Chapitre 22 : Equations et systèmes différentiels non linéaires

On considère un espace de Banach E.

I Généralités

A) Equations résolues du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f : U \to E$ continue.

On considère l'équation différentielle du premier ordre $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$

Lorsque $f(t, x(t))$ ne dépend que de x, l'équation est dite autonome.

Une équation autonome du premier ordre s'écrit donc $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$ où $F : \Omega \to E$ est continue sur Ω ouvert de E.

En posant $U = \mathbb{R}\times\Omega$, ouvert de $\mathbb{R}\times E$, et $f(t, x) = F(x)$, on retrouve la forme générale.

B) Solution de (E)

On appelle solution de (E) un couple (I, φ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to E$ de classe C^1 telle que $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

C) Condition initiale et problème de Cauchy

Une condition initiale pour (E), c'est un couple $(t_0, x_0) \in U$

Résoudre le problème de Cauchy $C_{(E),(t_0,x_0)} : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, c'est trouver les solutions (I, φ) de (E) telles que $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = x_0$

D) Ordre de prolongement sur les solutions et solutions maximales

Soient (I, φ), (J, ψ) deux solutions de (E). On dit que (I, φ) prolonge (J, ψ) lorsque $J \subset I$ et $\varphi_{/J} = \psi$.

Proposition :

La relation de prolongement est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des solutions de (E).

Attention : il est possible que deux solutions de (E) ne soient pas comparables.

Définition :

On appelle solution maximale de (E) une solution (I, φ) maximale pour l'ordre de prolongement, c'est-à-dire que si (J, ψ) prolonge (I, φ), alors $I = J$ et $\varphi = \psi$.

E) Premières propriétés

- Invariance par translation de la variable de l'ensemble des solutions de $(E_{\text{au}}): x'(t) = F(x(t))$:

Théorème :

Soient $F: \Omega \subset E \to E$ continue et (I, φ) une solution de (E_{au}).

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si on pose $I_a = I + a$ et $\forall t \in I_a, \varphi_a(t) = \varphi(t-a)$, alors (I_a, φ_a) est solution de (E_{au}).

De plus, (I, φ) est maximale si et seulement si (I_a, φ_a) l'est.

Démonstration :

Si (I, φ) est solution, alors $\forall t \in I, \varphi(t) \in \Omega$, donc $\forall t \in I_a, \varphi_a(t) \in \Omega$

De plus, φ_a est de classe C^1, et $\forall t \in I_a, \varphi'_a(t) = \varphi'(t-a) = F(\varphi(t-a)) = F(\varphi_a(t))$

Caractéristique maximale :

Si (J, ψ) prolonge (I, φ), alors (J_a, ψ_a) prolonge (I_a, φ_a).

Inversement, si (J, ψ) prolonge (I_a, φ_a), alors (J_{-a}, ψ_{-a}) prolonge (I, φ).

- Equation intégrale associée à un problème de Cauchy :

Proposition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f: U \to E$ continue et $(t_0, x_0) \in U$.

On considère l'équation différentielle $(E): x'(t) = f(t, x(t))$.

Soit $\varphi: I \to E$, continue sur l'intervalle I telle que $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$.

On suppose que $t_0 \in I$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) φ est de classe C^1 et (I, φ) est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (E): x'(t) = f(t, x(t)) \\ \quad x(t_0) = x_0 \end{cases}$

(2) $\forall t \in I, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$

Démonstration :

C'est la même chose que pour les équations linéaires.

- Théorème de prolongement en une borne :

Théorème :

Soient $f: U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ continue, $(E): x'(t) = f(t, x(t))$ et (I, φ) une solution de (E).

On suppose que $I = |a, b[$ où $b \in \mathbb{R}$, et que $\varphi(t)$ a une limite $l \in E$ en b, vérifiant $(b, l) \in U$.

Alors le couple (J, ψ) où $J = I \cup \{b\}$ et $\forall t \in J, \psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) \text{ si } t \neq b \\ l \text{ si } t = b \end{cases}$ est solution de (E), qui prolonge (I, φ).

En particulier, (I, φ) n'est pas maximale

Remarque :

On a la même chose pour l'autre borne.

Démonstration :

Déjà, ψ est continue sur *J*, et de classe C^1 sur *I*.

De plus, comme $(b,l)\in U$, on a $\lim_{t\to b^-} f(t,\varphi(t)) = f(b,l)$ par continuité de *f* en (b,l). Or, $\forall t\in I, \psi'(t) = \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) = f(t,\psi(t))$

Donc $\lim_{t\to b^-}\psi'(t) = f(b,l) = f(b,\psi(b))$

Donc ψ est dérivable en *b* et $\psi'(b) = f(b,\psi(b))$. Donc (J,ψ) est solution de (*E*).

Remarque :

Le théorème de prolongement C^1 est valable pour un espace de Banach, même de dimension infinie.

F) Cas des systèmes différentiels

- De deux équations :

On considère le système $(S):\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) = g(t,x(t),y(t)) \end{cases}$ où $f,g:U\to E$ sont continues sur l'ouvert *U* de $f,g:U\to E$.

Si on pose $F = E^2$, $\begin{array}{l} h:U\subset\mathbb{R}\times F\to F \\ (t,x,y)\mapsto(f(t,x,y),g(t,x,y)) \end{array}$ et $(E): v'(t) = h(t,v(t))$ avec $\begin{array}{l} v:I\to F \\ t\mapsto(x(t),y(t)) \end{array}$, alors *F* muni d'une topologie produit est un espace de Banach, et (*E*) est équivalent à (*S*).

Une condition initiale de (*S*) est un triplet $(t_0,x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times E\times E$ (c'est-à-dire une condition initiale de (*E*)). On définit aussi le problème de Cauchy $C_{(S),(t_0,x_0,y_0)}:\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) = g(t,x(t),y(t)) \\ (x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0) \end{cases}$

- Cas de $p\geq 2$ équations : analogue.
- Equation d'ordre $r\geq 2$:

On considère l'équation $(E_r): x^{(r)}(t) = f(t,x(t),...x^{r-1}(t))$ où $f:U\to E$ est continue sur *U*, ouvert de $\mathbb{R}\times E^r$.

On appelle solution de (E_r) un couple (I,φ) où *I* est un intervalle, et $\varphi: I\to E$ est de classe C^r telle que $\forall t\in I, (t,\varphi(t)...\varphi^{(r-1)}(t))\in U$ et $\varphi^{(r)}(t) = f(t,\varphi(t),...\varphi^{(r-1)}(t))$

On peut ramener (E_r) à un système de *r* équations d'ordre 1 :

Pour $r=2$ par exemple, $(E_2): x''(t) = f(t,x(t),x'(t))$

Alors $(E_2)\Leftrightarrow(S):\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(t,x(t),y(t)) \end{cases}\Leftrightarrow(E): v'(t) = h(t,v(t))$

Où $\begin{array}{l} h:U\subset\mathbb{R}\times E^2\to E^2 \\ (t,x,y)\mapsto(y,f(t,x,y)) \end{array}$

Une condition initiale de (E_r) est $(t_0,x_0,...x_{r-1})\in U$.

Le problème de Cauchy associé est $\begin{cases} (E_r) \\ \forall i\leq r-1, x^{(i)}(t_0) = x_i \end{cases}$

G) Exemples

- Equations différentielles linéaires :

On considère l'équation $L : x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$, où $b : I_0 \to E$ et $a : I_0 \to L_C(E)$ sont continues.

Théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires :
Sous les hypothèses précédente,
(1) Tout problème de Cauchy admet une solution maximale
(2) Son domaine de définition est I_0
(3) Toute solution est restriction de cette solution maximale.

Démonstration :

(1) D'après le théorème de Cauchy déjà vu, pour tout $(t_0, x_0) \in I_0 \to E$, il existe $\varphi : I_0 \to E$ de classe C^1 unique telle que $\forall t \in I_0, \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Alors (I_0, φ) est solution maximale :

Si (I, ψ) est une autre solution maximale, alors $I \subset I_0$, et $\varphi_{/I} = \psi$ car φ et ψ sont solution sur *I* du même problème de Cauchy.

Comme ψ est maximale et (I_0, φ) la prolonge, on a $(I_0, \varphi) = (I, \psi)$

(3) Si (J, ψ) est une autre solution comme ci-dessus, on voit que $\psi = \varphi_J$

- $(E) : x'(t) = 1 + x(t)^2$ ($E = \mathbb{R}$)

Equation autonome :

Soit (I, φ) une solution de (E), $\varphi(t_0) = x_0$

Alors $\forall t \in I, \dfrac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} = 1$

Donc $\forall t \in I, [\mathrm{Arctan}\varphi(t)]_{t_0}^{t} = t - t_0$

Donc $\forall t \in I, \mathrm{Arctan}\varphi(t) = \mathrm{Arctan}\, x_0 + t - t_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Donc $I \subset I_0 = \left]\mathrm{Arctan}\, x_0 - t_0 - \frac{\pi}{2}, \mathrm{Arctan}\, x_0 - t_0 + \frac{\pi}{2}\right[$

Et $\forall t \in I, \varphi(t) = \tan(\mathrm{Arctan}\, x_0 - t_0 + t)$

Synthèse :

Si on pose $\forall t \in I_0, \varphi_0(t) = \tan(\mathrm{Arctan}\, x_0 - t_0 + t)$, alors (I_0, φ_0) est l'unique solution maximale du problème de Cauchy. Toute autre solution en est restriction.

Remarque :

On voit ici que pour une équation non linéaire, la taille des solutions maximales n'est pas prévisible.

- $(E) : x'(t) = x(t)^{1/3}$ (Autonome, $E = \mathbb{R}$)

On va montrer que tout problème de Cauchy a une infinité de solutions.

Le problème $C : \begin{cases} x'(t) = x(t)^{1/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet comme solution $(\mathbb{R}, 0)$

On pose pour $a > 0$ et $b < 0$, $\varphi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [b, a] \\ (\frac{2}{3})^{3/2}(t-a)^{3/2} \text{ si } t \geq a \\ (\frac{2}{3})^{3/2}(b-t)^{3/2} \text{ si } t \leq b \end{cases}$. Alors :

(1) $\varphi_{a,b}$ est de classe C^1 (on a bien un raccordement C^1 en *a* et *b*)

(2) $\varphi_{a,b}$ est solution de (E) :

Pour $t > a$, $\varphi'_{a,b}(t) = (\frac{2}{3})^{1/2}(t-a)^{1/2} = (\varphi_{a,b}(t))^{1/3}$

Pour d'autres problèmes de Cauchy, on translate le long de Ox.

Remarque :

Contrairement à ce qui se passe pour les équations linéaires, la continuité de *f* ne suffit pas pour assurer l'unicité.

II Théorème de Cauchy–Lipschitz pour les équations d'ordre 1

A) Le théorème de Cauchy–Lipschitz local

(Totalement inutile en pratique)

Théorème :

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f : U \to E$ de classe C^1.

Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution locale, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\times B_o(x_0,\beta) \subset U$, et $\varphi_0 :]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\to B_o(x_0,\beta)$ de classe C^1 telle que $\begin{cases} \forall t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[, \varphi_0'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi_0(t_0) = x_0 \end{cases}$

Et pour toute autre solution (I, φ), $\varphi_{0/I\cap I_0} = \varphi_{/I\cap I_0}$ où $I_0 =]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$

Remarque :

Le théorème est vrai si on remplace « *f* est de classe C^1 » par « *f* est continue et localement lipschitzienne en x », c'est-à-dire que pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]\times B_f(x_0,\beta) \subset U$ de (t_0, x_0) et une constante $K > 0$ tels que

$$\forall (t,x,y) \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\times B_f(x_0,\beta)\times B_f(x_0,\beta), \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x-y\|$$

L'hypothèse est moins forte puisque si *f* est de classe C^1, elle est automatiquement continue et localement lipschitzienne.

Démonstration du théorème (avec l'hypothèse moins forte) :

Comme *f* est continue et localement lipschitzienne, quitte à diminuer le voisinage de (t_0, x_0), on peut trouver α, β, M, K strictement positifs tels que :

(1) $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]\times B_f(x_0,\beta) \subset U$

(2) $\forall (t,x) \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\times B_f(x_0,\beta), \|f(t,x)\| \leq M$

(3) $\forall (t,x,y) \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]\times B_f(x_0,\beta)\times B_f(x_0,\beta), \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x-y\|$

(4) $\alpha.M \leq \beta$

(5) $\alpha.K < 1$

On considère l'espace métrique X des fonctions continues de $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ dans $B_f(x_0,\beta)$ muni de la distance d définie par la norme infinie, et l'application Φ qui à $h \in X$ associe g définie par $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, h(s))ds$.

Alors :

X est un espace métrique complet, car c'est une partie fermée de l'espace de Banach des fonctions continues de $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ dans E muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

Pour $h \in X$, on a :

- $g = \Phi(h)$ est bien définie et continue sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ (d'après 1)
- $g \in X$ (d'après (2) et (4))

De plus, pour $h_1, h_2 \in X$ et $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, en notant $\varepsilon(t)$ le signe de $t-t_0$, on a

$$\|\Phi(h_1)(t)-\Phi(h_2)(t)\|_E = \left\|\int_{t_0}^{t}(f(s,h_1(s))-f(s,h_2(s)))ds\right\|_E$$

$$\leq \varepsilon(t)\int_{t_0}^{t} K\|h_1(s)-h_2(s)\|_E\, ds \leq \alpha K d(h_1,h_2)$$

Donc $\|\Phi(h_1)-\Phi(h_2)\|_\infty \leq \alpha K d(h_1,h_2)$, c'est-à-dire que Φ est αK –lipschitzienne, donc contractante.

Ainsi, on peut appliquer le théorème du point fixe à Φ : il existe un unique point fixe φ qui est l'unique solution sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ de l'équation intégrale associée à $C_{(E),(t_0,x_0)}$. Ce problème a donc une unique solution maximale dans $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ et, plus généralement, dans tout sous–intervalle de $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ contenant t_0.

D'où le résultat.

Remarque :

La condition « localement lipschitzienne » est celle qui entraîne l'unicité de la solution.

Pour l'existence, en dimension finie, on a le théorème de Cauchy–Arzelã :

Si f est continue, tout problème de Cauchy admet au moins une solution (locale)

B) Théorème de Cauchy–Lipschitz global

Théorème :

On suppose $f: U \to E$ de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}\times E$. Soit $(t_0,x_0)\in U$.

Alors :

(1) Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale (I,φ).

(2) I est un intervalle ouvert (voisinage de t_0)

(3) Toute autre solution du problème de Cauchy est restriction de (I,φ)

Remarque :

L'énoncé est vrai avec f seulement continue et localement lipschitzienne en x.

Démonstration :

(1) et (3) découlent du théorème de Cauchy–Lipschitz local.

(2) est conséquence du théorème de prolongement en une borne.

Remarque :

Le théorème local est maintenant conséquence de ce théorème, et ne sert plus à rien.

III Application à des équations remarquables

A) Equations scalaires à variables séparables

Pour une équation de la forme $(E): x'(t) = a(t)\times b(x(t))$, $a: I_0 \to \mathbb{R}$, $b: J_0 \to \mathbb{R}$.

Ici, $U = I_0 \times J_0$, $f: \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto a(t)\times b(x) \end{array}$

On suppose a et b C^1 pour appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz (global)

Remarque :

Il suffit que a soit continue et b de classe C^1 ou localement lipschitzienne.

Résolution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a(t)\times b(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

- Si $b(x_0) = 0$, la solution maximale est (I_0, x_0), fonction constante.
- Si $b(x_0) \neq 0$, alors la solution maximale (I,φ) vérifie $\forall t \in I, b(\varphi(t)) \neq 0$.

En effet, si il existe $t_1 \in I$ tel que $b(\varphi(t_1)) = 0$, alors (I,φ) et (I_0, x_1), où $x_1 = \varphi(t_1)$ fonction constante, sont deux solutions maximales du problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$. Donc $I = I_0$ et $\varphi = x_1$.

Donc b ne s'annule pas sur $\varphi(I) = J$ intervalle.

Soit G une primitive de $1/b$ sur J.

On a alors $\forall t \in I, \dfrac{\varphi'(t)}{b(\varphi(t))} = a(t)$

Donc $G(\varphi(t)) - G(\varphi(t_0)) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds = A(t)$

De plus, G est un C^1–difféomorphisme (G' ne s'annule pas).

Donc $\varphi(t) = G^{-1}(G(x_0) + A(t))$ est solution du problème de Cauchy sur I.

Morale :

Pour une équation à variables séparables $x'(t) = a(t)b(x(t))$ où a, b sont de classe C^1, il y a dichotomie entre les deux cas :

- $\forall t \in I, b(x(t)) = 0$
- $\forall t \in I, b(x(t)) \neq 0$

B) Equations scalaires d'ordre 2

On considère $(E): x''(t) = f(t, x(t) x'(t))$: correspond à toute la mécanique du point en physique.

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$, à valeur réelles, alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0, v_0) \in U$, le problème $\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale, et toute solution est restriction de cette solution (c'est-à-dire que pour une position et une vitesse initiales données, il n'y a qu'une seule trajectoire possible..!)

Démonstration :
Il suffit de se ramener au système d'ordre 1 associé :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)) \end{cases}$$

C) Equations et systèmes autonomes

- Théorème de Cauchy–Lipschitz :

On considère une équation différentielle autonome $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$

Si $F : \Omega \subset E \to E$ est de classe C^1, alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, le problème de Cauchy $C_{(E_{\text{au}}),(t_0,x_0)}$ a une unique solution maximale et toute solution est restriction de cette solution.

Si (I, φ) est la solution maximale de $C_{(E_{\text{au}}),(0,x_0)}$, alors la solution maximale de $C_{(E_{\text{au}}),(t_0,x_0)}$ est (I_{t_0}, φ_{t_0})

Remarque :
Pour une équation autonome, il suffit donc de résoudre $C_{(E_{\text{au}}),(0,x_0)}$.

- Trajectoire :

On appelle trajectoire de $(E_{\text{au}}) : x'(t) = F(x(t))$ une courbe paramétrée $\begin{array}{l} I \to E \\ t \mapsto \varphi(t) \end{array}$ où (I, φ) est solution maximale.

Proposition :
Si $F : \Omega \subset E \to E$ est de classe C^1, alors l'ensemble des trajectoires de E_{au} forme une partition de $\mathbb{R} \times \Omega$; autrement dit, deux trajectoires différentes sont disjointes.

Démonstration :
C'est toujours le théorème de Cauchy–Lipschitz.
Trajectoires particulières :
(1) Les « points » : correspondent aux solutions maximales constantes.
Mais $x(t) = x_0$ est solution de (E_{au}) si et seulement si $F(x_0) = 0$
Un tel point x_0 s'appelle position d'équilibre (en physique) ou point critique (en math)
(2) Les trajectoires fermées, c'est-à-dire telles que φ n'est pas injective.

Proposition (Hors programme) :
Si F est de classe C^1, les solutions maximales (I, φ) sont :
- Soit injectives
- Soit périodiques, c'est-à-dire que $I = \mathbb{R}$ et il existe $T > 0$ tel que φ est T–périodique.

Démonstration :
Supposons que la solution maximale (I, φ) ne soit pas injective.
Alors il existe $a, b \in I$ distincts tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et on peut supposer $a < b$.
On a alors, en posant $T = a - b > 0$, $(I, \varphi) = (I_T, \varphi_T)$.

En effet, ce sont deux solutions maximales du même problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t)=F(x(t)) \\ x(b)=x_0=\varphi(b) \end{cases}$, car, pour (I_T,φ_T) (clair pour (I,φ)) :

$b\in I_T=I+(b-a)$ car $a\in I$,

$\varphi_T(b)=\varphi(b-T)=\varphi(a)=\varphi(b)$

Donc $I=I+T$. Donc $I=\mathbb{R}$ et $\varphi_T=\varphi$ donc φ est T–périodique.

- Equations autonomes scalaires $x'(t)=F(x(t))$, où $F:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 : c'est un cas particulier d'équation à variables séparables.

Exercice :

Résoudre $x'(t)=\sin(x(t))$

Méthode : on utilise le théorème de Cauchy–Lipschitz pour résoudre $\begin{cases} x'(t)=\sin(x(t)) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$

Remarque « géométrique » :

(1) Comme l'équation est autonome, il suffit de résoudre le problème de Cauchy en $t_0=0$

(2) Le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique car la fonction sinus est de classe C^1 ; on a donc une unique solution maximale (I,φ)

(3) Si (I,φ) est solution maximale, alors $(I,\varphi+2k\pi),k\in\mathbb{Z}$ aussi.

(4) Si (I,φ) est solution maximale, alors $(I,-\varphi)$ aussi.

Avec (3) et (4) : on peut supposer que $x_0\in[0,\pi]$

Si $x_0=0$, la solution maximale est $(\mathbb{R},0)$

Si $x_0=\pi$, la solution maximale est $(\mathbb{R},\pi)$

Si $x_0\in]0,\pi[$, alors $t\mapsto\sin(\varphi(t))$ ne s'annule pas sur *I*.

Donc $\forall t\in I,\dfrac{\varphi'(t)}{\sin(\varphi(t))}=1$

Sur $]0,\pi[$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\ln(\tan\tfrac{x}{2})$

On intègre sur $[t_0,t]$:

$$\ln\left(\frac{\tan\frac{\varphi(t)}{2}}{\tan\frac{x_0}{2}}\right)=t-t_0$$

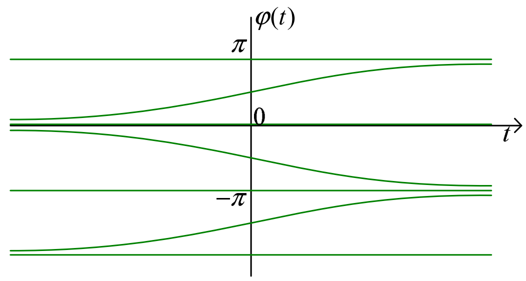
Donc $\tan\frac{\varphi(t)}{2}=\tan(\frac{x_0}{2})e^{t-t_0}$

Or, $\forall t\in I,0<\varphi(t)<\pi$

(Car s'il existe t tel que $\varphi(t)\geq\pi$, alors il existe t_1 tel que $\varphi(t_1)=\pi$ donc par unicité de la solution, $\varphi=\pi$; de même pour 0)

Donc $\forall t\in I,\dfrac{\varphi(t)}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc $\forall t\in I,\varphi(t)=2\mathrm{Arctan}\left(\tan(\frac{x_0}{2})e^{t-t_0}\right)$

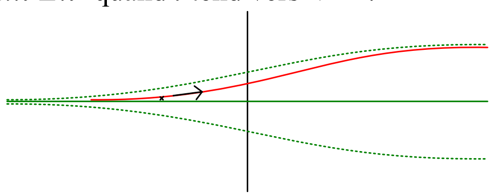


Remarque :

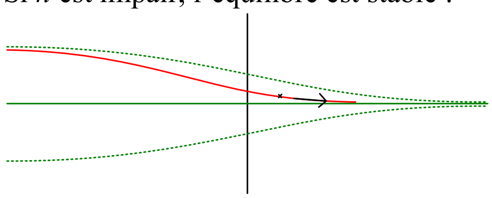
Stabilité des équilibres :

Les équilibres sont les conditions initiales pour lesquelles $x_0 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Si n est pair, l'équilibre est instable : un petit écart à l'équilibre fera tendre $\varphi(t)$ vers $n\pi \pm \pi$ quand t tend vers $+\infty$:



Si n est impair, l'équilibre est stable :



- Cas des systèmes autonomes d'ordre 2 scalaires :

On considère le système $(S):\begin{cases} x'(t) = F(x(t), y(t)) \\ y'(t) = G(x(t), y(t)) \end{cases}$, où $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues.

Théorème :

Si F et G sont de classe C^1, tout problème de Cauchy a une unique solution maximale (I, φ) et les autres solutions en sont restriction.

Champ de vecteurs associé :

On note $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\vec{V}$: $\begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ M = (x,y) \mapsto \vec{V}(M) = F(x,y)\vec{i} + G(x,y)\vec{j} \end{array}$

La représentation graphique de $\vec{V}$ permet une construction approchée par la méthode d'Euler point par point des trajectoires et détermine l'allure des trajectoires.

Exemple : Lottka-Volterra (proies–prédateurs)

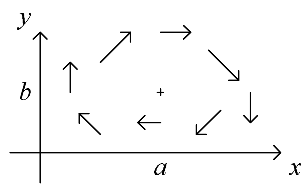
On considère le système $(S):\begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - b) \\ y'(t) = y(t)(a - x(t)) \end{cases}$ où a, b sont positifs.

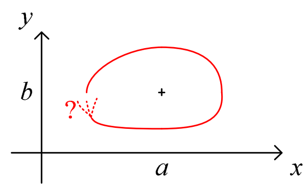
$y(t)$: effectif des lapins à l'instant t.

$x(t)$: effectif des renards à l'instant t.

On a $\vec{V}(x, y) = x(y - b)\vec{i} + y(a - x)\vec{j}$

Points d'équilibre : $(0,0)$ et (a,b)





Remarque :

On a une intégrale première, c'est-à-dire une fonction $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, constante sur la trajectoire.

En effet, $H(x,y)=y+x-b\ln y-a\ln x$ convient.

> « Méthode » pour trouver H :
>
> On a avec les équations $dt=\dfrac{dx}{x(y-b)}$, $dt=\dfrac{dy}{y(a-x)}$.
>
> On doit résoudre $\dfrac{dy}{y(a-x)}=\dfrac{dx}{x(y-b)}$, c'est-à-dire $\dfrac{(y-b)dy}{y}=\dfrac{(a-x)dx}{x}$
>
> Donc $y-b\ln y=a\ln x-x+\text{cte}$

En effet, si $(I,(x,y))$ est une solution telle que x et y sont positives, alors

$$\frac{dH(x(t),y(t))}{dt}=x'(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t))+y'(t)\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t))$$

$$=x(y-b)(1-\tfrac{a}{x})+y(a-x)(1-\tfrac{b}{y})=0$$

Etude rigoureuse :

Pour une condition initiale $\begin{cases}x(0)=x_0\\ y(0)=y_0\end{cases}$

1$^{\text{er}}$ cas : $x_0=0$: la solution maximale est $(\mathbb{R},\varphi)$ où $\forall t\in\mathbb{R},\varphi(t)=(0,y_0e^{a.t})$

2$^{\text{ème}}$ cas : $y_0=0$: la solution maximale est $(\mathbb{R},\varphi)$ où $\forall t\in\mathbb{R},\varphi(t)=(x_0e^{-b.t},0)$

3$^{\text{ème}}$ cas : si $x_0>0$ et $y_0>0$:

Soit (I,φ) la solution maximale, $\varphi(t)=(x(t),y(t))$

On a $\forall t\in I, x(t)>0, y(t)>0$

(Si x s'annule en un point, par unicité de la solution, on trouvera que x est nul)

On a donc $\forall t\in I, H(x(t),y(t))=\text{cte}=H(x_0,y_0)$

Or, $C_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}, x+y-a\ln x-b\ln y=k\right\}$ est compact. En effet :

Il est borné :

On pose $\alpha(x)=x-a\ln x$, $\beta(y)=y-b\ln y$

Alors $\alpha'(x)=1-\frac{a}{x}$

x	0		a		$+\infty$
α'		$-$	0	$+$	
α	$+\infty$	$\searrow$	$\alpha(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Supposons C_k non borné.

Soit alors $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_k^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to+\infty$ ou $y_n\to+\infty$; supposons par exemple que c'est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\alpha(x_n)\to+\infty$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\alpha(x_n)+\beta(y_n)\geq\alpha(x_n)+\beta(b)\to+\infty$, ce qui est impossible car $\forall n\in\mathbb{N},\alpha(x_n)+\beta(y_n)=k$

C_k est fermé : $H:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R}$ est continue donc $C_k=H^{-1}\{k\}$ est un fermé de $\mathbb{R}_+^{*2}$

Attention : ce n'est pas forcément pour autant un fermé de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}_+^{*2}$ est un fermé de lui-même mais pas de $\mathbb{R}^2$ par exemple)

Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_k^{\mathbb{N}}$ tendant vers $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$

Alors $\bar{x}>0$ et $\bar{y}>0$

(Car si $x_n\to 0$, alors $\alpha(x_n)\to+\infty$ et $\alpha(x_n)+\beta(y_n)\to+\infty$)

Comme *H* est continue en $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}_+^{*2}$, on a $H(\bar{x},\bar{y})=k$

Donc C_k est fermé, donc compact.

Ainsi, la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $I=\mathbb{R}$.

En effet, supposons que $I=\left]u,v\right[$ où *v* est fini (*I* est ouvert d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz)

Comme la trajectoire est incluse dans C^k compact, *x* et *y* sont bornées sur *I*.

Donc *x'* et *y'* aussi. Comme *v* est fini, *x'* et *y'* sont donc intégrables sur $\left[0,v\right[$, donc $x(t)=x_0+\int_0^t x'(s)ds$ a une limite finie *l* quand *t* tend vers *v*. De même, *y* a une limite *m*.

D'après le théorème de prolongement en une borne, en posant $x(v)=l$, $y(v)=m$, on obtient une solution de *S* sur $\left]u,v\right]$ ce qui contredit le caractère maximal de (I,φ).

On a la même chose pour *u*.

Donc $I=\mathbb{R}$

Montrons maintenant que la solution maximale est périodique :

On a $\forall t\in\mathbb{R},\alpha(x(t))+\beta(y(t))=k$

On suppose que $x_0\in\left]0,a\right[$, $y_0\in\left]0,b\right[$

Alors il existe $t_1>0$ tel que $y(t_1)>b$

En effet, sinon on a $\forall t>0, y(t)\in\left]0,b\right[$, donc $x'(t)=x(t)(y(t)-b)<0$

Donc *x* est décroissant, et $\forall t\geq 0, x(t)<a$, donc $\forall t\geq 0, y'(t)=y(t)(a-x(t))>0$

Donc *x* est décroissant minoré, *y* croissant majoré. Donc $x(t)$, $y(t)$ tendent vers des limites finies $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ quand *t* tend vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)=\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}-b)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}y'(t)=\tilde{\beta}(a-\tilde{\alpha})$.

Comme *x* et *x'* ont des limites finies, celle de *x'* est donc nulle, et pareil pour *y'*.

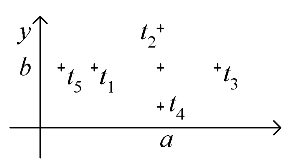
Donc $\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}-b)=0$ et $\tilde{\beta}(a-\tilde{\alpha})=0$

Mais $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\in C_k$, donc $\tilde{\alpha}>0$, $\tilde{\beta}>0$. Donc $\tilde{\alpha}=a$ et $\tilde{\beta}=b$

Mais alors $k=\alpha(a)+\beta(b)=\alpha(\tilde{\alpha})+\beta(\tilde{\beta})$

Or, $\alpha(a)=\min\limits_{x>0}\alpha(x)$ atteint seulement en $x=a$, $\beta(b)=\min\limits_{y>0}\beta(y)$, atteint uniquement en $y=b$. Donc C_k est réduit à (a,b), ce qui est impossible car $(x_0,y_0)\in C_k$.

De même, il existe $t_2>t_1$ tel que $x(t_2)=a$,…



On a ainsi $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$

Or, $\forall t, \alpha(x(t)) + \beta(y(t)) = k$

En particulier, $\alpha(x(t_j)) = k - \beta(b)$ pour $j = 1,3,5$

Or, l'équation $\alpha(x) = \lambda$ a au plus deux solutions.

Donc deux des nombres $x(t_1)$, $x(t_3)$, $x(t_5)$ sont égaux.

Si par exemple $x(t_1) = x(t_5)$, alors $\varphi(t_1) = \varphi(t_5)$ donc φ est $t_5 - t_1$ périodique.

- Systèmes autonomes linéaires :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On considère le système $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique.

Allure des trajectoires :

- Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable, en posant $Y = P^{-1}X$, on est ramené à $Y' = DY$

Avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, alors $\begin{cases} x'_1(t) = \lambda x_1(t) \\ y'_1(t) = \lambda y_1(t) \end{cases}$

Donc $x_1(t) = Ae^{\lambda . t}$, $y_1(t) = Be^{\mu . t}$

Si $A = B = 0$, la trajectoire est réduite à un point.

Si $A = 0$ et $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ et $B = 0$: on a une ½ droite ouverte.

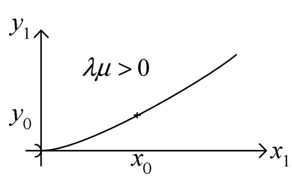
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$:

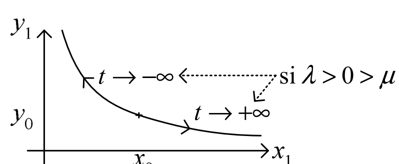
On a $\left(\dfrac{x_1(t)}{A}\right)^{\mu} = \left(\dfrac{y_1(t)}{B}\right)^{\lambda}$

Si $\lambda\mu > 0$: on a une courbe de type parabolique $y_1 = Cx_1^{\mu/\lambda}$, $\mu / \lambda > 0$

Si $\lambda\mu < 0$: on a une courbe de type hyperbolique $y_1 = Cx_1^{\mu/\lambda}$, $\mu / \lambda < 0$

Si $\mu = 0$: on a $y_1 = \text{cte}$, donc une demi–droite.





$\lambda\mu < 0$

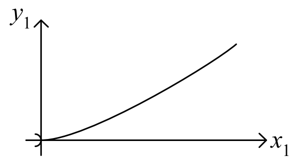
- Si A est trigonalisable, $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (χ_A est scindé, non à racines simple donc a une racine double)

$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda x_1(t) + y_1(t) \\ y'_1(t) = \lambda y_1(t) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{\lambda . t} \\ x_1(t) = (\alpha . t + \beta) e^{\lambda . t} \end{cases}$

Si $\alpha = 0$, on a une demi–droite.

Sinon, $\lambda . t = \ln \dfrac{y_1(t)}{\alpha}$ donc $x_1 = \left(\alpha \ln \dfrac{y_1}{\alpha} + \beta\right) \dfrac{y_1}{\alpha} = (\ln y_1 + c) y_1$



- Si A a deux valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$:

On peut écrire $\lambda = re^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]0,\pi\right[$, $r>0$;

Alors A est semblable à $r\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R$ (car A et R sont $\mathbb{C}$–diagonalisables avec les mêmes valeurs propres, donc sont $\mathbb{C}$–semblables, donc $\mathbb{R}$–semblables)

$$\begin{cases} x'_1(t) = r(\cos\alpha.x_1(t) - \sin\alpha.y_1(t)) \\ y'_1(t) = r(\sin\alpha.x_1(t) + \cos\alpha.y_1(t)) \end{cases}$$

On pose $z(t) = x_1(t) + iy_1(t)$.

Alors z est de classe C^1, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = x_1(t)(r\cos\alpha + r.i\sin\alpha) + y_1(t)(-r\sin\alpha + r.i\cos\alpha)$$
$$= re^{i\alpha}x_1(t) + iy_1(t)re^{i\alpha} = z.re^{i\alpha}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = Ce^{r.e^{i\alpha}t}$ où $C = z(0)$

Pour $C = 1$:

$z = e^{r.t\cos\alpha}e^{ir.t\sin\alpha}$

Pour $r \neq 0$, en polaires, $\begin{cases} \rho(t) = e^{r.t\cos\alpha} \\ \theta(t) = r.t\sin\alpha \end{cases}$

Donc si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\rho = e^{\theta.\mathrm{cotan}\alpha}$ et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$.

On a donc une spirale logarithmique si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Remarque :

Si les valeurs propres de A sont imaginaires pures, les trajectoires sont des ellipses.

- Equation autonome d'ordre 2 scalaire $x''(t) = F(x(t), x'(t))$ où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

On pose $y(t) = x'(t)$; on est ramené à $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = F(x(t), y(t)) \end{cases}$

IV Exercices et compléments

A) Sur le domaine de définition des solutions maximales

Soit E un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times E \to E$ de classe C^1 ; on considère l'équation $(E) : x'(t) = f(t, x(t))$. Alors on a les résultats suivants :

(1) Si f est bornée, toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

En effet :

Comme f est de classe C^1, d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, toute solution maximale est définie sur un intervalle ouvert $I = \left]a,b\right[$.

Supposons que b est fini.

Soit $t_0 \in I$. On a $\forall t \geq t_0, \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'(t)dt$

Or, φ' est bornée sur $[t_0, b[$. Donc φ' est intégrable car b est fini. Donc φ admet une limite finie l en b.

En prolongeant φ en $\tilde{\varphi}$ par $\tilde{\varphi}(b) = l$, on a une solution $\tilde{\varphi}$ qui prolonge φ car $\lim_{t \to b^-} \varphi'(t) = \lim_{t \to b^-} f(t, \varphi(t)) = f(b, l)$, ce qui est impossible car φ est maximale.

Donc b est infini. De même pour a.

Donc la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée. Alors toute solution maximale de $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

En effet :

D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, si (I, φ) est une solution maximale, alors $I =]a, b[$, ouvert.

On suppose que b est fini.

Soit alors $t_0 \in]a, b[$.

Alors φ'' est bornée sur $[t_0, b[$, donc intégrable.

Donc φ' a une limite finie l en b.

Comme b est fini, φ' est intégrable sur $[t_0, b[$, donc φ a une limite finie l' en b.

Donc $\psi = (\varphi, \varphi')$ est prolongeable de façon C^1 en $\tilde{\psi}$ sur $]a, b[$, avec $\tilde{\psi}(b) = (l, l') = (\tilde{\varphi}(b), \tilde{\varphi}'(b))$

Puis $\lim_{t \to b} \tilde{\varphi}(t) = f(b, l, l') = f(b, \psi(b))$ et $\tilde{\varphi}$ prolonge φ, ce qui est impossible.

Donc $b = +\infty$, et de même $a = -\infty$.

(3) On considère le système $(S) : \begin{cases} x'(t) = t - x(t)^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$. Alors la solution maximale est définie sur $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

En effet :

Soit $f(t, x) = t - x^2$. Ainsi, f est de classe C^1.

Ainsi, pour une solution maximale (I, x), on a $I =]a, b[$.

Supposons que $a = -\infty$.

Alors $\forall t \leq -1, x'(t) \leq -1 - x(t)^2$

Donc $x(t)^2 + 1 \leq -x'(t)$

Donc $1 \leq \dfrac{-x'(t)}{1 + x(t)^2}$.

Soit $t_0 \in I$ tel que $t_0 < -1$.

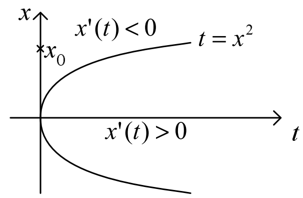
On intègre sur $[t, t_0]$: $t_0 - t \leq -[\operatorname{Arctan} x(t)]_t^{t_0} = \operatorname{Arctan} x(t) - \operatorname{Arctan} x(t_0) \leq \pi$

Donc $t \geq t_0 - \pi$. Donc $I \subset [t_0 - \pi, +\infty[$ ce qui est absurde vue l'hypothèse.

Donc a est infini.

Supposons que b est fini.

(i) Alors il existe $t_1 \geq 0$ tel que $x'(t_1) = 0$



(C'est-à-dire que la courbe va couper la parabole)

En effet, sinon comme $x'(0)<0$, on a $\forall t\geq 0, x'(t)<0$.

Donc x est décroissante sur $[0,b[$.

Comme $\forall t\geq 0, x(t)>\sqrt{t}\geq 0$ (car $\forall t\geq 0, x'(t)<0$), x est bornée sur $[0,b[$: $\forall t\geq 0, x(0)\geq x(t)\geq 0$

Donc $t\mapsto x'(t)=t-x^2$ est bornée sur $[0,b[$, donc x' est intégrable et x admet une limite finie en b, ce qui est impossible car sinon x serait prolongeable en b.

Donc il existe $t_1\geq 0$ tel que $x'(t_1)=0$

(ii) Alors $\forall t\in]t_1,b[, x'(t)>0$. En effet, supposons que $X=\{t>t_1, x'(t)=0\}$ n'est pas vide. Il admet alors une borne inférieure t_2.

On a alors $t_2>t_1$. En effet :

Posons $\varphi(t)=x(t)-\sqrt{t}$

Alors $\varphi'(t_1)=\underbrace{x'(t_1)}_{=0}-\dfrac{1}{2\sqrt{t_1}}<0$

Comme $\varphi(t_1)=0$, il existe donc $\alpha>0$ tel que $\forall t\in]t_1,t_1+\alpha[, \varphi(t_1)<0$

Donc $t_2\geq t_1+\alpha$

Ainsi, $X=\{t\geq t_1+\alpha, x'(t)=0\}$. C'est donc un fermé, minoré non vide. Il admet donc un plus petit élément, qu'on note encore t_2.

Ainsi, $\varphi'(t_2)=\underbrace{x'(t_2)}_{=0}-\dfrac{1}{2\sqrt{t_2}}<0$. Or, $\varphi(t_2)=0$

Donc il existe $\alpha'>0$ tel que $t_2-\alpha'>t_1$ et $\varphi(t_2-\alpha')>0$. Ainsi, $x'(t_2-\alpha')<0$, ce qui est impossible par définition de t_2 (car alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_1<t<t_2$ tel que $x'(t)=0$)

Donc $\forall t\in]t_1,b[, x'(t)>0$

Donc $\forall t>t_1, x^2(t)<t<b$

Donc x est bornée, donc x' aussi, et x est prolongeable en b, ce qui est impossible.

Donc b est infini.

B) Barrières (HP)

Dans l'exemple précédent, $\alpha : t\mapsto\sqrt{t}$ vérifie sur $]0,+\infty[$:

$\forall t>0, \alpha'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>f(t,\alpha(t))=0$

Alors pour toute solution (I,φ) où $I\cap]0,+\infty[=]0,b[$, s'il existe $t_0>0$ tel que $\varphi(t_0)\leq\alpha(t_0)$, alors $\forall t>t_0, \varphi(t)<\alpha(t)$

Plus généralement :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et $(E): x'(t)=f(t,x(t))$.

Une fonction $\alpha: I\to\mathbb{R}$ de classe C^1 est appelée barrière supérieure (resp. barrière inférieure) lorsque

$\forall t\in I, (t,\alpha(t))\in U$ et $\alpha'(t)>f(t,\alpha(t))$ (resp. $\alpha'(t)<f(t,\alpha(t))$)

Remarque :

La définition donnée est en fait celle de barrière stricte ; la notion usuelle de barrière correspond à l'inégalité large.

Proposition :

Soit (I,φ) une solution de $(E): x'(t)=f(t,x(t))$. Si α est une barrière supérieure sur I telle que $\varphi(t_0)\leq\alpha(t_0)$ pour $t_0\in I$, alors $\forall t>t_0, \varphi(t)<\alpha(t)$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $t>t_0$ tel que $\varphi(t)\geq\alpha(t)$.

On pose alors $X=\{t>t_0, \varphi(t)=\alpha(t)\}$

Alors X est non vide :

Si $\varphi(t_0)<\alpha(t_0)$, X n'est pas vide par hypothèse (et par continuité de $\varphi-\alpha$), et il est minoré par $t_1>t_0$ (car au voisinage de t_0, $\varphi(t_0)\neq\alpha(t_0)$)

Si $\varphi(t_0)=\alpha(t_0)$, on note alors $h=\alpha-\varphi$.

Alors $\forall t\geq t_0, h'(t)=\alpha'(t)-\varphi'(t)=\alpha'(t)-f(t,\varphi(t))$

Et donc $h'(t_0)=\alpha'(t_0)-f(t_0,\underbrace{\varphi(t_0)}_{=\alpha(t_0)})>0$

Donc h est croissante au voisinage de t_0, et $h(t_0)=0$

Donc il existe $a>0$ tel que $\forall t\in\,]t_0,t_0+a], h(t)>0$.

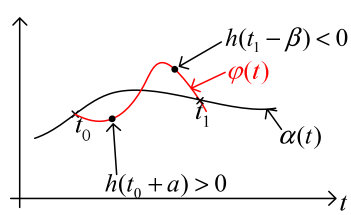
Donc $\forall t\in\,]t_0,t_0+a], \varphi(t)<\alpha(t)$. Donc par continuité de $\varphi-\alpha$, X est non vide, et minoré par $t_0+a>t_0$.

Donc dans les deux cas, X est fermé, non vide et minoré ; on note t_1 son plus petit élément : $t_1>t_0$.

Au voisinage de t_1, $h'(t_1)>0$ car $\varphi(t_1)=\alpha(t_1)$.

Donc il existe $\beta>0$ tel que $t_1-\beta>t_0+a$ et $h(t_1-\beta)<0$

Donc h s'annule sur $]t_0+a, t_1-\beta[$, ce qui contredit la définition de t_1.



Exercice :

On considère l'équation $(E): x'(t)=\cos(t)+\cos(x(t))$

(1) Toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ car $f:(t,x)\mapsto\cos t+\cos x$ est de classe C^1 et bornée.

(2) φ est une solution maximale si et seulement si $\varphi+2k\pi$ l'est ($k\in\mathbb{Z}$)

(3) φ est solution si et seulement si $\psi: t\mapsto\pi-\varphi(t+\pi)$ l'est.

En effet, si φ est solution, alors ψ est de classe C^1, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) = -\varphi'(t+\pi) = -(\cos(t+\pi) + \cos(\varphi(t+\pi)))$$
$$= \cos t + \cos(\pi - \varphi(t+\pi)) = \cos t + \cos \psi(t)$$

(4) Soit x une solution maximale. Montrer que s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x(t_0) \in [0, \pi]$, alors $\forall t \geq t_0, x(t) \in [0, \pi]$

Déjà, x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (par récurrence)

Soit $X = \{t > t_0, x(t) = 0\}$. Supposons que X est non vide.

- Si $x(t_0) > 0$, alors X a un plus petit élément $t_1 > t_0$

Etude au voisinage de t_1 :

On a $x'(t_1) = \cos t_1 + \cos(\underbrace{x(t_1)}_{=0}) = 1 + \cos t_1 \geq 0$

Si $t_1 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $t_1 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ce qui est impossible car on aurait au voisinage de t_1 un tableau de variation de la forme :

	$t_1 - \alpha$	t_1	$t_1 + \alpha$
x'	$+$		$+$
x	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires x s'annulerait sur $[t_0, t_1 - \alpha]$, ce qui contredit la définition de t_1.

Si $t_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos t_1 = -1$, $x'(t_1) = 0$, $x''(t_1) = 1$

On a donc le tableau de variation :

	$t_1 - \alpha$	t_1	$t_1 + \alpha$
x'''	$+$	1	$+$
x''	$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$
x'	$+$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+$
x	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Et on aura donc encore une contradiction avec la définition de t_1.

- Si $x(t_0) = 0$, alors $x'(t_0) = 1 + \cos t_0$

Si $t_0 \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, on a $x'(t_0) > 0$, donc x est croissante au voisinage de t_0, et comme $x(t_0) = 0$, x est strictement positive au voisinage de t_0, disons sur $]t_0, t_0 + \alpha']$.

Donc X vérifie $X \subset]t_0 + \alpha', +\infty[$. On a donc une borne inférieure $t_1 \geq t_0 + \alpha' > t_0$, et on trouvera encore une contradiction sur la définition de t_1

Si $t_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, x on aura de même une contradiction.

Donc X est vide, et $\forall t > t_0, x(t) > 0$

On fait le même raisonnement pour montrer que $\forall t > t_0, x(t) < \pi$

(5) Soit $P : a \in \mathbb{R} \mapsto P(a) = \varphi_a(2\pi)$ où φ_a est la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \cos t + \cos(x(t)) \\ x(0) = a \end{cases}$.

Montrer que P est croissante, continue et $P([0, \pi]) \subset [0, \pi]$.

En déduire que $x'(t) = \cos t + \cos(x(t))$ a au moins une solution 2π-périodique.

- P est croissante :

Supposons qu'il existe a, b réels tels que $a > b$ et $P(a) < P(b)$.

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,2\pi]$ tel que $\varphi_a(c) = \varphi_b(c) = \lambda$

Donc φ_a et φ_b sont solution du même problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \cos t + \cos(x(t)) \\ x(c) = \lambda \end{cases}$

Donc $\varphi_a = \varphi_b$, ce qui est impossible.

- Si $a \in [0,\pi]$, d'après (4), on a $\forall t \geq 0, \varphi_a(t) \in [0,\pi]$

Et en particulier $P(a) = \varphi_a(2\pi) \in [0,\pi]$

- Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Par définition de φ_a, φ_b, on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a(t) = a + \int_0^t f(s,\varphi_a(s))ds$ et une formule analogue pour φ_b

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a(t) - \varphi_b(t) = b - a + \int_0^t (f(s,\varphi_b(s)) - f(s,\varphi_a(s)))ds$

Pour $t \in [0,2\pi]$, on a donc $|\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b-a| + \int_0^t |f(s,\varphi_b(s)) - f(s,\varphi_a(s))| ds$

Or, f est 1-lipschitzienne par rapport à x car :

$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^3, |f(t,x) - f(t,y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x-y|$ (c'est l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction cosinus)

Donc $\forall t \in [0,2\pi], |\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b-a| + \int_0^t |\varphi_b(s) - \varphi_a(s)| ds$

Donc d'après le lemme de Gronwall :

$\forall t \in [0,2\pi], |\varphi_b(t) - \varphi_a(t)| \leq |b-a| e^{\int_0^t ds} \leq e^{2\pi}|b-a|$

C'est-à-dire $|P(b) - P(a)| \leq e^{2\pi}|b-a|$. Donc P est lipschitzienne, donc continue.

- Ainsi, $P : [0,\pi] \to [0,\pi]$ est continue, donc admet au moins un point fixe $a_0 \in [0,\pi]$.

On note alors $\varphi = \varphi_{a_0}$.

Alors φ est solution de $x'(t) = \cos t + \cos(x(t))$, et φ est 2π–périodique.

En effet :

Considérons $\psi : t \mapsto \varphi(t + 2\pi)$.

Alors ψ est solution de l'équation différentielle, car

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) &= \varphi'(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) + \cos(\varphi(t+2\pi)) \\ &= \cos(t) + \cos(\psi(t)) \end{aligned}$$

Et $\varphi(0) = \psi(0)$ car $\psi(0) = \varphi(2\pi) = P(\varphi(0)) = a_0 = \varphi(0)$

Donc $\varphi = \psi$ et φ est 2π–périodique.

Remarque : la même démonstration que dans l'exercice montre que :

Si $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times E \to E \\ (t,x) \mapsto f(t,x) \end{array}$ est continue et lipschitzienne en x, alors :

(1) Toute solution maximale de $(E) : x'(t) = f(t,x(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Si on note $P_T : a \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_a(T)$ où φ_a est solution du problème de Cauchy $C_{(E),(0,a)}$, alors P_T est continue.