tendant vers 0 de discontinuités de première espèce.

Exemple :  $E\left(\frac{1}{x}\right)$

Si  $I = \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux peut avoir deux suites de points de discontinuité qui tendent l'une vers  $+\infty$ , l'autre vers  $-\infty$

Définition (locale) :

On appelle singularité d'un intervalle  $I$  non compact les bornes de  $I$  (éventuellement infinies) qui ne sont pas dans  $I$ .

## I Cas des fonctions positives (sur $I$ non compact)

### A) Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et positive.  $f$  est dite intégrable (sommable) s'il existe  $M \geq 0$  tel que  $\forall [a, b] \subset I, \int_a^b f(t) dt \leq M$ .

Pour une telle fonction, on pose  $\int_I f = \sup_{[a, b] \subset I} \int_a^b f(t) dt$

Remarque :

Cette définition a un sens même si  $I$  est compact ; on retrouve alors la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive sur un segment.

En effet, si  $I = [\alpha, \beta]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux positive, alors

$$\forall [a, b] \subset I, \int_a^b f = \underbrace{\int_a^a f}_{\geq 0} + \int_a^b f + \underbrace{\int_b^b f}_{\geq 0} \geq \int_a^b f$$

### B) Caractérisation de l'intégrale à l'aide de primitive

- Cas d'une seule singularité :

Théorème :

Soit  $I = [a, b[$  où  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ( $b > a$ )

Et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux positive.

Pour  $x \in I$ , on pose  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $F$  est bornée ou si  $F$  tend vers une limite finie quand  $x \rightarrow b^-$ , et dans ce cas,  $\int_{[a, b[} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$

Remarque :

On a l'énoncé analogue pour  $]a, b]$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ )

Si  $f$  est partout continue,  $F$  est une primitive de  $f$ .

Démonstration :

- Comme  $f$  est positive,  $F$  est croissante et positive.

Donc  $F$  est majorée si et seulement si elle est bornée donc si et seulement si  $F$  a une limite finie en  $b$ .

- Si  $f$  est intégrable, par définition de  $\int_{[a, b[} f(t) dt$ , on a, pour tout  $x \in [a, b[$ ,

$$[a, x] \subset [a, b[. \text{ Donc } F(x) = \int_a^x f \leq \int_{[a, b[} f, \text{ et } F \text{ est bornée.}$$

Inversement, si  $F$  est bornée, alors pour tout  $[\alpha, \beta] \subset [a, b[$ ,

$$\int_a^\beta f(t) dt \leq \int_a^\beta f(t) dt = F(\beta) \leq \sup_{t \in [a, b[} F(t)$$

- Calcul de l'intégrale :

Par définition, pour tout  $x \in [a, b[$ ,  $x \in [a, b[$ ,  $F(x) \leq \int_{[a, b[} f$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \leq \int_{[a, b[} f.$$

Par ailleurs, pour tout  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$ , on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = F(\beta) - \underbrace{F(\alpha)}_{\geq 0} \leq F(\beta) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$$

Donc  $\int_{]a, b[} f \leq \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$

Ce qui montre l'égalité.

- Cas de deux singularités :

**Théorème :**

Soit  $I = ]a, b[$ , où  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux positive, et  $c \in ]a, b[$

Alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $f|_{]c, b[}$  et  $f|_{]a, c]}$  le sont, et dans ce cas

$$\int_{]a, b[} f = \int_{]a, c]}$$

**Corollaire :**

Dans ces conditions,  $f$  est intégrable si et seulement si  $\int_c^x f(t) dt$  a des limites finies

quand  $x \rightarrow b$  et  $x \rightarrow a$  et dans ce cas  $\int_{]a, b[} f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f + \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f$ .

**Démonstration :**

**Lemme :**

Soit  $f$  continue par morceaux,  $J \subset I$  un intervalle.

Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est intégrable sur  $J$  et  $\int_J f(t) dt \leq \int_I f(t) dt$ .

En effet, tout segment  $[a, b] \subset J$  est aussi inclus dans  $I \dots$

Ainsi, si  $f$  est intégrable, alors  $f|_{]a, c]}$  et  $f|_{]c, b[}$  aussi.

**Réciproquement :**

Si  $f|_{]a, c]}$  et  $f|_{]c, b[}$  sont intégrables, alors pour tout  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$  :

Soit  $c \notin [\alpha, \beta]$  et donc

$$\text{Soit } [\alpha, \beta] \subset ]a, c] \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} f \leq \int_{]a, c]} f \leq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f$$

$$\text{Soit } [\alpha, \beta] \subset [c, b[ \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} f \leq \int_{]c, b[} f \leq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f$$

$$\text{Si } c \in [\alpha, \beta], \text{ alors } \int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^c f + \int_c^{\beta} f \leq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f$$

Donc dans tous les cas l'intégrale est majorée.

Donc  $f$  est intégrable, et en passant au sup sur  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$ , on aura

$$\int_{]a, b[} f \leq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f.$$

Pour l'autre inégalité :

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $\int_{]a, c]} f$  et  $\int_{]c, b[} f$ , il existe  $\beta \in [c, b[$  et  $\alpha \in ]a, c]$  tels

que  $\int_{\alpha}^c f(t) dt \geq \int_{]a, c]} f - \varepsilon/2$  et  $\int_c^{\beta} f(t) dt \geq \int_{]c, b[} f - \varepsilon/2$

$$\text{Alors } \int_{]a, b[} f \geq \int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^c f(t) dt + \int_c^{\beta} f(t) dt \geq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f - \varepsilon$$

Et comme c'est valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien  $\int_{]a, b[} f \geq \int_{]a, c]} f + \int_{]c, b[} f$ .

## C) Exemples fondamentaux

Théorème :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > 1$ , et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $\alpha < 1$  et dans ce cas  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$ .

Remarque :

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  n'est jamais intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Démonstration :

Déjà,  $f$  est positive sur  $[1, +\infty[$ . Il suffit donc d'étudier  $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$  pour  $x \in [1, +\infty[$

$$\text{Si } \alpha \neq 1, \text{ on a } \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

Qui a une limite finie si et seulement si  $\alpha > 1$ , et dans ce cas cette limite est  $\frac{1}{1-\alpha}$

Si  $\alpha = 1$ ,  $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \ln x \rightarrow +\infty$ .

Autre exemple :

Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{-a.t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si  $a > 0$  et dans ce

$$\text{cas } \int_0^{+\infty} e^{-a.t} dt = \frac{1}{a}$$

## II Cas des fonctions complexes

En pratique, pour  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , il faudra séparer l'étude du caractère intégrable et le calcul éventuel de  $\int_I f$ .

- Fonctions intégrables à valeurs complexes :

Définition :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux.

$f$  est dite intégrable (sommable) lorsque  $|f|$  l'est.

Remarque :

Si  $f$  est continue par morceaux, alors  $|f|$  aussi.

On note " $L_1(I)$ " l'ensemble des fonctions complexes intégrables sur  $I$ .

- Structure :

Théorème :

" $L_1(I)$ " est un sous-espace de  $C_{pm}(I, \mathbb{C})$ , stable par domination, c'est-à-dire que si  $\varphi \in "L_1(I)"$  et si  $f \in C_{pm}(I, \mathbb{C})$  vérifient  $|f| \leq |\varphi|$ , alors  $f$  est intégrable.

Démonstration :

Déjà, " $L_1(I)$ "  $\subset C_{pm}(I, \mathbb{C})$  et est non vide car contient la fonction nulle.

Soit  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux intégrable, et  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux ; supposons que  $|f| \leq |\varphi|$ .

Alors  $|f|$  est intégrable car pour tout  $[a, b] \subset I$ , on a :

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \int_a^b |\varphi|, \text{ donc } \int_a^b |f| \text{ est majorée.}$$

Donc  $f$  est aussi intégrable.

Supposons que  $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux sont intégrables, et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Alors  $f + \lambda g$  est continue par morceaux et pour tout segment  $[a, b] \subset I$ , on a :

$\int_a^b |f + \lambda g| \leq \int_a^b (|f| + |\lambda||g|)(t) dt = \int_a^b |f| dt + |\lambda| \int_a^b |g| dt \leq \int_a^b |f| + |\lambda| \int_a^b |g|$  car  $f$  et  $g$  sont intégrables.

• Intégrale d'une fonction intégrable :

(1) Pour  $f$  à valeurs réelles, on pose :

$$f^+ = \max(f, 0) \text{ (partie positive de } f)$$

$$f^- = \max(-f, 0) \text{ (partie négative de } f)$$

$$\text{Ainsi, } f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^- \text{ (et } f^+ = \frac{f + |f|}{2}, f^- = \frac{|f| - f}{2})$$

Pour  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable,

On a  $0 \leq f^+ \leq |f|$ ,  $0 \leq f^- \leq |f|$ , et  $f^+, f^-$  sont continues par morceaux donc sont intégrables

$$\text{Et on peut poser } \int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

(2) Pour  $f$  à valeurs complexes, on écrit  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$

Pour  $f$  intégrable,  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont continus par morceaux, et intégrables car  $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$  et  $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ .

$$\text{On peut donc poser } \int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

• Calcul de  $\int_I f$  pour  $f$  intégrable complexe :

Théorème :

(1) Cas d'une seule singularité  $I = [a, b[$

$$\text{Si } f: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ est continue par morceaux intégrable, alors } \int_I f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Et en particulier la limite de droite existe pour  $f \in L_1(I)$

(2) Cas de deux singularités :

Si  $I = ]a, b[$ , soit  $c \in I$ .

Pour  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ , les limites suivantes existent et on a :

$$\int_I f = \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f + \lim_{y \rightarrow a} \int_y^c f.$$

Démonstration :

$$\text{Pour une singularité } I = [a, b[. \text{ On doit montrer que } \int_I f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Si  $f$  est réelle, alors  $\int_I f^+ = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f^+(t) dt$ ,  $\int_I f^- = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f^-(t) dt$ .

Or, par définition,  $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$ .

Donc  $\int_I f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x (f^+(t) - f^-(t)) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$

Si  $f$  est complexe, c'est la même chose avec la partie réelle et imaginaire.

Pour deux singularités, on coupe l'intervalle  $I = ]a, b[$  en  $I = ]a, c] \cup [c, b[$

- Propriétés de l'intégrale :

Théorème :

(1) L'application  $f \in "L_1(I)" \mapsto \int_I f$  est linéaire.

(2) Pour  $f \in "L_1(I)"$ ,  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

Démonstration :

Résulte du calcul de  $\int_I f$  et de la linéarité du passage à la limite.

- Calcul à l'aide d'une suite exhaustive d'intervalles.

Théorème :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux intégrable.

On suppose que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de segments inclus dans  $I$  et recouvrant  $I$ . Alors  $\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{I_n} f(t) dt$

Démonstration :

On pose  $I_n = [a_n, b_n]$ .

Si  $I = [a, b[$ , alors comme  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est exhaustive, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et tend vers  $b$ , la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît vers  $a$  et est stationnaire en  $a$ . On peut donc supposer que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a$ . Alors  $\int_{a_n}^{b_n} f(t) dt = \int_a^{b_n} f(t) dt = F(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$

Si  $I$  a deux singularités, on fait la même chose en coupant en deux.

- Fonctions à valeur dans un espace de Banach.

Définition :

Soit  $f : I \rightarrow E$  continue par morceaux où  $E$  est un espace de Banach.

On dit que  $f$  est intégrable lorsque  $t \mapsto \|f(t)\|$  l'est (l'application est aussi continue par morceaux).

Définition de l'intégrale :

Si  $E$  est de dimension finie, on utilise une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et on écrit

$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i$  où  $f_i : I \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{C} = \mathbb{R}$  sont continues par morceaux et intégrables (par

équivalence des normes dans  $E$ ), et on pose  $\int_I f = \sum_{i=1}^n \left( \int_I f_i \right) e_i$ .

Si  $E$  n'est pas de dimension finie, on a le théorème :

Si  $f : I \rightarrow E$  continue par morceaux est intégrable (où  $I = [a, b[$ ), alors  $\int_a^x f(t) dt$  a une limite finie quand  $x$  tend vers  $b$ , et on pose alors  $\int_I f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ .

(analogue pour deux singularités)

Démonstration :

Comme  $E$  est complet, il suffit de montrer que  $F : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$  vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions lorsque  $x \rightarrow b$ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in [a, b[, \forall x, y \in [A, b[, \|F(x) - F(y)\| \leq \varepsilon$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\|f\|$  est intégrable,  $\int_a^x \|f\|$  a une limite finie  $L$  quand  $x \rightarrow b$

Donc il existe  $A$  tel que  $\forall x \geq A, \left| \int_a^x \|f\| - L \right| \leq \varepsilon / 2$

Alors pour tous  $x, y \in [A, b[$ , on a :

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &= \left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leq \pm \int_x^y \|f(t)\| dt \\ &= \pm \left( \int_a^y \|f(t)\| dt - L - \int_a^x \|f(t)\| dt + L \right) \\ &\leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon \end{aligned}$$

### III Intégrales orientées et relation de Chasles

- Notation :

Si  $f$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I = [a, b], ]a, b[, [a, b[, ]a, b[$ , on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_I f(t)dt$$

NB : lorsque  $a \in \mathbb{R}$ , si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b[$  et intégrable, alors  $f$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]a, b[$  et  $\int_{]a, b[} f(t)dt = \int_{[a, b[} f(t)dt$ , ce qui justifie d'utiliser la même notation.

Si  $b < a$  et  $f$  est continue par morceaux intégrable sur  $[b, a], ]b, a[, [b, a[, ]b, a[$ , on pose alors  $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ .

- Relation de Chasles :

Théorème :

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux intégrable.

Alors pour  $a, b, c \in \bar{I}$ ,  $f$  est intégrable sur  $]b, a[$ ,  $]b, c[$ ,  $]a, c[$  et

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Démonstration :

On peut supposer que  $I = ]\alpha, \beta[$  et que  $\alpha \leq a < b < c \leq \beta$ .

Pour  $f$  réelle, on utilise  $f = f^+ - f^-$  et on se ramène au cas des fonctions positives

Pour  $f$  complexe, on utilise la partie imaginaire et réelle.

### IV Règles usuelles d'intégrabilité

Problème :

Etant donnée  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  est-elle intégrable sur  $I$  ?

On travaille ici avec  $|f|$  car  $f$  est intégrable si et seulement si  $|f|$  l'est.

- Utilisation des relations de comparaison

Théorème (inégalités) :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et positive.

On suppose que  $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$

Alors si  $g$  est intégrable,  $f$  l'est aussi.

Contraposée : si  $f$  n'est pas intégrable,  $g$  ne l'est pas non plus.

Démonstration :

Déjà vue.

Théorème (cas d'une singularité : utilisation des relations de comparaison)

Soit  $I = [a, b[$  où  $a \in \mathbb{R}$  fini, et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux positive

- Si  $g$  est intégrable, et si  $f(x) = O(g(x))$ , alors  $f$  est intégrable.

- Si  $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ , alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $g$  l'est.

L'énoncé est analogue pour une singularité de l'autre côté.

Démonstration :

- Si  $f(x) = O(g(x))$ , alors il existe  $c \in [a, b[$  et  $M \geq 0$  tels que

$$\forall x \in [c, b[, |f(x)| \leq M g(x)$$

Comme  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , elle l'est sur  $[c, b[$  et  $f$  aussi.

Comme de plus  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, c]$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$ , et donc sur  $[a, b[$

- Si  $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ , alors  $|f(x)| \sim_{x \rightarrow b} |g(x)|$ ,

donc  $|f(x)| = O(g(x))$  et  $g(x) = O(|f(x)|)$  et le résultat découle alors du point précédent.

- Règle de Riemann : comparaison avec une fonction puissance :

Théorème :

- Etude de la singularité  $+\infty$  :

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ , continue par morceaux.

(1) Si  $x^\alpha f(x)$ , ou plus généralement  $x^\alpha f(x)$  pour un certain  $\alpha > 1$ , a une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

(2) Si  $xf(x)$  a une limite non nulle (éventuellement infinie) quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$

- Etude de la singularité 0 :

Soit  $f : ]0, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , continue par morceaux.

(1) Si  $\sqrt{x} f(x)$ , ou plus généralement  $x^\beta f(x)$  pour un certain  $\beta < 1$ , a une limite finie quand  $x$  tend vers 0, alors  $f$  est intégrable sur  $]0, b]$ .

(2) Si  $xf(x)$  a une limite non nulle quand  $x$  tend vers 0, alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $]0, b]$ .

Remarque :

Pour une singularité finie  $x_0 \neq 0$ , on peut se ramener à 0 avec le changement de variable  $t = x - x_0$

Si la singularité est en  $-\infty$ , on peut faire le changement de variable  $t = -x$

Démonstration du théorème :

(1) On a  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ , et  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  car  $\alpha > 1$ . Donc  $f$  est intégrable.

(2) On a  $\frac{1}{x} = O(|f(x)|)$ . Comme  $\frac{1}{x}$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ ,  $|f|$  non plus et ni  $f$ .

On fait la même chose pour 0.

Exemples :

$f(x) = x^\alpha e^{-\sqrt{x}}$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ .

$f$  est elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?

Déjà,  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Etude en 0 :

$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^\alpha$ . Donc  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $x^\alpha$  l'est c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha > -1$

Etude en  $+\infty$  :

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$ .

Donc  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc sur  $]0, +\infty[$  dès que  $\alpha > -1$

## V Intégrales impropres

Il peut arriver que  $\int_a^x f(t) dt$  ait une limite finie quand  $x \rightarrow b$  alors que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b]$

Définition :

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux.

Si  $\int_a^x f(t) dt$  a une limite finie  $l$  quand  $x \rightarrow b$ , on pose  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$ .

On dit alors que  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

Si  $\int_a^b |f(t)| dt$  est convergente, on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente.

Si  $\int_a^b f(t) dt$  converge mais  $\int_a^b |f(t)| dt$  diverge, on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est semi-convergente.

On définit de même la convergence pour deux singularités :

Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux et  $c \in ]a, b[$ , on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  converge lorsque  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent.

Attention :

Avec une telle définition,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  diverge, alors que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x dx = 0$ .

Théorème :

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est intégrable sur  $[a, b[$
- $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente.

Et dans ce cas,  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente et de plus

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a, b[} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Démonstration :

Dire que  $f$  est intégrable signifie que  $|f|$  l'est, c'est-à-dire que  $\int_a^x |f(t)| dt$  a une limite finie. De plus, si  $f$  est intégrable, on sait que  $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_{[a, b[} f(t) dt$

Exemples :

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est semi-convergente :

Considérons  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  pour  $t > 0$

Alors  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , prolongeable par continuité en 0 par  $f(0) = 1$

Etude en  $+\infty$  :

-  $f$  n'est pas intégrable, car pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} |f(t)| dt &= \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} dt \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u du = C \times \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Donc  $\left\{ \int_a^b |f(t)| dt, 0 < a < b \right\}$  n'est pas majoré, donc  $f$  n'est pas intégrable.

- Mais  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge :

On va montrer que  $\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Idée : intégration par parties :

$$\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ -\cos t \times \frac{1}{t} \right]_{\pi}^x + \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{-\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} + \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Comme  $\frac{-\cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , et comme  $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $[\pi, +\infty[$  (car

$\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ ), on voit que  $\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$

Intégrale de Fresnel :

$\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt$ . On pose  $f(t) = e^{it^2}$  pour  $t \in \mathbb{R}$

Alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $|f| = 1$  donc  $f$  n'est pas intégrable.

On a cependant pour  $x \geq \pi$  :  $\int_{\pi}^x e^{it^2} dt = \int_{\pi}^x \frac{2it e^{it^2}}{2it} dt = \left[ \frac{e^{it^2}}{2it} \right]_{\pi}^x + \int_{\pi}^x \frac{e^{it^2}}{2it^2} dt$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ix^2}}{2ix} = 0$  et comme  $t \mapsto \frac{e^{it^2}}{2it^2}$  est intégrable sur  $[\pi, +\infty[$ ,  $\int_{\pi}^x e^{it^2} dt$  a une

limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ .

De même sur  $]-\infty, -\pi]$ , puis  $[-\pi, \pi]$  et enfin  $\mathbb{R}$ .

## VI Méthode d'étude des intégrales

- Changement de variable :

Théorème :

Soient  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  un  $C^1$ -difféomorphisme

Soit  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux.

On considère les deux intégrales :

$$\int_J f(t) dt \text{ et } \int_I (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du .$$

Alors ces deux intégrales ont même nature, c'est-à-dire :

- $f$  est intégrable sur  $J$  si et seulement si  $f \circ \varphi \times \varphi'$  l'est sur  $I$ .
- $\int_J f(t) dt$  est semi-convergente si et seulement si  $\int_I (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$  l'est.

Et lorsque les intégrales existent, on a :

$$\int_J f(t) dt = \varepsilon \int_I (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du \text{ où } \varepsilon \text{ vaut } 1 \text{ si } \varphi \text{ est croissante, } -1 \text{ sinon.}$$

Démonstration :

En terme de convergence d'intégrales :

Supposons que  $I = [a, b[$   $J = [\alpha, \beta[$  (et que  $\varphi$  est croissante et  $\varphi(a) = \alpha$ )

$$\text{Alors pour } x \in J, \int_{\alpha}^x f(t) dt \underset{t=\varphi(u)}{=} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow \beta} \varphi^{-1}(x) = b$ , si  $\int_a^y f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$  est convergente, c'est pareil pour

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt$$

Pour la réciproque, on le fait avec  $\varphi^{-1}$

Pour l'absolue convergence, on remplace  $f$  par  $|f|$

- Utilisation d'une intégration par parties :

Intérêt : permet d'accélérer la convergence d'une intégrale.

Attention : il faut toujours se ramener à des intégrales sur un segment, puis passer à la limite.

Exemples :

Etude d'une intégrale impropre :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$  pour  $\alpha > 0$

L'application  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , et on a  $f(t) \sim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha}$ , donc  $f$  est intégrable sur  $]0, \pi]$  si et seulement si  $1 - \alpha > -1$ , c'est-à-dire  $\alpha > 2$

En  $+\infty$  :

On a  $\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ . Déjà, si  $\alpha > 1$ ,  $f$  est intégrable sur  $[\pi, +\infty[$

Si  $\alpha \leq 1$ , on a  $\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[ -\frac{\cos t}{t^\alpha} \right]_\pi^x + \alpha \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$

Si  $\alpha > 0$ , alors  $\left[ -\frac{\cos t}{t^\alpha} \right]_\pi^x$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ , et  $t \mapsto \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$  est intégrable sur  $[\pi, +\infty[$ .

Donc  $\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  a une limite finie en  $+\infty$ .

Si  $\alpha \leq 0$ , on a  $\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt \geq 2$

Donc  $\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  n'a pas de limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$

car si  $F(x) = \int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ,

alors  $\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) \rightarrow l - l = 0$

Conclusion ;

Si  $1 < \alpha < 2$ ,  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$

Si  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\int_\pi^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et  $f$  est intégrable sur  $]0, \pi]$  donc  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge

Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\int_\pi^{+\infty} f(t) dt$  diverge, donc  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  aussi.

Développement asymptotique en  $+\infty$  de  $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$

On a  $f(x) = e^{-x^2} \left( A + \int_0^x e^{t^2} dt \right)$  où  $A = \int_0^1 e^{t^2} dt$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} \left( A + \int_0^x \frac{2te^{t^2}}{2t} dt \right) = e^{-x^2} \left( A + \left[ \frac{1}{2t} e^{t^2} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2x} + A' e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t} dt \end{aligned}$$

Avec  $A' = A - \frac{1}{2} e$ . En refaisant une intégration par parties,

$$f(x) = \frac{1}{2x} + A' e^{-x^2} + e^{-x^2} \left( \left[ \frac{1}{4t^3} e^{t^2} \right]_1^x + \frac{4}{3} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \right) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + A'' e^{-x^2} + \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

Avec  $A'' = A' - \frac{1}{4} e$

On cherche une majoration de  $\varepsilon(x) = \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$  :

On note  $\varphi : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^4}$ , de classe  $C^1$  et  $\varphi'(t) = \frac{e^{t^2}}{t^3} (2t^2 - 4)$

Donc  $\varphi'(t) \geq 0$  si  $t \geq \sqrt{2}$ , et  $\varphi'(t) \leq 0$  si  $1 \leq t \leq \sqrt{2}$

Donc  $\max_{1 \leq t \leq x} \varphi(t) = \max(\varphi(1), \varphi(x)) = \varphi(x)$  pour  $x \geq A$  assez grand.

Ainsi, pour  $x \geq A$  :  $|\varepsilon(x)| \leq \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \varphi(x) dt = \frac{3}{4} (x-1) \frac{1}{x^4} = O(1/x^3)$

Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$

• Utilisation d'une série :

Proposition (hors programme) :

On suppose que  $I = [a, b[$  (une seule singularité)

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de  $I$  telle que  $x_0 = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux.

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si la série de terme général

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt \text{ converge, et dans ce cas on a } \int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$$

Démonstration :

Si  $f$  est intégrable, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n u_k = \int_a^{x_{n+1}} |f(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Donc la suite des sommes partielles est croissante majorée, donc converge.

Inversement, si la série de terme général  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors pour tout  $[u, v] \subset I$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{n+1} \geq v$  et :

$$\int_u^v |f(t)| dt \leq \int_a^{x_{n+1}} |f(t)| dt = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Donc  $\left\{ \int_u^v |f(t)| dt, [u, v] \subset I \right\}$  est borné, donc  $f$  est intégrable.

Calcul :

La série de terme général  $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$  est absolument convergente (car

$|v_n| \leq u_n$ ), et  $\sum_{k=0}^n v_k = \int_a^{x_{n+1}} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$  car  $x_{n+1} \rightarrow b$  et  $f$  est intégrable.

Remarque :

Cette méthode peut montrer que  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente même si  $f$  n'est pas intégrable :

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux, et une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante telle que  $x_0 = a$  et tendant vers  $b$ . On note  $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$

(1) Si  $\int_a^b f$  converge, alors la série de terme général  $v_n$  converge

(2) La réciproque peut être fautive :

Exemple : avec  $f(t) = \sin t$  et  $x_n = 2n\pi$

Alors  $\int_0^{+\infty} f$  diverge, mais  $v_n = 0$  converge

(3) Si la série de terme général  $v_n$ , et si  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$ , alors  $\int_a^b f$  converge.

En effet, pour  $x \in [a, b[$ , il existe un unique rang  $n$  pour lequel  $x_n \leq x < x_{n+1}$

$$\text{Donc } \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_n} f(t) dt + \int_{x_n}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \underbrace{\int_{x_n}^x f}_{\varepsilon(x)}$$

$$\text{Et } |\varepsilon(x)| \leq \int_{x_n}^x |f(t)| dt \leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

## VII Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide ni réduit à un point.

On note  $L_1^*(I)$  l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  continues et intégrables.

Et  $L_2^*(I)$  l'ensemble des fonctions  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  continues telles que  $|f|^2$  est intégrable.

• Théorème :

$L_1^*(I)$  et  $L_2^*(I)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $C^0(I, \mathbb{C})$ , l'application  $L_1^*(I) \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une norme sur  $L_1^*(I)$  et  $L_2^*(I)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f| \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_I \bar{f}(t)g(t) dt$$

défini et est un produit scalaire.

Complément :

$L_1^*(I)$  n'est pas complet pour  $\| \cdot \|_1$

$L_2^*(I)$  n'est pas complet pour la norme  $\| \cdot \|_2$  associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Démonstration :

On a déjà (quasiment) vu que  $L_1^*(I)$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0(I, \mathbb{C})$

Pour  $L_2^*(I)$  :

Si  $f \in L_2^*(I)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $\lambda f \in L_2^*(I) \dots$

Soient  $f, g \in L_2^*(I)$ .

Alors pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^2 &= |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{f}(x)g(x)) \\ &\leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2|f(x)g(x)| \\ &\leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \end{aligned}$$

(Car  $\forall a, b \in \mathbb{R}, 2ab \leq a^2 + b^2$ )

Donc  $f + g$  est intégrable.

Pour  $\| \cdot \|_1$  : elle est déjà positive, homogène et vérifie l'égalité du triangle.

Elle est de plus séparante :

Soit  $f \in L_1^*(I)$ , supposons que  $\|f\|_1 = 0$

Alors pour tout  $[u, v] \subset I$ ,  $0 \leq \int_u^v |f(t)| dt \leq \int_I |f| = \|f\|_1 = 0$

Comme  $|f|$  est continue sur  $[u, v]$ , on a  $|f| = 0$  sur  $[u, v]$

Donc  $f$  est nulle sur  $I$ .

Pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  :

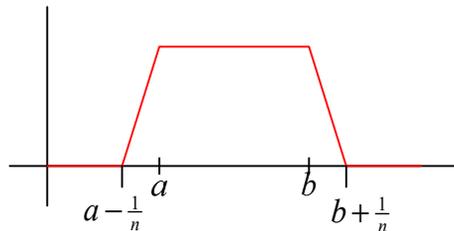
Elle est bien définie car si  $f, g \in L_2^*(I)$ , alors  $t \mapsto \bar{f}(t)g(t)$  est intégrable car elle est continue et pour tout  $t \in I$ ,  $|\bar{f}(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ .

Elle est bien aussi linéaire à droite, hermitienne, positive,

Et définie positive : si  $\langle f, f \rangle = 0$ , alors  $|f|^2$  vérifie  $\| |f|^2 \|_1 = 0$  soit  $|f|^2 = 0$

Non complétude :

Soit  $[a, b] \subset I$  où  $a < b$  et intérieurs à  $I$ .



On pose  $f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t \in I \setminus [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}] \end{cases}$  et affine sur  $[a - \frac{1}{n}, a]$  et  $[b, b + \frac{1}{n}]$ . Alors

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy pour  $\| \cdot \|_1$  ( $\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{2}{m}$ ) et pour  $\| \cdot \|_2$  ( $\|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{2}{m}$ )

Et la suite diverge, à la fois pour  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$ .

Car si elle convergerait vers  $g \in L_k^*(I)$  pour  $\| \cdot \|_k$  ( $k = 1, 2$ ), on aurait alors

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]a, b[ \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus [a, b] \end{cases}$ , qui n'est pas continue en  $a$  et  $b$ .

• Comparaison des normes  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$ ,  $\| \cdot \|_\infty$ .

Propriétés :

(1) Si  $I = [a, b]$ , alors pour toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue, on a

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

Mais les trois normes ne sont pas équivalentes sur  $C^0([a, b], \mathbb{C})$ .

(2) Si  $I$  est borné, alors  $L_2^*(I) \subset L_1^*(I)$  (toute fonction de carré intégrable est intégrable), et pour  $f$  de carré intégrable, on a  $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$ , mais  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  ne sont pas équivalentes.

(3) Si  $I$  n'est pas borné, il n'y a pas d'inégalité entre  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$ .

Démonstration :

(1) Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour la non équivalence des normes : on peut supposer, quitte à faire un changement de variable affine, que  $I = [0;1]$ .

On pose alors pour  $n \in \mathbb{N}^*$   $f_n : t \mapsto t^n$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\text{Et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = +\infty$$

Donc on ne peut pas trouver  $c > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_2 \leq c \cdot \|f_n\|_1$  ou ...

(2) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux de carré intégrable.

Alors  $f$  est intégrable :

- Déjà,  $f$  est continue par morceaux (!)

Et  $\forall t \in I, |f(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + 1)$ . Mais comme  $I$  est borné,  $t \mapsto |f(t)|^2 + 1$  est intégrable sur  $I$ .

- Pour l'inégalité :

Soit  $f$  continue par morceaux de carré intégrable sur  $I = [a, b]$  borné.

Pour tout  $[u, v] \subset I$ , on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_u^v |f(t)| dt \leq \sqrt{\int_u^v 1 dt \int_u^v |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{(v-u) \int_u^v |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

Et donc en passant à la borne supérieure pour  $[u, v] \subset I$  :

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

- Non équivalence : voir (1).

(3) On peut supposer par exemple que  $I = [0; +\infty[$

On pose pour  $\lambda > 0$   $f_\lambda : t \mapsto e^{-\lambda t}$ . Alors pour tout  $\lambda > 0$ ,  $f_\lambda$  est continue, intégrable et de carré intégrable.

$$\text{On a de plus } \|f_\lambda\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \|f_\lambda\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

$$\text{Pour } \lambda = n \in \mathbb{N}, \text{ on a alors } \frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = \frac{\sqrt{2n}}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{Et pour } \lambda = \frac{1}{n} : \frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n} \rightarrow +\infty$$

## VIII Compléments

- Intégrale très utiles :

Proposition (hors programme) :

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , l'application  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t.z} \in \mathbb{C}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , et intégrable si et seulement si  $\text{Re}(z) > 0$ , et dans ce cas,  $\int_0^{+\infty} e^{-z.t} dt = \frac{1}{z}$

Démonstration :

On note, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f_z$  l'application introduite.

Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f_z$  est continue, et  $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$

- Si  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ , alors  $\forall t \geq 0, |f_z(t)| \geq 1$ , donc  $f_z$  n'est pas intégrable.
- Si  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_z(t) = 0$  donc  $f_z$  est intégrable.

Calcul :

$$\text{Pour tout } x \geq 0, \int_0^x e^{-z.t} dt = \left[ \frac{1}{-z} e^{-z.t} \right]_0^x = \frac{1}{z} (1 - e^{-z.x})$$

$$\text{Or, comme } \operatorname{Re}(z) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-z.x} = 0, \text{ donc } \int_0^{+\infty} e^{-z.t} dt = \frac{1}{z}$$

- Théorème d'intégration des relations de comparaison :

Théorème (hors programme) :

On suppose que  $I = [a, b[$  (une seule singularité)

Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux où  $g$  est à valeurs réelles positives.

(1) Si  $f(x) = o(g(x))$  :

- Si  $g$  est intégrable, alors  $f$  est intégrable et  $\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ .
- Si  $g$  n'est pas intégrable, alors  $\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$  (on se sait rien sur  $f$ )

Remarque :

Dans le premier cas,  $\int_x^b g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$  et dans le deuxième  $\int_a^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$

(2) On a un énoncé analogue pour  $O$ .

(3) Si  $f(x) \sim g(x)$ , alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $g$  l'est et :

- Si elles sont intégrables, alors  $\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$
- Si elles ne le sont pas, alors  $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$

Démonstration :

(1) Si  $g$  est intégrable, alors  $|f(x)| = o(g(x))$  donc  $f$  est intégrable.

On va montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[, \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $f(x) = o(g(x))$ , il existe  $c \in [a, b[$  tel que  $t \in [c, b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$ .

Donc pour  $x \in [c, b[$ , on a  $\forall t \in [x, b[, |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$  et donc

$$\left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt.$$

Cas de divergence :

Déjà,  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt = +\infty$  car  $g$  est positive et non intégrable.

On va montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[, \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_a^x g(t) dt$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $c_1 \in [a, b[$  tel que  $\forall t \in [c_1, b[, |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)$

Pour  $x \in [c_1, b[$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t) dt \right| &= \left| \int_a^{c_1} f(t) dt + \int_{c_1}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^{c_1} f(t) dt \right| + \left| \int_{c_1}^x f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^{c_1} f(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \int_{c_1}^x g(t) dt \\ &\leq A + \frac{\varepsilon}{2} \int_{c_1}^x g(t) dt \end{aligned}$$

Où  $A = \left| \int_a^{c_1} f(t) dt \right|$ . Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{A}{\int_a^x g(t) dt} = 0$ , donc il existe  $c_2 \in [a, b[$  tel que

$$\forall x \in [c_2, b[, \frac{A}{\int_a^x g(t) dt} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En posant  $c = \max(c_1, c_2)$ , on aura pour  $x \in [c, b[$  :

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq A + \frac{\varepsilon}{2} \int_{c_1}^x g(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{c_1}^x g(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{c_1}^x g(t) dt$$

D'où le résultat.

(2) La démonstration est quasiment la même.

(3) Il suffit de poser  $h = f - g$ . Ainsi,  $h(x) = o(g(x))$  et on applique (1).

Application de l'intégration des relations de comparaison :

• Intégration des DL généralisés :

Soit  $f : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{C}$  continue ayant un DL en 0 de la forme

$f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \dots + a_p x^{\alpha_p} + o(x^{\alpha_p})$  où  $\forall i \in [1, p], a_i \in \mathbb{C}^*$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , rangés par ordre croissant.

(1) Alors  $f$  est intégrable sur  $]0, a[$  si et seulement si  $\alpha_1 > -1$  car  $|f(x)| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} |a_1| x^{\alpha_1}$

(2) On suppose que  $\alpha_1 > -1$ . Alors on a le DL généralisé :

$$\int_0^x f(t) dt = a_1 \frac{x^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} + \dots + a_p \frac{x^{\alpha_p+1}}{\alpha_p+1} + o(x^{\alpha_p+1})$$

Démonstration :

On pose  $\varepsilon(x) = o(x^{\alpha_p})$ . Alors  $x \mapsto x^{\alpha_p}$  est intégrable sur  $]0, a[$  et positive (car  $\alpha_p > \alpha_1 > -1$ ).

$$\text{On a donc } \int_0^x \varepsilon(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\int_0^x t^{\alpha_p} dt\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{\alpha_p+1})$$

Exemple :

Arccos :  $[-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$ .

Alors Arccos est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1; 1[$ , et  $\forall x \in ] -1; 1[, \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

DL généralisé en  $x_0 = 1$  :

Pour  $x \in ] -1; 1[$ , on pose  $h = 1 - x > 0$  et on a :

$$\text{Arccos}'(1-h) = \frac{-1}{\sqrt{2h-h^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2h}} \left(1 - \frac{h}{2}\right)^{-1/2}$$

$$\operatorname{Arccos}'(1-h) = \frac{-1}{\sqrt{2}} h^{-1/2} \left( 1 + \frac{h}{4} + O(h^2) \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} h^{-1/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} h^{1/2} + O(h^{3/2})$$

Donc en intégrant entre  $1-h$  et  $1$  :

$$\operatorname{Arccos}(1) - \operatorname{Arccos}(1-h) = -\sqrt{2}h^{1/2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}h^{3/2} + O(h^{5/2})$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}(x) &= \sqrt{2}(1-x)^{1/2} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1-x)^{3/2} + O((1-x)^{5/2}) \\ &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

• Exemple déjà fait :

On a pour  $x \geq 1$  :

$$\begin{aligned} e^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt &= e^{-x^2} \left( \left[ \frac{1}{2t} e^{t^2} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2} + e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \end{aligned}$$

Or,  $t \mapsto e^{t^2}$  est positive non intégrable sur  $[1, +\infty[$

Et de plus  $\frac{e^{t^2}}{2t^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{t^2})$ , donc  $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$ ,

Soit  $e^{-x^2} \left( \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$

Donc  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$