Chapitre 19 : Séries de Fourier

I Analyse harmonique

On considère les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-périodiques continues par morceaux ($T>0$)

On pose $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

A) Moyenne

Théorème :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux T-périodique.
Alors la quantité $\dfrac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$ est indépendante de $a\in\mathbb{R}$.

Définition :
On l'appelle valeur moyenne de *f* sur une période.

Démonstration :
On a $\int_a^{a+T} f=\int_a^0 f+\int_0^T f+\int_T^{a+T} f$

Or, $\int_T^{a+T} f=\int_T^{a+T} f(t-T)dt=\int_0^a f(u)du$

Donc il nous reste $\int_a^{a+T} f=\int_0^T f$.

B) Coefficients et série de Fourier de *f*.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux T-périodique.

- Coefficients complexes :

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on pose $c_n(f)=\dfrac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-i\omega.nt}f(t)dt=\dfrac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{\frac{-2i\pi}{T}nt}f(t)dt$

- Série de Fourier de *f* :

C'est la série de terme général u_n où
$\forall x\in\mathbb{R}, u_0(x)=c_0(f)$
Et pour $n\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}, u_n(x)=c_n(f)e^{in\omega.x}+c_{-n}(f)e^{-in\omega.x}$

De sorte que la *n*-ième somme partielle de *f* en $x\in\mathbb{R}$ est :

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e^{ik\omega.x}$$

Attention :

Pour la série de Fourier, on utilise la notation $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ et pas $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(f)e^{\frac{2ik\pi}{T}x}$

(Les séries peuvent diverger)

- Forme trigonométrique :

On pose $a_0(f)=c_0(f)$: moyenne de *f*.

Et pour $n\geq 1$, $a_n(f)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\dfrac{2\pi.nt}{T}\right)dt$, $b_n(f)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\dfrac{2\pi.nt}{T}\right)dt$

- Relation :

Théorème :

On a $a_0(f)=c_0(f)$

Pour $n\geq 1$, on a

$\forall x\in\mathbb{R}, c_n(f)e^{in\omega.x}+c_{-n}(f)e^{-in\omega.x}=a_n(f)\cos(n\omega.x)+b_n(f)\sin(n\omega.x)$

Et donc $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$, $b_n(f)=ic_n(f)-ic_{-n}(f)$

Ou $c_n(f)=\dfrac{1}{2}(a_n(f)-ib_n(f))$, $c_{-n}(f)=\dfrac{1}{2}(a_n(f)+ib_n(f))$

Démonstration :
Il suffit d'écrire les coefficients sous forme intégrale.
Autre écriture de la série de Fourier :

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(n\omega.x)+b_n(f)\sin(n\omega.x))$$

C) Symétries

On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux *T*-périodique.
Morale :
Les symétries de *f* se retrouvent sur sa série de Fourier :

Théorème :

(1) Si *f* est réelle, alors $a_0\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n(f), b_n(f)\in\mathbb{R}$.

Ou $\forall n\in\mathbb{Z}, \overline{c_n(f)}=c_{-n}(f)$

(2) Si *f* est paire, on a $\forall n\geq 1, b_n(f)=0$

Et $a_0(f)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$, et pour $n\geq 1$, $a_n(f)=\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega.t)dt$.

Si *f* est impaire, on a $\forall n\geq 0, a_n(f)=0$

Et $\forall n\geq 1, b_n(f)=\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega.t)dt$

Démonstration :
Le premier point est clair. Pour le deuxième :
Si *f* est paire, $t\mapsto f(t)\sin(n\omega.t)$ est impaire donc $b_n(f)=0$
Et $t\mapsto f(t)\cos(n\omega.t)$ est paire, donc pour $n\geq 1$,

$$a_n(f)=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega.t)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega.t)dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega.t)dt$$

C'est la même chose pour *f* impaire.

Théorème : coefficients de Fourier d'une dérivée

On suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *T*-périodique, C^1 par morceaux et continue.

On pose $g(x)=\begin{cases} f'(x) \text{ si } f \text{ est dérivable en } x \\ \dfrac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}(f'(x+h)+f'(x-h)) \text{ sinon} \end{cases}$.

Alors g est continue par morceaux, T-périodique et on a :

$\forall n\in\mathbb{Z}, c_n(g)=in\omega.c_n(f)$

Autrement dit, pour tout n, $S_n(f)'=S_n(g)$ $(=S_n(f')$ si f est dérivable)

Rappel :

Comme f est supposée C^1 par morceaux, f' a une limite à droite et à gauche en tout point.

Démonstration :

(1) Si f est de classe C^1 :

Alors $g=f'$, et :

$$c_n(f')=\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega.t}dt=\frac{1}{T}\underbrace{\left[f(t)e^{-in\omega.t}\right]_0^T}_{=0}-\frac{1}{T}\int_0^T(-in\omega)f(t)e^{-in\omega.t}dt$$

$$=in\omega.c_n(f)$$

(2) Si f est C^1 par morceaux :

Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que f et g soient définis et continus en a.

On note $a_0=a<a_1...<a_p=a+T$ les points où f n'est éventuellement pas dérivable.

Alors $T.c_n(g)=\int_a^{a+T}g(t)e^{-in\omega.t}dt=\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}g(t)e^{-in\omega.t}dt$

NB : $f_{/[a_j,a_{j+1}]}$ est de classe C^1 car f est continue sur $\left[a_j,a_{j+1}\right]$ et f' a des limites en a_j et a_{j+1}.

Comme $g_{/[a_j,a_{j+1}]}$ coïncide avec $\left(f_{/[a_j,a_{j+1}]}\right)'$ sauf peut-être en a_j ou en a_{j+1}, on peut faire l'intégration par partie et :

$$T.c_n(g)=\sum_{j=0}^{p-1}\left[f(t)e^{-in\omega.t}\right]_0^T+in\omega\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}f(t)e^{-in\omega.t}dt=in\omega.T.c_n(f)$$

D'où le résultat.

D) Lemme de Riemann–Lebesgue

Théorème :

Si $f:[0,T]\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors $\lim_{n\to\pm\infty}\int_0^T f(t)e^{in\omega.t}dt=0$

Corollaire :

Si f est continue par morceaux et T-périodique, alors $\lim_{n\to\pm\infty}c_n(f)=0$

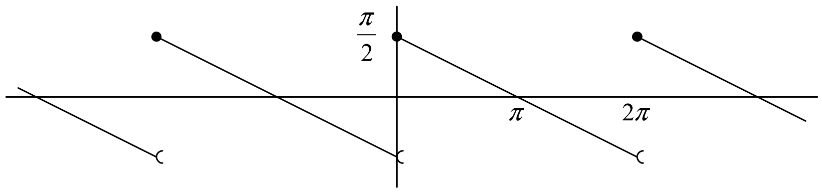
Démonstration :

Déjà vu.

E) Exemple

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique définie par $\forall x\in[0,2\pi], f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$

Quelle est la série de Fourier de f ?
Etudier la convergence de cette série et calculer sa somme.



Si on pose $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\not\equiv 0\ [2\pi] \\ 0 \quad \text{ si } x\equiv 0\ [2\pi]\end{cases}$

Alors $\tilde{f}$ est impaire, et $\tilde{f}$ et f ont les mêmes coefficients de Fourier.

Donc les a_n sont nuls pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On a $T=2\pi$, donc $\omega=1$

Et $b_n(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(n.t)dt=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{\pi-t}{2}\sin(n.t)dt$

Soit en faisant une intégration par parties :

$$\pi.b_n(f)=\left[-\cos(n.t)\frac{\pi-t}{2n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(n.t)dt}_{=0}$$

$$=\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n(f)=\dfrac{1}{n}$

Et $S(f)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n.x}{n}$

Calcul de $S(f)$:

Si $x\in\pi\mathbb{Z}, S(f)=0$

Si $x\notin\pi\mathbb{Z}$:

On a $\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}dt$

Soit $N\in\mathbb{N}$. On a :

$$S_N(f)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\sin(nx)t^{n-1}dt$$

$$=\operatorname{Im}\left(\int_0^1\sum_{n=1}^{N}t^{n-1}e^{-in.x}dt\right)=\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}(1-t^Ne^{iNx})dt\right)$$

$$=\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}dt-r_n\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}dt\right)$$

Où $|r_n|\leq\displaystyle\int_0^1\frac{t^N}{|1-te^{ix}|}dt\leq\frac{M}{n+1}\to 0$, avec M tel que $\forall t\in[0,1], \dfrac{1}{|1-te^{ix}|}\leq M$

Et on a de plus $\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}dt = -\int_0^1 \frac{dt}{t-e^{-ix}} = \ln(2\sin\frac{x}{2}) + i\frac{\pi - x}{2}$

Donc $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour $x \in]0,2\pi[$

II Un espace préhilbertien

A) Espace des fonctions continues 2π-périodiques

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques.

- Structure :

Théorème :

$C_{2\pi}$ est une sous–algèbre de $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ munie de $+,\cdot,\times$

Remarque :

On a un autre opérateur : la convolution dans $C_{2\pi}$:

Pour $f,g \in C_{2\pi}$, on pose $f * g$ l'application définie par

$\forall x \in \mathbb{R}, (f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$

On a vu que $*$ est une loi de composition interne, bilinéaire, commutative, associative dans $C_{2\pi}$.

- Produit scalaire :

Théorème :

L'application $(f,g) \in C_{2\pi}^2 \mapsto \langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C_{2\pi}$

Mais $C_{2\pi}$ n'est pas complet pour la norme $\| \; \|_2$ associée à ce produit scalaire.

B) Des systèmes orthogonaux

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'application e_n par $\forall t \in \mathbb{R}, e_n(t) = e^{in.t}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}, c_n(t) = \cos(nt)$

Et pour $n \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}, s_n(t) = \sin(nt)$

Alors toutes les application introduites sont dans $C_{2\pi}$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale

Et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale, avec $\forall n \geq 1, \|c_n\|_2 = \|s_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\|c_0\|_2 = 1$

En effet :

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in.t}e^{im.t}dt = \delta_{n,m}$ pour $m,n \in \mathbb{Z}$

Et pour $n \geq 1$, $\|c_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \frac{1}{2}$

C) Polynômes trigonométriques

Propriété :
Les familles $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(c_p,s_q)_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{N}^*}}$ sont libres.

Pour $N\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Vect}(e_n,|n|\leq N)=\mathrm{Vect}(c_p,s_q,0\leq p\leq N,1\leq q\leq N)$

Démonstration :
Les familles sont libres car orthogonales et aucun vecteur n'est nul.
L'égalité résulte de formules de trigonométrie.

On pose alors $T_N=\mathrm{Vect}(e_n,|n|\leq N)$, et $T=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}T_N$

Définition :
Un élément de T s'appelle polynôme trigonométrique.
Si $P\in T\setminus\{0\}$, on appelle degré de P le plus petit entier N tel que $P\in T_N$.

Théorème :
T est le sous-espace de $C_{2\pi}$ engendré par $C_{2\pi}$ ou par $(c_p,s_q)_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{N}^*}}$

De plus, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de T, et $(c_p,s_q)_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ q\in\mathbb{N}^*}}$ une base orthogonale.

On a donc un filtre de sous-espaces de $C_{2\pi}$ (pas tout à fait un drapeau, la dimension augmente de 2) : $T_0=\mathbb{C}e_0\subset T_1\ldots\subset T\subset C_{2\pi}$

Exemples :

- Noyau de Dirichlet :

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $D_n=\sum_{k=-n}^{n}e_k\in T_n$

Formule : $\forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(t)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2N+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)}$

Et $\forall t\in 2\pi\mathbb{Z}, D_N(t)=2N+1$

Démonstration :
Si $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_N(t)=e^{-iN.t}\sum_{j=0}^{2N}e^{ij.t}=e^{-in.t}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}}$$

$$=e^{-i(N+\frac{1}{2})t}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}=\frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})t}-e^{i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}$$

- Noyau de Féjer :

On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $F_n=\dfrac{D_0+\ldots+D_n}{n+1}\in T_n$.

Formule : $\forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, F_n(t)=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2\geq 0$

Et $\forall t\in 2\pi\mathbb{Z}, F_n(t)=n+1$

Démonstration :

Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(t) = \dfrac{1}{n+1}(1+3+\ldots+(2n+1))$ et on montre par récurrence que $(1+3+\ldots+(2n+1)) = (n+1)^2$, d'où l'expression.

Sinon : $(n+1)F_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t}}{\sin\frac{t}{2}}\right)$

Et $(n+1)\sin\frac{t}{2} F_n(t) = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})t}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{-2i\sin\frac{t}{2}}\right) = \frac{1-\cos((n+1)t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$

D'où la formule.

D) Interprétation géométrique des séries de Fourier

Théorème :

Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur T_n.

En particulier, $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$

Démonstration :

Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$.

On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in.t} f(t)dt = \langle e_n, f \rangle$

Donc $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k$

Comme $\{e_k, |k| \leq n\}$ est une base orthonormale de T_n, $S_n(f)$ est bien la projection orthogonale de f sur T_n

De plus, $f - S_n(f)$ et $S_n(f)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore, $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$

Et comme de plus $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ où $\{e_k, |k| \leq n\}$ est orthonormale, on a bien $\|S_n(f)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$.

Corollaire :

Pour tout $f \in C_{2\pi}$, la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable, c'est-à-dire que la série de terme général $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$ converge, et on a l'inégalité de Bessel :

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

(On verra qu'il y a en fait égalité)

Démonstration :

Découle du théorème.

E) Un peu d'analyse fonctionnelle

- Théorème (de convergence normale de Dirichlet) :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, C^1 par morceaux et continue, 2π-périodique.

Alors la série de Fourier de *f* converge normalement vers *f*, c'est-à-dire :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik.x} = f(x)$ et la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable (c'est-à-dire que la série de terme général $|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ converge)

Démonstration :

La famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

En effet :

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

Pour $x \in \mathbb{R}$, si *f* est dérivable en *x*, $g(x) = f'(x)$

Sinon, $g(x) = \frac{1}{2}(f'_d(x) + f'_g(x))$

NB : comme *f* est partout continue et C^1 par morceaux, f'_d et f'_g existent en tout point.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = in.c_n(f)$ (déjà vu)

Donc pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| + |c_{-n}(f)| &= \frac{1}{n}\left(|c_n(g)| + |c_{-n}(g)|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(g)|^2 + \frac{1}{n^2} + |c_{-n}(g)|^2\right)
\end{aligned}$$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2))$

Reste à montrer que l'inégalité de Bessel s'applique à *g* (qui n'est *pas continue*) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(g) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k$ vérifie $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S_n(g)(x)}\underbrace{(g - S_n(g))}_{h}(x)dx = 0$.

En effet, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S_n(g)(x)}h(x)dx = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_n(g)}\int_0^{2\pi} e^{-ik.x}h(x)dx$

Et $\int_0^{2\pi} e^{-ik.x}h(x)dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx}g(x)}_{2\pi\times c_k(g)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx}S_n(g)(x)}_{2\pi\times c_k(g)} = 0$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t) - S_n(g)(t) + S_n(g)(t)|^2 dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t) - S_n(g)(t)|^2 dt}_{\geq 0} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n(g)(t)|^2 dt \\
&\geq \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2
\end{aligned}$$

Donc la famille est bien sommable et on a encore l'inégalité.

Montrons maintenant la limite :
Lemme :

Pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $S_n(f)(x)=(D_n*f)(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(t)f(x-t)dt$

En effet,

$$\begin{aligned}S_n(f)(x)&=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e^{ikx}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_a^{a+2\pi}e^{-ikt}f(t)dt\right)e^{ikx}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-t)}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}D_n(x-t)f(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}D_n(t)f(x-t)dt\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)f(x-t)dt-f(x)$$

Or, $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_n(t)dt=1$

Donc $S_n(f)(x)-f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)(f(x+u)-f(x))du$

Et aussi $S_n(f)(x)-f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(-u)(f(x-u)-f(x))du$

Mais comme D_n est pair,

$$\begin{aligned}S_n(f)(x)-f(x)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))du\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin\frac{u}{2}}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))du\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+\tfrac{1}{2})u)\varphi_x(u)du\end{aligned}$$

Où $\varphi_x(u)=\begin{cases}\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2f(x)}{\sin\frac{u}{2}} & \text{si } u\neq 0\\ 2(f'_d(x)-f'_g(x)) & \text{si } u=0\end{cases}$

Ainsi, $\varphi_x:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ est continue ($\sin\frac{u}{2}\underset{u\to 0}{\sim}\frac{u}{2}$)

Et d'après le lemme de Riemann Lebesgue, $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda u}\varphi_x(u)du=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f)(x)-f(x)=0$

- Théorème de Féjer (Hors–programme) :

NB : il existe des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues, 2π-périodiques telles que la série de terme général $S_n(f)(0)$ *diverge*. (voir compléments à la fin du cours)

Théorème :

Pour $f\in C_{2\pi}$, la suite de terme général $\sigma_n(f)=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers *f*.

Lemme :

Pour tous $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f) = F_n * f$.

En effet : $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k * f = \left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\right) * f$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, du fait que $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))F_n(t)dt\end{aligned}$$

On introduit le module de continuité uniforme ω de *f* :

Pour $\delta \geq 0$, on note $\omega(\delta) = \{|f(x) - f(y)|, |x-y| \leq \delta\}$.

Comme *f* est bornée et continue, 2π-périodique, ω est défini et continu en 0.

Ainsi, ω vérifie $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

Soit δ tel que $0 \leq \delta < \pi$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)||F_n(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)||F_n(t)|dt \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||F_n(t)|dt\end{aligned}$$

Mais F_n est positive (on l'avait vu pour le calcul de son expression)

Pour la première intégrale, comme $|t| \leq \delta$, on a $|f(x-t) - f(x)| \leq \omega(\delta)$

Pour les autres, $|f(x-t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\omega(\delta)\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)dt + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} F_n(t)dt\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\omega(\delta)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt}_{2\pi} \\ &\quad + \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)}dt + \int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)}dt\right) \\ &\leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}dt + \int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}dt\right) \\ &\leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{(n+1)\sin^2(\frac{1}{2}\delta)}\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout δ tel que $0 \leq \delta < \pi$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $\delta = n^{-1/3}$

Et alors $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq \omega(n^{-1/3}) + \dfrac{2\|f\|_\infty}{(n+1)\sin^2(\frac{n^{-1/3}}{2})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

F) Théorème de Parseval

Théorème :

Pour tout couple (f,g) d'éléments de $C_{2\pi}$, la famille $(\overline{c_n(f)}c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt = <f,g>$

C'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}c_k(g) = <f,g>$

En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Remarque (Hors programme) :

Soit E un espace préhilbertien, (F_n) une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces de E de dimension finie. Pour $V\in E$, on considère la suite des projections orthogonales $p_{F_n}(V)$ de V sur F_n.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors : $\|V\|^2 = \|p_{F_n}(V)\|^2 + \|V - p_{F_n}(V)\|^2$

Et on a les équivalences :

(1) $\lim_{n\to+\infty} \|p_{F_n}(V)\|^2 = \|V\|^2$ (égalité de Parseval)

(2) $\lim_{n\to+\infty} \|V - p_{F_n}(V)\|^2 = 0$

(3) $V\in\overline{G}$ où $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$

En effet :

$(2)\Leftrightarrow(1)$ découle de l'égalité de Pythagore.

$(2)\Rightarrow(3)$: si $\|V - p_{F_n}(V)\|\to 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} p_{F_n}(V) = V$

Et $\forall n\in\mathbb{N}, p_{F_n}(V)\in F_n\subset G$. Donc V est limite d'une suite d'éléments de G, donc est adhérent à G.

$(3)\Rightarrow(2)$:

Si $V\in\overline{G}$, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $g\in G$ tel que $\|V-g\|\le\varepsilon$

Donc g est dans l'un des F_n, disons F_N pour $N\in\mathbb{N}$

Alors $\|V - p_{F_N}(V)\| \le \|V-g\| \le \varepsilon$

Or, $\left(\|V - p_{F_n}(V)\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car $F_n\subset F_{n+1}$.

Donc $\forall n\ge N, \|V - p_{F_n}(V)\|\le\varepsilon$, ce qui montre la limite voulue.

On voit de plus que l'égalité de Parseval est vraie pour tout $V\in E$ si et seulement si $\overline{G} = E$.

Théorème :

L'espace T est dense dans $C_{2\pi}$ pour $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$.

Démonstrations :

Pour $f\in C_{2\pi}$, la suite $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f)+...+S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Comme tous les $\sigma_n(f)$ sont dans T, il en résulte que T est dense dans $C_{2\pi}$ pour $\| \|_\infty$. Pour $h \in C_{2\pi}$, on a de plus $\|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$

Donc $\sigma_n(f)$ tend aussi vers f pour $\| \|_2$, et T est aussi dense dans $C_{2\pi}$ pour $\| \|_2$.

Application :

Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f) \in T_n$.

Donc $\|f - S_n(f)\|_2 = d(f, T_n) \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2$

Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

D'où l'égalité de Parseval :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\|f\|_2^2 - \|f - S_n(f)\|_2^2\right) = \|f\|_2^2$$

Cas de deux fonctions :

Soient $f, g \in C_{2\pi}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\overline{c_n(f)} c_n(g)\right| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right)$

Donc la série de terme général $\overline{c_n(f)} c_n(g)$ et celle de terme général $\overline{c_{-n}(f)} c_{-n}(g)$ convergent absolument.

Calcul de la somme :

On a

$$\begin{aligned} < f, S_n(g) > &= < f, \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_k > = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) < f, e_k > \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) \overline{< e_k, f >} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) \overline{c_k(f)} \end{aligned}$$

D'où $\left| < f, g > - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)} c_k(g) \right| = |< f, g - S_n(g) >| \leq \|f\|_2 \|g - S_n(g)\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

III Théorèmes fondamentaux

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique, continue par morceaux.

A) Divergence de la série de Fourier

Théorème :

Il existe des fonctions *continues* telles que $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

L'ensemble de ces fonctions est même une intersection dénombrable d'ouverts, dense dans $C_{2\pi}$ pour $\| \|_\infty$.

Démonstration :

$(C_{2\pi}, \| \|_\infty)$ est une algèbre de Banach (une fonction continue 2π-périodique est bornée). On considère alors les formes linéaires $l_n : f \in C_{2\pi} \mapsto l_n(f) = S_n(f)(0) \in \mathbb{C}$.

En considérant le noyau de Dirichlet (pair), on a la formule :

$$l_n(f) = S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt$$

Alors l_n est continue pour $\| \ \|_\infty$ et $|||l_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|dt$

En effet, la continuité de l_n et la majoration de sa norme triple sont évidents ; pour l'égalité : il faudrait une fonction continue prenant les valeurs ± 1 et ayant le même signe que D_n, ce qui est impossible. Pour obtenir l'égalité, on prend une suite de fonctions continues affines par morceaux $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ayant le même signe que D_n et valant ± 1 sauf sur un voisinage des zéros de D_n (en nombre fini). Ainsi, on aura l'égalité à ε près pour tout $\varepsilon > 0$, et donc l'égalité.

($|||l_n||| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|dt$ s'appelle constante de Lebesgue)

Montrons maintenant que $|||l_n|||$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$:

On a $|||l_n||| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\sin\frac{t}{2}}dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$

Et donc $|||l_n||| \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}dx \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \to +\infty$.

On applique ensuite le théorème de Banach–Steinhaus :

Comme $C_{2\pi}$ est complet pour $\| \ \|_\infty$, si $(l_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ était bornée pour tout $f \in C_{2\pi}$, alors $(|||l_n|||)_{n\in\mathbb{N}}$ serait aussi bornée, ce qui n'est pas le cas.

Il existe donc $f \in C_{2\pi}$ telle que $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, et par là non convergente.

Quant à la densité de l'ensemble de ces fonctions, elle résulte du même théorème de Banach–Steinhaus.

B) Les théorèmes de Dirichlet

Théorème (convergence simple) :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique et C^1 par morceaux.

Alors la série de Fourier $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{in\omega.x} + c_{-n}(f)e^{-in\omega.x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

Si f est continue en x, $g(x) = f(x)$

Sinon, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

Remarque :

Si f est continue, $g = f$.

Plus généralement, si f est à sauts symétriques, c'est-à-dire si en tout point on a $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, alors $S_n(f)$ converge simplement vers f.

Théorème :

Sous les mêmes hypothèses, si de plus f est continue, alors la convergence de la série est normale.

Démonstration :

Par changement de variable affine, on ramène le cas T-périodique à 2π-périodique :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-périodique continue par morceaux.

Alors, en faisant le changement de variable $u=\omega.t$:

$$c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega.t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tfrac{u}{\omega})e^{-in.u}du=c_n(g)$$

où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continue par morceaux 2π-périodique, est définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

Pour $T=2\pi$, le deuxième théorème est déjà vu.

Pour le premier :

On reprend les formules donnant $S_n(f)(x)$:

$$\begin{aligned}S_n(f)(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)du\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)dt\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}S_n(f)(x)-\tfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))D_n(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\sin((n+\tfrac{1}{2})t)dt\end{aligned}$$

Où $\varphi_x(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-)}{\sin\frac{t}{2}}\text{ si } t\neq 0\\ 2(f'(x^+)-f'(x^-))\text{ si } t=0\end{cases}$, continue par morceaux.

Ainsi, d'après le lemme de Riemann–Lebesgue, $\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Et donc $S_n(f)(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$

Autre démonstration :

- En $x=0$:

Si f est C^1 par morceaux, alors $\lim_{n\to+\infty}S_n(f)(0)=\frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-))$.

En effet, si f est continue, on a déjà vu

Pour f_0 2π-périodique telle que $f_0(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ si $x\in\left]0,2\pi\right[$ et $f_0(x)=0$ si $x=0$

on a vu que la série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ et qu'elle converge simplement vers f_0 sur $\mathbb{R}$.

On a ensuite le résultat pour toute fonction C^1 par morceaux par linéarité.

- Puis on fait un décalage pour $x\in\mathbb{R}$.

C) Formules de Parseval

Théorème :
Soit $T>0$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues par morceaux et *T*-périodiques.
Alors la famille $(\overline{c_n(f)}c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c_n(f)}c_n(g)=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\bar{f}(t)g(t)dt$$

En particulier, pour $f=g$, les familles suivantes sont sommables et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=|a_0(f)|^2+\tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(t)|^2dt$$

Démonstration :
On se ramène ici encore à $T=2\pi$ de la même façon.
Le résultat a été vu pour *f* et *g* continus.
On considère l'ensemble $\mathbb{D}$ des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques à sauts symétriques.

On munit alors $\mathbb{D}$ de $<f,g>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}g$.

Alors $<\ ,\ >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{D}$.

Et $C_{2\pi}$ est dense dans $\mathbb{D}$ pour la norme $\|\ \|_2$ associée à ce produit scalaire.

En effet :
Pour le caractère défini positif : (les autres sont clairs)
Soit $f\in\mathbb{D}$, supposons que $<f,f>=0$

Alors $\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=0$

Donc $|f(t)|^2$ est nulle en tout point de continuité.

Soient $0=a_0<a_1<...<a_p=2\pi$ les discontinuités éventuelles de *f*.

Alors *f* est nulle sur $]a_i,a_{i+1}[$ pour tout $i\leq p-1$ et sur $]a_p,a_1+2\pi[$.

Donc pour tout $i\geq 1$, $f(a_i^+)=f(a_i^-)=0$, c'est-à-dire $f(a_i)=0$.

Donc *f* est nulle
(Remarque : si on avait supposé *f* seulement continue par morceaux, le résultat est faux)

Soit maintenant $f\in\mathbb{D}$ avec une seule discontinuité $a\in]0;2\pi[$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand, on note φ_n coïncidant avec *f* sur $[0,2\pi]\setminus]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}[$ et affine sur $[a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}]$.

On a ainsi $\|\varphi_n-f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}|\varphi_n(t)-f(t)|^2dt$

Or, f est bornée (car continue par morceaux) sur $[0,2\pi]$ et $\forall t\in[0,2\pi],|\varphi_n(t)|\leq\|f\|_\infty$.

Donc $\|\varphi_n-f\|_2^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}4\|f\|_\infty^2dt=\frac{2\|f\|_\infty^2}{n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

D'où la densité de $C_{2\pi}$ dans $\mathbb{D}$. (on fait ensuite par linéarité pour *f* ayant plusieurs points de discontinuité)

Montrons maintenant la formule de Parseval sur $\mathbb{D}$.

Posons $A(f,g) = <f,g>$ et $B(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$ pour $f,g \in \mathbb{D}$.

Déjà, A est sesquilinéaire continue sur $\mathbb{D}^2$.

Pour B :

Déjà, B est défini car d'après l'inégalité de Bessel (dont on a vu qu'elle est valable pour des fonctions continues par morceaux), $\left(|c_n(f)|^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left(|c_n(g)|^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables, et on a pour tout $n\in\mathbb{Z}$ $\left|\overline{c_n(f)}c_n(g)\right| \leq \frac{1}{2}(|c_n(g)|^2 + |c_n(f)|^2)$

Donc $\left(\overline{c_n(f)}c_n(g)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et B est bien définie.

De plus B est sesquilinéaire, continue pour $\| \ \|_2$:

On a en effet, d'après une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k(f)} c_k(g)\right| \leq \left(\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=-N}^{N} |c_k(g)|^2\right)^{1/2}$$

Puis avec l'inégalité de Bessel $\left|\sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k(f)} c_k(g)\right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

Donc par passage à la limite $|B(f,g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

D'où la continuité de B. Ainsi, A et B sont continues sur $\mathbb{D}^2$, égales sur $C^2_{2\pi}$ dense dans $\mathbb{D}^2$, donc égales partout.

Cas des fonctions continues par morceaux à sauts quelconques :

Lemme :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux 2π-périodique ; alors il existe $\tilde{f} \in \mathbb{D}$ tel que $f = \tilde{f}$ sur $[0,2\pi]$ sauf en un nombre fini de points.

En effet :

Il suffit de prendre $\tilde{f}(x) = f(x)$ si f est continue en x

Et $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ sinon.

Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux 2π-périodiques, on a :

$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(\tilde{f})$ et $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$

Donc comme la formule de Parseval est vraie pour $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, elle l'est pour f et g.

IV Exercices et compléments

A) Fonctions à variation bornée

- Généralités :

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite à variation bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b, \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq M$$

On pose alors $V_f([a,b]) = \sup_{a=a_0<\ldots<a_p=b} \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$, variation totale de f sur $[a,b]$.

Propriétés :

(1) L'ensemble des fonctions $[a,b] \to \mathbb{C}$ à variation bornée est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}([a,b],\mathbb{C})$

(2) Soit $f:[a,c] \to \mathbb{C}$ et $b \in [a,c]$.

Si f est à variation bornée sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elle est à variation bornée sur $[a,c]$ et $V_f([a,c]) = V_f([a,b]) + V_f([b,c])$

(3) Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors elle est à variation bornée.

(4) Une fonction lipschitzienne ou monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée sur $[a,b]$.

Démonstration :

Déjà, c'est un espace vectoriel…

Supposons f à variation bornée sur $[a,b]$ et $[b,c]$.

Si $a=b$ ou $b=c$, le résultat est clair. Sinon :

Soient $a = a_0 < a_1 < ... < a_p = c$ des réels.

On note k tel que $a_k \leq b$ et $a_{k+1} > b$.

Alors $\sum_{i=0}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(b) - f(a_k)| \leq V_f([a,b])$ (vrai encore si $b = a_k$)

Et $\sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_{k+1}) - f(b)| \leq V_f([b,c])$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| &= \sum_{i=1}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\
&\quad + |f(a_{k+1}) - f(b)| + |f(b) - f(a_k)| \\
&\leq V_f([a,b]) + V_f([b,c])
\end{aligned}$$

Donc f est à variation bornée sur $[a,c]$ et déjà $V_f([a,c]) \leq V_f([a,b]) + V_f([b,c])$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $V_f([a,b]) + V_f([b,c]) \leq V_f([a,c]) + \varepsilon$.

En effet, il existe alors $a = a_0 < ... < a_k = b$ réels tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \geq V_f([a,b]) - \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Et $b = a_k < ... < a_p = c$ tels que $\sum_{i=k}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \geq V_f([b,c]) - \tfrac{\varepsilon}{2}$

Et donc $V_f([a,b]) + V_f([b,c]) \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \varepsilon + V_f([a,c])$

Donc comme c'est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $V_f([a,b]) + V_f([b,c]) \leq V_f([a,c])$

D'où l'égalité.

Pour (3) : pour tous $a = a_0 < ... < a_p = b$, on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Pour (4) :

Soit f lipschitzienne :

Il existe alors $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in [a,b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Soient $a = a_0 < ... < a_p = b$ des réels.

Alors $\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq k \sum_{i=0}^{p-1} |a_{i+1} - a_i|$

Mais comme l'application $x \mapsto x$ est à variation bornée sur $[a,b]$ (elle y est de classe C^1), il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous réels $a = a_0 < ... < a_p = b$, on ait $\sum_{i=0}^{p-1} |a_{i+1} - a_i| \leq M$.

Et on a alors $\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq M'$ où $M' = kM$

Donc f est à variation bornée.

Si maintenant f est monotone, disons par exemple croissante :

Soient $a = a_0 < ... < a_p = b$ des réels.

Alors $\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) = f(b) - f(a)$

Donc $\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq f(b) - f(a)$.

Donc f est à variation bornée ($f(b) - f(a) \geq 0$)

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors f est à variation bornée si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes.

En particulier, l'ensemble des fonctions $[a,b] \to \mathbb{C}$ à variation bornée est le sous-espace engendré par les fonctions à valeurs réelles et croissantes.

Démonstration :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, f est à variation bornée sur $[a,x]$, et on peut noter $F(x) = V_f([a,x])$

Alors F est croissante car pour x, y tels que $x > y$, on a :

$F(x) = F(y) + V_f([x,y]) \geq F(y)$

Montrons alors que $B : x \mapsto F(x) - f(x)$ est aussi croissante :

Pour tous $x > y$ et toute subdivision $a = y_0 < ... < y_p = y$ de $[a,y]$,

$a = y_0 < ... < y_p = y < y_{p+1} = x$ est une subdivision de $[a,x]$, donc

$\sum_{k=0}^{p-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)| + |f(x) - f(y)| \leq F(x)$

Et en passant à la borne supérieure sur les subdivisions de $[a,y]$, on obtient $F(y) + |f(x) - f(y)| \leq F(x)$, soit

$B(x) - B(y) = (F(x) - f(x)) - (F(y) - f(y)) \geq |f(x) - f(y)| - (f(x) - f(y)) \geq 0$

Donc $f = F - B$ avec F et B croissantes.

La réciproque est vraie d'après les propriétés (1) et (4) précédentes.

Pour les fonctions complexes, si f est à variation bornée, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi, donc sont combinaisons linéaires de fonctions croissantes et donc f aussi.

- Cas des fonctions 2π-périodiques :

Propriété :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux 2π-périodique et à variation bornée sur $[0,2\pi]$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, on a $|c_n(f)|\leq\dfrac{K}{2n}$ où $K=V_f([0,2\pi])$

Remarque :
Une fonction à variation bornée est réglée car elle est combinaison linéaire de fonctions croissantes, qui sont réglées (c'est-à-dire qui admettent une limite finie à droite et à gauche en tout point). Avec une théorie de l'intégration plus complète, on pourrait donc se passer de la continuité par morceaux.

Démonstration :
Pour $|n|\geq 1$ et $k=0,\dots 2n-1$, on a :

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in.t}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-k\frac{\pi}{n}}^{2\pi-k\frac{\pi}{n}}e^{-in.u-ik.\pi}f(u+k\tfrac{\pi}{n})du$$
$$=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in.t}f(t+k\tfrac{\pi}{n})dt$$

Donc $4\pi.nc_n(f)=2\pi\underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1}c_n(f)}_{2n.c_n(f)}=\int_0^{2\pi}e^{-in.t}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k f(t+k\tfrac{\pi}{n})\right)dt$

D'où

$$4\pi.|nc_n(f)|\leq\int_0^{2\pi}\left|f(t)-f(t+\tfrac{\pi}{n})+f(t+2\tfrac{\pi}{n})-\ldots-f(t+(2n-1)\tfrac{\pi}{n})\right|dt$$
$$\leq\int_0^{2\pi}V_f([t,t+2\pi])dt$$

Mais comme $V_f([t,t+2\pi])=V_f([0,2\pi])$ (par périodicité), on a
$4\pi.|nc_n(f)|\leq 2\pi V_f([0,2\pi])$

- Un exemple :

La fonction $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos(n^3x)$ est continue mais pas à variation bornée ; ce n'est pas une différence de fonctions croissantes.

f est bien définie, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, car la série trigonométrique la définissant est normalement convergente. De plus, comme il y a convergence normale, ses coefficients de Fourier se calculent en intégrant terme à terme les séries de termes généraux $\left(\dfrac{1}{n^2}\cos(n^3x)\cos(px)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\cos(n^3x)\sin(px)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $p\in\mathbb{N}$.

On a ainsi $\forall k\geq 1, b_k(f)=0$ et $a_k(f)=\begin{cases}0 \text{ si } k \text{ n'est pas un cube non nul}\\ \frac{1}{p^2}\text{ si } k=p^3\end{cases}$

$(ka_k(f))_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas bornée, et f n'est pas à variation bornée.

B) Théorème de Dini–Lipschitz

Définition :

Une fonction $f:I\to\mathbb{C}$ est dite hölderienne lorsqu'il existe $K>0$ et $\alpha>0$ tels que $\forall x,y\in I, |f(x)-f(y)|\leq K|x-y|^{\alpha}$.

Théorème :

Si f est 2π-périodique et hölderienne, la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Plus généralement, la conclusion subsiste si on remplace le caractère hölderien par le fait que le module de continuité uniforme ω de f est tel que $t\mapsto\dfrac{\omega(t)}{t}$ soit intégrable sur $]0;1]$

On sait qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en au moins un point.

Lemme de Riemann–Lebesgue « uniforme » :

Soit $K:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ continue. Alors $L(x,\lambda)=\int_c^d K(x,t)e^{i\lambda t}dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $\pm\infty$, et ce uniformément en $x\in[a,b]$.

En effet :

On a déjà la convergence simple vers 0 sur $[a,b]$ d'après le lemme de Riemann–Lebesgue classique.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,t)\|=\max(|x|,|t|)$ et on note W le module de continuité uniforme de K sur $[a,b]\times[c,d]$. Ainsi, W est croissant, continu en 0 (car K est continue sur un compact, donc uniformément continue) et $W(0)=0$.

Soit $\varepsilon>0$.

On note $\delta>0$ tel que $W(\delta)<\dfrac{\varepsilon}{2(d-c)}$. On divise alors $[a,b]$ en sous–intervalles $[a_i,a_{i+1}]$ avec $a=a_0<\dots<a_p=b$ de sorte que $\forall i\leq p-1, a_{i+1}-a_i<d$

Comme on a convergence simple, il existe $\Lambda>0$ tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$|\lambda|>\Lambda\Rightarrow\forall i\in[\![0,p]\!], |L(a_i,\lambda)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour tout $x\in[a,b]$, il existe i tel que $x\in[a_i,a_{i+1}]$ et donc pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $|\lambda|>\Lambda$, on a :

$$\begin{aligned}|L(x,\lambda)|&\leq|L(a_i,\lambda)|+|L(x,\lambda)-L(a_i,\lambda)|\leq\varepsilon+\int_c^d|K(x,t)-K(a_i,t)|dt\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+(d-c)W(\delta)\leq\varepsilon\end{aligned}$$

Pour le théorème maintenant :

Il suffit de montrer la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f sur $[0,2\pi]$.

On a déjà vu que $S_n(f)(x)-f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{\omega(t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$, on peut choisir δ tel que $0 < \delta < \pi$ et $\int_0^\delta \dfrac{\omega(t)}{t} dt < \frac{\varepsilon}{3}$.

On découpe l'intégrale précédente en trois morceaux : $[-\pi,-\delta]$, $[-\delta,\delta]$ et $[\delta,\pi]$.

Pour tout $x \in [0,2\pi]$, on a alors (en utilisant le fait que $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ sur $[0,\pi]$) :

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt\right| \leq \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\omega(|t|)}{\sin\frac{t}{2}}\left|\sin((n+\tfrac{1}{2})t)\right|dt$$

$$\leq 2\pi\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt \leq 2\pi\frac{\varepsilon}{3}$$

Enfin, selon le lemme, pour ce $\delta > 0$ fixé, $x \mapsto \int_\delta^\pi (f(x-t)-f(x))\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt$ tend uniformément vers 0 lorsque $n \to +\infty$ et il en est de même pour $x \mapsto \int_{-\pi}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left|\int_\delta^\pi (f(x-t)-f(x))\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt\right| \leq 2\pi\frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \left|\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x-t)-f(x))\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}dt\right| \leq 2\pi\frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0,2\pi]$, on a $|S_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

D'où la convergence.

C) Théorème de Bernstein

Théorème :

Si f est 2π-périodique et hölderienne d'exposant $b > \frac{1}{2}$ (par exemple lipschitzienne), alors la série de Fourier converge normalement vers *f*.

Remarque :

Avec la suite de Rudin–Shapiro, on verra que le théorème de Bernstein est optimal, c'est-à-dire qu'il existe *f* hölderienne d'exposant supérieur à ½ dont la série de Fourier n'est pas normalement convergente. Il faut enfin comparer ces propriétés au théorème de Dini–Lipschitz selon lequel la série de Fourier d'une fonction hölderienne converge uniformément vers la fonction (et pour tout exposant de Hölder)

Démonstration du théorème :

Soit *f* 2π-périodique hölderienne de coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $h \in \mathbb{R}$. Un changement de variables montre que les coefficients de Fourier de $g_h : x \mapsto f(x+h)$ vérifient $c_n(g_h) = e^{inh}c_n(f)$, et ceux de $k_h = g_h - g_{-h}$ vérifient alors $c_n(k_h) = 2i\sin(nh)c_n(f)$

Ainsi, d'après la formule de Parseval,

$$\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x-h)|^2 dx = 8\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sin^2(nh)|c_n(f)|^2$$

On note *a*, *b* tels que $\forall x,y \in \mathbb{R}^2, |f(x)-f(y)| \leq a|x-y|^b$ $(b > \frac{1}{2})$

Soit alors $N \geq 1$; on applique la relation précédente avec $h = \dfrac{\pi}{4N}$.

Comme pour $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, on a $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, pour $N < |n| \leq 2N$, on peut minorer $|\sin(nh)|$ par $\frac{2}{\pi}|nh| \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$2\pi.a^2(2h)^{2b} \geq \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x-h)|^2 dx \geq 8\pi \sum_{N<|n|\leq 2N} \sin^2(nh)|c_n(f)|^2$$
$$\geq 2\pi \sum_{N<|n|\leq 2N} |c_n(f)|^2$$

C'est-à-dire $\forall N \geq 1, \sum_{k=N}^{2N} |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 \leq cN^{-2b}$ où $c = \frac{a^2}{4^b}\pi^{2b}$

Montrons maintenant que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire que la série de terme général $t_p = \sum_{2^p<|n|\leq 2^{p+1}} |c_n|$ converge (en faisant un groupement de termes).

t_p contient 2^{p+1} termes, donc l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'inégalité donnent :

$$t_p = \sum_{2^p<|n|\leq 2^{p+1}} |c_n|.1 \leq (\sum_{2^p<|n|\leq 2^{p+1}} |c_n|^2)^{1/2} 2^{\frac{p+1}{2}} \leq c.(2^p)^{-b} 2^{\frac{p+1}{2}} = c' r^p$$

Avec $r = 2^{1/2-b}$. Comme $b > \frac{1}{2}$, la série géométrique de raison *r* converge, donc la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire que la série de Fourier de *f* converge normalement.

Reste à montrer que la somme de cette série est bien *f* :

Soit *g* la fonction somme de la série de Fourier de *f*. Comme il y a convergence normale, *g* est continue et pour calculer ses coefficients, on peut intégrer terme à terme. Ainsi, *f* et *g* sont continues et on remarque qu'elles ont les mêmes coefficients de Fourier. Donc elles sont égales.

1) Polynômes de Rudin–Shapiro

On considère les polynômes définis par :

$P_0 = Q_0 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$P_{n+1} = P_n + X^{2^n} Q_n$, $Q_{n+1} = P_n - X^{2^n} Q_n$

Propriétés :

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et Q_n sont des polynômes de degré 2^n et de valuation 1 (rappel : la valuation est le coefficient minimal non nul, ou aussi la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme).

(2) Il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de réels ± 1 telle que :

$$\forall n \geq 1, P_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_k X^k, Q_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_{k+2^n} X^k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k X^k - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} c_k X^k$$

(3) Pour tout *z* de module 1, on a $|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}$

Démonstration :

(1)…

(2) : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n et Q_n sont de la forme $P_n=\sum_{k=1}^{2^n}c_{k,n}X^k$, $Q_n=\sum_{k=1}^{2^n}d_{k,n}X^k$, avec $c_{k,n}=\pm 1$, $d_{k,n}=\pm 1$. On a de plus, pour $1\leq k\leq 2^n$, $c_{k,n+1}=d_{k,n+1}=c_{k,n}$ et pour $2^n+1\leq k\leq 2^{n+1}$, $c_{k,n+1}=-d_{k,n+1}=d_{k-2^n,n}$.

Comme P_n est le tronqué en degré 2^n de P_{n+1} (c'est-à-dire que les 2^n premiers coefficients de P_n sont les mêmes que ceux de P_{n+1}), en posant $c_k=c_{k,n}$ où n est un entier quelconque tel que $2^n\geq k$, on définit une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle $\forall n\in\mathbb{N}^*, P_n=\sum_{k=1}^{2^n}c_kX^k$. L'égalité $Q_n=X^{-2^n}(P_{n+1}-P_n)$ donne ensuite la première expression de Q_n, et la seconde découle de la comparaison entre $P_n=P_{n-1}+X^{2^{n-1}}Q_{n-1}$ et $Q_n=P_{n-1}-X^{2^{n-1}}Q_{n-1}$

(3) : on a même pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$|P_{n+1}(z)|^2+|Q_{n+1}(z)|^2=2|P_n(z)|^2+2|z|^{2^n}|Q_n(z)|^2$$

En effet, pour tous $a,b\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}|a+b|^2+|a-b|^2&=(a+b)\overline{(a+b)}+(a-b)\overline{(a-b)}\\&=a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b}+a\overline{a}-b\overline{a}-a\overline{b}+b\overline{b}\\&=2|a|^2+2|b|^2\end{aligned}$$

Et on utilise ensuite la définition de P_{n+1} et Q_{n+1}.

Ensuite, on fait par récurrence pour l'égalité avec $|z|=1$.

2) Suite de Rudin–Shapiro

Définition :

La suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle suite de Rudin–Shapiro (elle a été introduite indépendamment par les deux personnes dans les années 50)

Calcul des c_k :

Propriété (Brillhart et Carlitz) :

On a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $c_k=(-1)^{N(k)}$ où $N(k)$ est le nombre de 11 dans l'écriture en base 2 de $k-1$.

Démonstration :

Par récurrence : déjà, la propriété est vraie pour $k\leq 4$. Supposons la vraie pour $k\leq 2^{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$. Avec les relations

$$P_{n+2}=P_{n+1}+X^{2^{n+1}}Q_{n+1}=P_{n+1}+X^{2^{n+1}}(P_n-X^{2^n}Q_n)=P_{n+1}+X^{2^{n+1}}(-P_{n+1}+2P_n),$$

on obtient $c_{2^{n+1}+j}=\begin{cases}c_j & \text{si } 1\leq j\leq 2^n\\ -c_j & \text{si } 2^n+1\leq j\leq 2^{n+1}\end{cases}$

De plus, si $1 \leq j \leq 2^n$, l'écriture binaire de $2^{n+1}+j-1$ s'obtient en ajoutant 10 à gauche de celle de $j-1$, donc le nombre de 11 ne change pas ; et si $2^n+1 \leq j \leq 2^{n+1}$, l'écriture binaire de $2^{n+1}+j-1$ s'obtient en ajoutant 1 à gauche de celle de $j-1$; or, dans ce cas, l'écriture binaire de $j-1$ commence déjà par un 1, donc le nombre de 11 augmente de 1. La relation est donc vraie pour $k \leq 2^{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

3) Des polynômes trigonométriques

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $p \geq 1$, on note n l'unique entier tel que $2^{n-1} < p \leq 2^n$, et on pose alors $F_p(t) = \sum_{k=1}^{p} c_k e^{ikt}$ et $G_p(t) = \sum_{k=1}^{p} c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k e^{ikt} - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{p} c_k e^{ikt}$

Ainsi, $F_{2^n}(t) = P_n(e^{it})$ et $G_{2^n}(t) = Q_n(e^{it})$.

Propriété :

Pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|F_p(x)\right| \leq A\sqrt{p}$ et $\left|G_p(x)\right| \leq A\sqrt{p}$ où $A = 2+\sqrt{2}$.

En effet :

Lorsque p est une puissance de 2, l'inégalité découle de la propriété (3) vue en 1). (car $\sqrt{2} \leq A$ et $F_{2^n}(t) = P_n(e^{it})$, $G_{2^n}(t) = Q_n(e^{it})$)

Supposons les inégalités vraies jusqu'à l'indice $p-1 \geq 2$. Alors, en considérant n tel que $2^n+1 \leq p \leq 2^{n+1}-1$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F_p(t) = P_n(e^{it}) + \sum_{k=2^n+1}^{p} c_k e^{ikt} = P_n(e^{it}) + e^{i2^n t} \sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt}$$

Si $p-2^n \leq 2^{n-1}$, alors $\sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{p-2^n} c_k e^{ikt} = F_{p-2^n}(t)$ (d'après la propriété (2) du 1))

Et si $p-2^n > 2^{n-1}$, on a $p-2^n < 2^{n+1}-2^n = 2^n$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k e^{ikt} - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{p-2^n} c_k e^{ikt} = G_{p-2^n}(t)$$

D'où $F_p(t) = F_{2^n}(it) + e^{i2^n t} F_{p-2^n}(t)$ ou $F_p(t) = F_{2^n}(it) + e^{i2^n t} G_{p-2^n}(t)$

Et dans les deux cas par hypothèse de récurrence :

$$\left|F_p(t)\right| \leq \sqrt{2^{n+1}} + A\sqrt{p-2^n}.$$

Mais comme $2^n \leq p$ et $p-2^n \leq \frac{p}{2}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|F_p(t)\right| (\sqrt{2} + \frac{A}{\sqrt{2}})\sqrt{p} = A\sqrt{p}.$$

Le cas de G_p est analogue.

4) Des séries trigonométriques

Théorème :

Pour tout $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right]$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{k^\alpha} e^{ikx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement. Sa somme h_α est continue, 2π-périodique et vérifie $(h_\alpha * h_\alpha)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^{2\alpha}}$

Remarque :

On peut remplacer $f(k) = k^{-\alpha}$ par toute fonction f décroissant vers 0 telle que la série de terme général $\sqrt{k}(f(k) - f(k+1))$ converge. On ne peut pas améliorer ce résultat car, d'après la formule de Parseval, la série de terme général $f(k)^{-2}$ doit converger.

Démonstration :

Par une transformation d'Abel, on a pour $n > m$, la majoration uniforme :

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{c_k e^{ikt}}{k^\alpha}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \frac{F_k(t) - F_{k-1}(t)}{k^\alpha}\right| = \left|-\frac{F_{m-1}(t)}{m^\alpha} + \frac{F_n(t)}{n^\alpha} + \sum_{k=m}^{n-1} F_k(t)\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right|$$

$$\leq A\left(m^{1/2-\alpha} + n^{1/2-\alpha} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha \sqrt{k}}\right) \leq A\left(2m^{1/2-\alpha} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1/2}}\right)$$

(la série de terme général $\frac{1}{k^{\alpha+1/2}}$ converge car $\alpha + \frac{1}{2} > 1$)

On voit donc que la série vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Elle est donc uniformément convergente. Ainsi, la somme h_α de la série est continue, 2π-périodique, et ses coefficients de Fourier s'obtiennent en intégrant terme à terme la série trigonométrique :

$$c_n(h_\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq 0 \\ \pm \frac{1}{n^\alpha} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

L'expression des coefficients de Fourier d'une convolée donne $c_n(h_\alpha * h_\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq 0 \\ \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$, et comme la série de Fourier de $h_\alpha * h_\alpha$ est uniformément convergente (car normalement, puisque $2\alpha > 1$), sa somme g_α est une fonction continue dont les coefficients s'obtiennent terme à terme, c'est-à-dire que ce sont ceux de $h_\alpha * h_\alpha$. La formule de Parseval appliquée à $h_\alpha * h_\alpha - g_\alpha$ montre alors que $h_\alpha * h_\alpha = g_\alpha$, c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R}, (h_\alpha * h_\alpha)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in.t}}{n^{2\alpha}}$

5) Une série entière uniformément convergente pas normalement convergente sur $D_f(0,1)$

- Principe du maximum pour les polynômes :

Propriété :

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\sup\limits_{|z|\leq 1}|P(z)| = \sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$

Preuve :

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Comme P est continu sur le compact $D_f(0,1)$, il existe $z_0 \in D_f(0,1)$ tel que $\sup\limits_{|z|\leq 1}|P(z)| = |P(z_0)|$. Supposons $|z_0| < 1$

On considère alors $r > 0$ tel que $|z_0| + r < 1$. La formule de Taylor polynomial en z_0 donne :

$$P(z_0 + re^{it}) = \sum_{k=0}^{d} P^{(k)}(z_0)\frac{r^k e^{ikt}}{k!}$$

Et donc $\int_0^{2\pi} P(z_0 + re^{it})dt = 2\pi P(z_0)$. Ainsi, par choix de z_0,

$$|P(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(z_0 + re^{it})|dt \leq |P(z_0)|$$

Soit, comme P est continu, $\forall t \in \mathbb{R}, |P(z_0 + re^{it})| = |P(z_0)|$.

La formule de Parseval donne alors :

$$|P(z_0)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{d}|P^{(k)}(z_0)|^2 \frac{r^{2k}}{(k!)^2}$$

Donc P est le polynôme constant $P = P(z_0)$ et on a $\sup\limits_{|z|\leq 1}|P(z)| = \sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$

Remarque :

(1) On a même prouvé ici que si le maximum est atteint dans le disque ouvert, alors P est constant.

(2) La preuve s'applique à toute fonction analytique sur un ouvert contenant $D_f(0,1)$, et en particulier à toute fonction somme d'une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1.

- Une série entière :

Propriété :

Pour $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$, la série entière $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}$ est uniformément convergente sur $D_f(0,1)$ mais pas normalement convergente.

Démonstration :

Le principe du maximum (pour les polynômes) montre que pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et $n > m$, on a :

$$\sup_{z\in D_f(0,1)}\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}\right| = \sup_{|z|=1}\left|\sum_{k=m+1}^{n} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}\right| = \|F_n - F_m\|_\infty$$

Comme la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}$ est uniformément de Cauchy, donc uniformément convergente sur $D_f(0,1)$. Pour $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$, elle n'est pas normalement convergente.

D) Comment « développer une fonction en série de Fourier » ?

Développer une fonction *f* en série de Fourier signifie :

- Déterminer les coefficients de Fourier de *f*.
- Appliquer le théorème de Dirichlet

On a deux méthodes :

(1) La méthode directe, calcul des coefficients, vérification du fait que *f* est de classe C^1 par morceaux.

(2) Méthode indirecte : (on suppose que $T = 2\pi$)

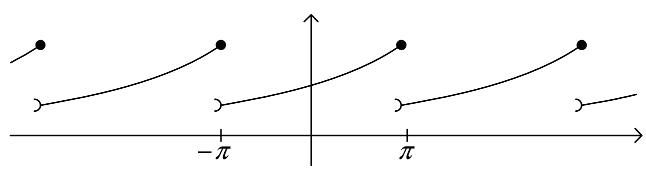
On développe f en « série trigonométrique », c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_0 = \alpha_0$ et $\forall n \geq 1, u_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \\ \text{ou } \gamma_n e^{inx} + \gamma_{-n} e^{-inx} \end{cases}$ et on montre que les coefficients vérifient :

$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \gamma_n$, c'est-à-dire que $\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{-in.t} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) dt$, égalité qu'on obtient généralement en constatant que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) e^{-in.t}$ est uniformément convergente sur $[a, a+2\pi]$.

Exemples :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, *f* définie par $\forall x \in \left]-\pi, \pi\right], f(x) = e^{\alpha.x}$, 2π-périodique.

Graphe pour $a = \frac{1}{2}$:



f est de classe C^1 par morceaux, 2π-périodique

Coefficients de Fourier : on a $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)t} dt$

(1) Si $\alpha \in i\mathbb{Z}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{in_0 x}$ donc $f \in T$. Donc $S(f) = f$

(2) Si $\alpha \notin i\mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(\alpha-in)t}}{\alpha - in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(\alpha-in)\pi} - e^{-(\alpha-in)\pi}}{2\pi(\alpha-in)} = (-1)^n \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi(\alpha - in)}$$

$$= (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha - in)}$$

Donc la série est simplement convergente, mais pas normalement.
Le théorème de Dirichlet donne :

Pour $x\in \left]-\pi,\pi\right[$, $\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^n e^{inx}}{\alpha-in}+\dfrac{(-1)^{-n}e^{-inx}}{\alpha+in}\right)\right)=e^{\alpha x}$

Et en $x=\pi$: $\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha-in}+\dfrac{1}{\alpha+in}\right)\right)=\dfrac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2}$

C'est-à-dire $\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right)=\operatorname{ch}(\alpha\pi)$ pour $\alpha\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$

Conséquence : $\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z},\dfrac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}=\pi\coth(\alpha\pi)$

Exemple 2 :
Soit $a\in\left]-1,1\right[$. Développer $f:x\mapsto\ln(1-a\cos x)$ en série de Fourier.
Etude :
F est de classe C^∞, 2π-périodique. Le théorème de Dirichlet s'applique donc :

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(f)\cos nx$ (*f* est paire) et on a même convergence normale.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{a\sin x}{1-a\cos x}$

On suppose $a>0$. On pose alors $a=\dfrac{1}{\operatorname{ch}\varphi}$ avec $\varphi>0$.

On a alors $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{\sin x}{\operatorname{ch}\varphi-\cos x}=-i\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\operatorname{ch}\varphi-e^{ix}-e^{-ix}}$

Soit en posant $z=e^{ix}$:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=i\frac{z^2-1}{z^2-2z\operatorname{ch}\varphi+1}=i\frac{z^2-1}{(z-e^{\varphi})(z-e^{-\varphi})}\\
&=i+i\frac{e^{2\varphi}-1}{(e^{\varphi}-e^{-\varphi})(z-e^{\varphi})}+i\frac{e^{-2\varphi}-1}{(z-e^{-\varphi})(e^{-\varphi}-e^{\varphi})}\\
&=i-i\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n e^{-n\varphi}\right)+i\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n\varphi}}{z^n}\right)
\end{aligned}$$

(car $\left|ze^{-\varphi}\right|=\left|\dfrac{e^{-\varphi}}{z}\right|=e^{-\varphi}<1$)

$$f'(x)=i\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-inx}e^{-n\varphi}-e^{inx}e^{-n\varphi}\right)=2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n\varphi}\sin nx$$

Donc $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\ln(1-a)+i\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{e^{-n\varphi}\sin nt}_{u_n(t)}dt$

Or, la série de terme général u_n est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. ($\|u_n\|_\infty=e^{-n\varphi}$)
Et les u_n sont continus.

Donc

$$f(x)=\ln(1-a)+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n\varphi}\frac{1-\cos nx}{n}=\ln(1-a)+2\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n\varphi}}{n}}_{-\ln(1-e^{-\varphi})}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n\varphi}}{n}\cos nx$$

$$=\underbrace{\ln\left(\frac{1-a}{(1-e^{-\varphi})^2}\right)}_{\alpha_0}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{e^{-n\varphi}}{n}}_{-\frac{\alpha_n}{2}}\cos nx$$

Attention :

On a un développement de f en série trigonométrique, mais on n'est pas sûr que c'est sa série de Fourier. Il faut maintenant montrer que $\alpha_0=a_0(f)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n(f)=-\frac{2e^{-n\varphi}}{n}=\alpha_n$

Pour $p\geq 1$, on a $a_p(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(pt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\cos nt\cos ptdt$

On pose $v_n(t)=\alpha_n\cos nt\cos pt$. Alors $\|v_n\|_\infty=|\alpha_n|=\frac{2e^{-n\varphi}}{n}$, terme général d'une série convergente.

On peut donc intégrer terme à terme, et :

$$a_p(f)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nt\cos ptdt}_{=\frac{\pi}{2}\delta_{p,n}}=\alpha_n$$

E) Injectivité de $f\mapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ pour les fonctions continues

Théorème :

L'application qui à $f\in C_{2\pi}$ associe $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est linéaire injective.

Corollaire :

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques continues telles que $\forall n\in\mathbb{Z}, c_n(f)=c_n(g)$

Alors $f=g$.

Remarque :

L'application est aussi injective sur $\mathbb{D}$.

Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-périodiques continues par morceaux sont tels que $\forall n\in\mathbb{Z}, c_n(f)=c_n(g)$, alors f et g sont égales sauf sur une partie finie de $[0,2\pi]$.

(Et ce même si les séries *divergent*)

Démonstration :

On applique l'égalité de Parseval à $f-g$:

$\|h\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(h)|^2$. Donc si $\forall n\in\mathbb{Z}, c_n(h)=0$, alors $\|h\|_2=0$. Si de plus h est continue ou continue par morceaux à sauts symétriques, alors h est nulle.

F) Taille des coefficients et régularité

Rappel :

Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$ est de classe C^1 et 2π-périodique, alors $\forall n\in\mathbb{Z}, c_n(f')=inc_n(f)$

Proposition :

Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe C^k, alors $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Démonstration :

Pour $n\neq 0$, on a $c_n(f)=\left(\frac{1}{in}\right)^k c_n(f^{(k)})$

Le lemme de Riemann–Lebesgue pour $f^{(k)}$ montre que :

$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left|n^k c_n(f)\right| = \lim\limits_{n\to\pm\infty}\left|c_n(f^{(k)})\right|=0$

D'où le résultat.

Proposition :

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$, 2π-périodique continue. Soit $k\in\mathbb{N}$

Si la série de terme général $n^k\left(\left|c_n(f)\right|+\left|c_{-n}(f)\right|\right)$ converge, alors *f* est de classe C^k.

En particulier, si $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$, alors *f* est de classe C^k

Remarque :

On obtient l'équivalence, pour $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$, 2π-périodique continue :

f est de classe $C^\infty \Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\pm\infty} n^p c_n(f)=0$

Démonstration de la proposition :

Posons $g(x)=c_0(f)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}+c_{-n}(f)e^{-inx}$. Alors :

(1) *g* est définie et de classe C^k sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.

En effet, posons pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} u_0(x)=c_0(f) \\ u_n(x)=c_n(f)e^{inx}+c_{-n}(f)e^{-inx} \end{cases}$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est de classe C^k et

$\forall j\in[\![0,k]\!], \forall x\in\mathbb{R}, u_n^{(j)}(x)(in)^j(c_n(f)e^{inx}+(-1)^j c_{-n}(f)e^{-inx})$

Pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, la série de terme général $u_n^{(j)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente, car

$\forall n\in\mathbb{N}, \left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty \leq n^j\left(\left|c_n(f)\right|+\left|c_{-n}(f)\right|\right)\leq n^k\left(\left|c_n(f)\right|+\left|c_{-n}(f)\right|\right)$, terme général d'une série convergente par hypothèse.

Donc *g* est de classe C^k, *k* fois dérivable terme à terme.

(2) *g* est 2π-périodique.

(3) Enfin, $g=f$:

Déjà, *g* est continue et 2π-périodique.

Calculons les $c_p(g)$:

Pour $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-ipx}\right)dx$.

Posons alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = u_n(x)e^{-ipx}$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue, $\|v_n\|_\infty = \|u_n\|_\infty$, donc la série de terme général v_n est normalement convergente.

On peut donc intégrer terme à terme sur $[0,2\pi]$:

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} v_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_{|p|,n}2\pi c_n(f) = c_p(f)$$

G) Séries remarquables obtenue à partir des séries de Fourier

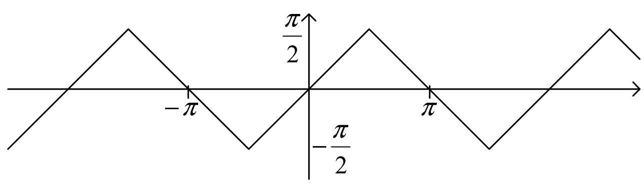
Exemple : on définit f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$

Etudions la série de Fourier de f :

(1) Graphe :

f est 2π -périodique car sin l'est, impaire. Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x$.

Pour $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x$



Donc f est continue, C^1 par morceaux.

(2) Calcul des coefficients :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \left[(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos nx}{n}dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{4}{n^2\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Dirichlet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2}\sin nx$$

(3) Application : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

On a $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\sin((2p+1)x)$

Donc en $x=\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

Puis $\underbrace{\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n^2}}_{\to\xi(2)}=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4k^2}}_{\to\xi(2)/4}+\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(2k+1)^2}}_{\to\pi^2/8}$

H) Résolution d'équations fonctionnelles (idée de Fourier)

Exemple d'équation fonctionnelle :

$(E): y''+ay'+by=f$, où $a,b\in\mathbb{C}$, f est continue 2π -périodique.

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que (E) ait au moins une solution 2π -périodique.

Analyse spectrale :

On cherche les coefficients de y si y est une solution 2π -périodique de (E).

Par linéarité de $\varphi\mapsto c_n(\varphi)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}c_n(f)&=c_n(y'')+ac_n(y')+bc_n(y)\\&=(-n^2+ain+b)c_n(y)\end{aligned}$$

1^er^ cas : $\forall n\in\mathbb{Z},-n^2+ain+b\neq 0$

Alors (E) a au plus une solution 2π -périodique y, caractérisée par :

$$\forall n\in\mathbb{Z},c_n(y)=\frac{c_n(f)}{-n^2+ain+b}$$

2^ème^ cas : S'il existe une ou deux solutions $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ à $-n^2+ain+b=0$.

Une condition nécessaire est que $c_{n_1}(f)=c_{n_2}(f)=0$ pour une solution. Ainsi,

Soit (E) n'a pas de solution, soit (E) a une infinité de solution.

En effet, si y_0 est solution, alors pour tout $C\in\mathbb{C}$, $x\mapsto y_0(x)+Ce^{in_jx}$ ($j=1,2$) est aussi une solution.

Peut-on dire mieux pour chacun des deux cas ?

(1) Si f est de classe C^1 par morceaux, alors $\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}$

Et la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|$ converge.

- Si $\forall n\in\mathbb{Z},-n^2+ain+b\neq 0$

Posons pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n(f)e^{inx}}{-n^2+ain+b}=v_0+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$

Où $v_0=\frac{c_0(f)}{b}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},v_n(x)=\frac{c_n(f)e^{-inx}}{-n^2+ain+b}+\frac{c_{-n}(f)e^{inx}}{-n^2-ain+b}$

Alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E).

En effet, les v_n sont de classe C^2, et les séries de terme général $v_n^{(j)}$ ($j=1,2$) sont normalement convergentes car

$$\left\|v_n^{(j)}\right\|_\infty \leq n^j\left(\frac{|c_n(f)|}{|-n^2+ain+b|}+\frac{|c_{-n}(f)|}{|-n^2-ain+b|}\right) \underset{n\to\pm\infty}{=} O\left(|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|\right)$$

Donc g est de classe C^2, dérivable terme à terme et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, g''(x)+ag'(x)+bg(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{bc_n(f)e^{inx}+inac_n(f)e^{inx}-n^2c_n(f)e^{inx}}{-n^2+b+ain}$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}=f(x)$$

- Si $-n^2+ain+b$ s'annule pour $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$:

On pose $g(x)=\sum_{n\neq n_1,n_2}\frac{c_n(f)e^{inx}}{-n^2+ain+b}$

On a le même résultat (sachant que $c_{n_1}(f)=c_{n_2}(f)=0$)

(2) Si maintenant f n'est que continue :

On va montrer que si $\forall n\in\mathbb{Z},(-n^2+ain+b=0\Rightarrow c_n(f)=0)$,

Alors (E) a au moins une solution 2π-périodique.

On va utiliser la variation des constantes et l'expression intégrale des solutions :

Equation sans second membre : $y''+ay'+by=0$

Equation caractéristique : $r^2+ar+b=0$

On suppose que $\Delta=a^2-4b\neq 0$. Ainsi, on a deux racines r_1, r_2 distinctes.

Un système fondamental de solutions est donc $x\mapsto e^{r_1x}$, $x\mapsto e^{r_2x}$.

Dans (E), on pose $\begin{cases} y(x)=\lambda(x)e^{r_1x}+\mu(x)e^{r_2x} \\ y'(x)=\lambda(x)r_1e^{r_1x}+\mu(x)r_2e^{r_2x} \end{cases}$.

Alors $\begin{cases} \lambda'(x)e^{r_1x}+\mu'(x)e^{r_2x}=0 \\ \lambda'(x)r_1e^{r_1x}+\mu'(x)r_2e^{r_2x}=f(x) \end{cases}$

Donc $\lambda'(x)=\frac{-f(x)e^{-r_1x}}{r_2-r_1}$, $\mu'(x)=\frac{-f(x)e^{-r_2x}}{r_1-r_2}$

La solution général de (E) s'écrit donc :

$$y(x)=\left(A-\int_0^x\frac{f(t)e^{-r_1t}}{r_2-r_1}dt\right)e^{r_1x}+\left(B-\int_0^x\frac{f(t)e^{-r_2t}}{r_1-r_2}dt\right)e^{r_2x}$$

(Et $y'(x)=\left(A-\int_0^x\frac{f(t)e^{-r_1t}}{r_2-r_1}dt\right)r_1e^{r_1x}+\left(B-\int_0^x\frac{f(t)e^{-r_2t}}{r_1-r_2}dt\right)r_2e^{r_2x}$)

Alors y est 2π-périodique si et seulement si $y(0)=y(2\pi)$ et $y'(0)=y'(2\pi)$

En effet, comme f est 2π-périodique, si y est solution, alors $z:x\mapsto y(x+2\pi)$ l'est aussi.

Donc si $\begin{cases} y(0)=y(2\pi)=z(0) \\ y'(0)=y'(2\pi)=z'(0) \end{cases}$, alors d'après le théorème de Cauchy $y=z$

Il suffit donc de montrer qu'il existe A et B tels que $y(0)=y(2\pi)$ et $y'(0)=y'(2\pi)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A+B=\left(A-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_1t}}{r_2-r_1}dt\right)e^{r_1 2\pi}+\left(B-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_2t}}{r_1-r_2}dt\right)e^{r_2 2\pi} \\ Ar_1+Br_2=\left(A-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_1t}}{r_2-r_1}dt\right)r_1e^{r_1 2\pi}+\left(B-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_2t}}{r_1-r_2}dt\right)r_2e^{r_2 2\pi} \end{cases}$$

Ou, comme $r_1\neq r_2$: $\begin{cases} A=\left(A-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_1t}}{r_2-r_1}dt\right)e^{r_1 2\pi} & (1) \\ B=\left(B-\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)e^{-r_2t}}{r_1-r_2}dt\right)e^{r_2 2\pi} & (2) \end{cases}$

Discussion :

Si $e^{2\pi.r_1}\neq 1$, il existe A unique tel que (1)

Si $e^{2\pi.r_1}=1$, alors $r_1=in$ où $n\in\mathbb{Z}$

Et donc $(in)^2+a(in)+b=0$, c'est-à-dire $-n^2+ain+b=0$

Donc $c_n(f)=0$ et (1) devient $A=A$, qui a une infinité de solutions.

On fait la même chose pour B.