Chapitre 23 : Propriétés des arcs paramétrés

ε désigne ici un espace affine de dimension 2 ou 3 de direction E.
On supposera parfois ε euclidien.

I Préliminaire : théorème de relèvement

Théorème (rappel) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute application $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 à valeurs dans le cercle unité ($\forall t \in I, |f(t)| = 1$, il existe $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in I, f(x) = \exp(ig(x))$. En outre, deux fonctions g solutions diffèrent de $2N\pi$ ($N \in \mathbb{Z}$) et si f est de classe C^k, g l'est aussi et on a $\forall x \in I, g'(x) = \dfrac{-if'(x)}{f(x)}$

Définition :

g s'appelle relèvement de f ou détermination de classe C^1 de l'argument de f.

Application :

Pour toute application $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^k ($k \geq 1$) sur l'intervalle I ne s'annulant pas, il existe deux applications de classe C^k $r : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I, f(t) = r(t)\exp(i\theta(t))$

II Arcs paramétrés de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$)

A) Définitions

- On appelle arc paramétré de classe C^k de ε toute application $\psi : I \to \varepsilon$ de classe C^k définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. L'image $\Gamma = \psi(I)$ est le support de l'arc. ψ est une représentation paramétrique de Γ. On notera souvent $M(t)$ au lieu de $\psi(t)$.

Pour $t \in I$, $\psi(t)$ s'appelle point de paramètre t. Un point M du support admettant un unique paramètre est dit simple ; il est dit multiple dans le cas contraire (on parlera en particulier de points doubles, triples…) L'arc est dit simple si tous les points sont simples, c'est-à-dire si ψ est injective.

- Régularité :

Le paramètre t_0 est dit régulier si $\vec{\psi}'(t_0) \neq \vec{0} \in E$, non régulier ou stationnaire si $\vec{\psi}'(t_0) = \vec{0}$

Un arc dont tout paramètre est régulier est dit lui-même régulier.

Lorsque $k \geq 2$, le paramètre t_0 est dit birégulier si les deux premiers vecteurs dérivés $\vec{\psi}'(t_0)$ et $\vec{\psi}''(t_0)$ sont indépendants dans E ; il est dit non birégulier sinon.

- Branches infinies :

On dit que ψ présente une branche infinie lorsque t tend vers b (b étant une borne de I) lorsque pour $A \in \varepsilon$ et $\| \ \|$ norme quelconque de E, $\left\|\overrightarrow{A\psi(t)}\right\|$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to b$

B) Arcs équivalents, changement de paramètre, orientation

- Définition :

Deux arcs paramétrés de classe C^k $\psi_i : I_i \to \varepsilon$ ($i = 1,2$) sont dits C^k–équivalents lorsqu'il existe un C^k–difféomorphisme $\theta : I_1 \to I_2$ tel que $\psi_1 = \psi_2 \circ \theta$

Un tel θ s'appelle changement de paramètre admissible. On dit aussi que ψ_1 et ψ_2 sont deux paramétrages admissibles du même arc.

Propriétés :

(1) Deux arcs $\psi_i : I_i \to \varepsilon$ C^k–équivalents ont le même support Γ.

(2) $t_1 \in I_1$ est un paramètre régulier (resp. birégulier) de ψ_1 si et seulement si $t_2 = \theta(t_1)$ l'est pour ψ_2. $M \in \Gamma$ est simple pour ψ_1 si et seulement si il l'est pour ψ_2.

- Propriétés et éléments géométriques attachés au support :

Soit Γ le support d'un arc paramétré. On a vu ci-dessus que, pour $M \in \Gamma$, le caractère simple (resp. régulier) du paramètre M est invariant par changement de paramètre admissible ; on dit alors que M est un point simple ou régulier de Γ.

Plus généralement, l'étude et la description des arcs paramétrés consistent à déterminer les notions et sous-ensembles de ε inchangés (ou invariants) par changement de paramètre admissible : c'est le cas des caractères simple, régulier, birégulier ; c'est aussi celui de la tangente en un point simple, du plan osculateur, de la concavité (lorsque les quantités existent)…

- Orientation :

Deux paramétrages ψ, ρ admissibles d'un arc Γ sont dit de même orientation si $\rho = \psi \circ \theta$ où θ est croissant.

Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paramétrages admissibles de Γ. Cette relation admet exactement deux classes : si ψ est un paramétrage admissible de Γ, ces deux classes sont $C_1 = \{\psi \circ \theta, \theta \text{ croissant}\}$ et $C_2 = \{\psi \circ \theta, \theta \text{ décroissant}\}$.

Orienter Γ, c'est choisir l'une des deux classes. On appelle arc orienté un couple (Γ, C) où Γ est un arc et C l'une des deux classes.

On appelle paramétrage admissible direct de l'arc orienté (Γ, C) un paramétrage de Γ dont la classe est C. Un paramétrage de l'autre classe est dit indirect.

C) Interprétation géométrique : tangente, normale ou plan normal

Intuitivement :

La tangente au paramètre t_0 est la position limite, lorsqu'elle existe, de la droite $D(\psi(t_0),\psi(t))$ lorsque $t \to t_0$. On note alors cette droite $T_\psi(t_0)$. Plus précisément, dans un repère, c'est la droite passant par $\psi(t_0)$ de pente, lorsqu'elle existe, la limite pour $t \to t_0$ de la pente de $D(\psi(t_0),\psi(t))$. On notera que cette définition est indépendante du repère, et qu'en un paramètre t_0 il y a au plus une tangente et qu'on ne distingue pas les valeurs $\pm\infty$ des pentes.

Si $\psi(t_0)$ est un point simple du support, la tangente éventuelle en t_0 sera appelée tangente en $\psi(t_0)$. On notera qu'elle est invariante par changement de paramètre admissible. Autrement dit, la tangente ne dépend que du support et pas de la représentation paramétrique choisie.

Si ε est un plan euclidien (de dimension 2), la perpendiculaire en $\psi(t_0)$ à la tangente $T_\psi(t_0)$ s'appelle normale en t_0 (ou en $\psi(t_0)$ s'il est simple).

Si ε est un espace euclidien (de dimension 3), la perpendiculaire en $\psi(t_0)$ à la tangente $T_\psi(t_0)$ s'appelle plan normal en t_0 (ou en $\psi(t_0)$ s'il est simple)

Propriété :

Si t_0 est un paramètre régulier de l'arc paramétré de classe C^k $\psi : I \to \varepsilon$, $\psi(t_0)$ admet pour tangente en t_0 la droite passant par $\psi(t_0)$ dirigée par $\vec{\psi}'(t_0)$. Dans le cas d'une courbe plane, dans un repère quelconque $(O,\mathfrak{B})$, l'équation de la tangente est $\det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{\psi(t_0)M},\vec{\psi}'(t_0)) = 0$

D) Interprétation cinématique

Lorsqu'on identifie le paramètre t au temps, un arc paramétré ψ de classe C^k ($k \geq 2$) modélise le mouvement d'un point matériel. $\vec{\psi}'(t)$ est identifié au vecteur vitesse et $\vec{\psi}''(t)$ au vecteur accélération.

On a l'interprétation suivante du caractère stationnaire ou régulier :

Si à l'instant t_0 la vitesse est non nulle, le point continue son mouvement dans la direction du vecteur vitesse.

Si la vitesse s'annule en t_0, le point peut s'arrêter ou repartir dans une direction quelconque.

E) Position d'un arc par rapport à une droite (dimension 2) ou un plan (dimension 3)

Les propriétés suivantes sont invariantes par changement de paramètre admissible :

- Rappel : un hyperplan affine H de ε sépare ε en deux demi-espaces convexes. Si $\alpha:\varepsilon\rightarrow\mathbb{R}$ est une forme affine non constante telle que $\alpha(M)=0$ est une équation de H, les demi-espaces sont $\{M\in\varepsilon,\alpha(M)>0\}$ et $\{M\in\varepsilon,\alpha(M)<0\}$.
- Cas d'un point à distance finie :

Propriété :

Soit $\psi:I\rightarrow\varepsilon$ un arc paramétré de classe C^k ($k\geq 1$) et H un hyperplan de ε d'équation $\alpha(M)=0$ contenant $M_0=\psi(t_0)$.

(1) Si $\alpha(\psi(t))$ change de signe lorsque t passe par la valeur t_0, alors H traverse le support Γ de ψ en $\psi(t_0)$.

(2) Si $\alpha(\psi(t))$ ne change pas de signe lorsque t passe par la valeur t_0, alors H ne traverse pas le support Γ de ψ en $\psi(t_0)$. De plus, si t_0 est régulier, H contient $T_\psi(t_0)$ (égal si on est en dimension 2)

- Cas d'une branche infinie d'un arc plan :

Propriété, définition :

Ici, ε est un plan, H une droite et ψ,α comme ci-dessus. On suppose de plus que ψ présente une branche infinie lorsque $t\rightarrow b$ et que $\alpha(\psi(t))$ tend vers 0 lorsque $t\rightarrow b$. Alors H est asymptote à ψ (ou au support Γ) lorsque $t\rightarrow b$.

F) Etude au voisinage d'un point birégulier

On vérifiera que les notions et propriétés suivantes sont invariantes par changement de paramètre admissible de classe au moins C^2.

On suppose ici que ψ est un arc paramétré de classe C^k où $k\geq 2$ et que t_0 est un paramètre birégulier.

- Cas d'un arc plan : concavité.

On appelle concavité en $\psi(t_0)$ le demi-plan limité par la tangente et contenant la demi-droite issue de $\psi(t_0)$ dirigée par $\vec{\psi}''(t_0)$

Si $\mathfrak{B}$ est une base de E, un point $P\in\varepsilon$ est dans la concavité en $\psi(t_0)$ si et seulement si $\det_{\mathfrak{B}}(\overrightarrow{\psi(t_0)P},\vec{\psi}'(t_0))\times\det_{\mathfrak{B}}(\vec{\psi}''(t_0),\vec{\psi}'(t_0))\geq 0$

Si, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\psi(t)$ est le point de coordonnées $(x(t),y(t))$, la demi-droite issue de $\psi(t_0)$ dirigée par $\vec{j}$ est dans la concavité si et seulement si $x'(t_0)(x'(t_0)y''(t_0)-x''(t_0)y'(t_0))\geq 0$

- Cas d'un arc gauche (en dimension 3) : plan osculateur.

On appelle plan osculateur en $\psi(t_0)$ le plan contenant $\psi(t_0)$ et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{\psi}'(t_0)$ et $\vec{\psi}''(t_0)$ (t_0 est birégulier)

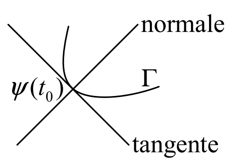
G) Etude au voisinage d'un point non birégulier

Propriété :

On suppose que, au voisinage de t_0, on a le développement

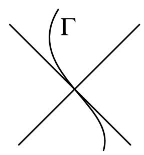
$\overrightarrow{\psi(t_0)\psi(t)} = \sum_{k=r}^{s}(t-t_0)^k V_k + o((t-t_0)^s)$ avec $1 \leq r < s$, $V_r \neq 0$, V_k colinéaire à V_r pour $k < s$ et V_s non colinéaire à V_r.

Alors ψ admet pour tangente en t_0 la droite dirigée par V_r et le support a, au voisinage de t_0, l'une des allures suivantes (invariantes par changement de variable admissible de classe au moins s) :



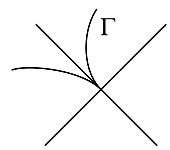
r impair, s pair

allure ordinaire



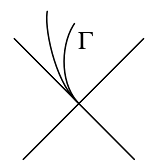
r impair, s impair

inflexion



r pair, s impair

rebroussement de première espèce



r pair, s pair

rebroussement de deuxième espèce

En effet :

Posons $M_0 = \psi(t_0)$. L'équation de la tangente est $\alpha(M) = 0$ et celle de la normale $\beta(M) = 0$ où $\alpha(M) = \det(\overrightarrow{M_0M}, V_r)$ et $\beta(M) = <\overrightarrow{M_0M}, V_r>$

Au voisinage de t_0, on a :

$\alpha(\psi(t)) = (t-t_0)^s \det(V_r, V_s) + o((t-t_0)^s)$ et $\beta(\psi(t)) = (t-t_0)^r \|v_r\|^2 + o((t-t_0)^r)$

Le signe de ces quantités, et donc la position de l'arc par rapport à chacune des droites, est donné par la parité de r et s.

H) Vecteur unitaire tangent et relèvement de l'angle polaire de la tangente

Théorème :

Soit ε un plan euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $\psi : I \to E$, arc paramétré régulier de classe C^k avec $k \geq 2$, il existe deux fonctions de classes C^{k-1} $v, \alpha : I \to \mathbb{R}$ telles que

$\forall t \in I, \vec{\psi}'(t) = v(t)(\cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j})$

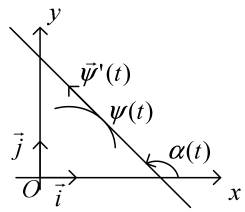
On a $v(t) = \|\vec{\psi}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$, $x'(t) = v(t)\cos\alpha(t)$, $y'(t) = v(t)\sin\alpha(t)$ et $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \tan\alpha(t)$

Démonstration :

On pose $\psi(t) = (x(t), y(t))$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{O\psi(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$)

Et $z(t) = x'(t) + iy'(t)$ alors $z : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^{k-1}, ne s'annulant pas. En posant $v(t) = |z(t)|$, il existe $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} tel que $\forall t \in I, z(t) = |z(t)|e^{i\alpha(t)}$

On a alors $\vec{\psi}'(t) = v(t)(\cos\alpha(t)\vec{i} + \sin\alpha(t)\vec{j})$



I) Plan et méthode d'étude d'un arc paramétré plan

On suppose que le plan ε est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on étudie l'arc paramétré $\psi : t \in I \mapsto M(t)$ où $M(t)$ a pour coordonnées $(x(t), y(t))$

- Plan :

On étudie :

- Le domaine de définition, le domaine d'étude et les symétries éventuelles.

S'il existe une transformation simple F telle que $\forall t, M(t+T) = F(M(t))$, on prendra pour T la plus petite valeur possible et on restreindra l'étude à $[A, A+T]$ où A est déterminé ultérieurement en fonction d'autres réductions éventuelles.

S'il existe une transformation simple G telle que $\forall t, M(a-t) = G(M(t))$, on restreindra l'intervalle d'étude à $D \cap \left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$ ($\frac{a}{2}$ est le point fixe de $a \mapsto t-a$)

- Les variations de x et y, les branches infinies
- Les points non biréguliers (penser à utiliser la pente $m(t)$) et les points multiples, éventuellement la concavité.
- Ne pas oublier de tracer la courbe.

- Passage à l'affixe

Lorsque x et y font intervenir des expressions trigonométriques, on a parfois intérêt à poser $z(t) = x(t) + iy(t)$

On a alors aisément les rotations et similitudes de centre O fixant l'arc, les coordonnées polaires $r(t) = |z(t)|$, $\theta(t) = \mathrm{Arg}(z(t))\ [\pi]$…

- Utilisation de $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

- En un paramètre régulier t_0 :

$m(t_0) \in \mathbb{R}$ est la pente de la tangente.

De plus, t_0 est non birégulier si et seulement si $m'(t_0) = 0$. Alors le point est soit d'allure ordinaire, soit d'inflexion (puisqu'on a ici $r = 1$)

- Pour un paramètre t_0 régulier, un point A est dans la concavité si et seulement si $\det\begin{pmatrix} x_A - x(t_0) & x'(t_0) \\ y_A - y(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} x''(t_0) & x'(t_0) \\ y''(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} \geq 0$.

La concavité est tournée vers les y positifs si et seulement si $x'(t_0)m'(t_0) \geq 0$

- Si t_0 est stationnaire et si $\lim\limits_{t \to t_0} m(t) = m_0 \in \mathbb{R}$, alors l'arc a pour tangente en t_0 la droite de pente m_0.

- Utilisation de développements :
- On a vu en G) comment un développement peut donner la tangente et l'allure locale.

- Si ψ présente une branche infinie pour $t \to t_0$ et si, pour $(a,b) \neq (0,0)$, $ax(t)+by(t) = c + d(t-t_0)^n + o((t-t_0)^n)$, alors $ax+by=c$ est asymptote et la position de l'arc par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $d \neq 0$.

III Courbes en polaires

A) Coordonnées polaires d'un point, représentation d'un arc

ε désigne ici un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ que l'on pourra identifier au plan complexe en associant à M de coordonnées (x,y) son affixe $z = x+iy$.

- Définition et principales propriétés :

Soit M de coordonnées (x,y). On appelle couple de coordonnées polaires de M tout couple (r,θ) tel que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Propriétés :

(1) Soient M, M' de coordonnées polaires respectives (r,θ), (r',θ'). On a $M = O$ si et seulement si $r = 0$ et pour M, M' distincts de O,

$M = M' \Leftrightarrow ((r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [2\pi]) \text{ ou } (r = -r' \text{ et } \theta = \theta'+\pi \ [2\pi]))$

(2) Soit F la transformation qui à M de coordonnées polaires (r,θ) associe M' de coordonnées polaires (r',θ').

Si $r' = r$ (resp. $r' = -r$) et $\theta' = \theta + a_0$, F est la rotation de centre O d'angle α_0 (resp. $\alpha_0 + \pi$)

Si $r' = r$ (resp. $r' = -r$ et $\theta' = -\theta + a_0$, F est la réflexion par rapport à l'ensemble des invariants, qui est la droite d'angle polaire $a_0/2$ (resp. $a_0/2 + \pi/2$)

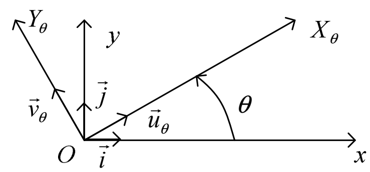
- Courbes en coordonnées polaires :

Soit ε un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal. Tout arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) de ε ne passant pas par l'origine a une représentation de la forme $t \mapsto M(t)$ de coordonnées $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$ où r et θ sont des applications de classe C^k.

- Repère mobile :

On considère le repère orthonormal direct mobile :

$R_\theta = (O,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ où $\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$



Si les coordonnées de M dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont (x,y) et si ses coordonnées polaires sont (r,θ), alors ses coordonnées dans R_{θ_0} sont (X,Y) où

$X = r\cos(\theta-\theta_0) = \langle \overrightarrow{OM}, \vec{u}_{\theta_0} \rangle = \cos\theta_0 x + \sin\theta_0 y$

$Y = r\sin(\theta-\theta_0) = \langle \overrightarrow{OM}, \vec{v}_{\theta_0} \rangle = -\sin\theta_0 x + \cos\theta_0 y$

B) Etude d'un arc donné en coordonnées polaires

- Vecteur dérivé et dérivé seconde dans le repère mobile.

Soit l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ de coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ (assez souvent, on aura $\theta = t$).

Propriété :

Pour un arc paramétré de classe au moins C^2, on a $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_{\theta(t)}$,

$\vec{M}'(t) = r'(t)\vec{u}_{\theta(t)} + r(t)\theta'(t)\vec{v}_{\theta(t)}$

et $\vec{M}''(t) = (r''(t) - r(t)\theta'(t)^2)\vec{u}_{\theta(t)} + (2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t))\vec{v}_{\theta(t)}$

En particulier, t_0 est stationnaire si et seulement si $r'(t_0) = r(t_0)\theta'(t_0) = 0$.

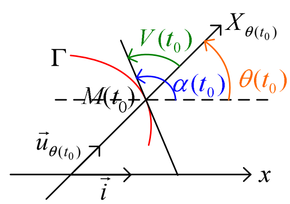
Si $\theta = t$, l'origine est le seul point éventuellement stationnaire.

Si $M(t_0)$ est l'origine et si t_0 est régulier, la tangente en t_0 (ou en *O*) est la droite d'angle polaire $\vec{u}_{\theta(t)}$.

- L'angle *V*, c'est l'angle entre $M'(t)$ et l'axe $(O, \vec{u}_\theta)$. Lorsque l'arc est régulier de classe C^k, on peut choisir une détermination de classe C^{k-1} de *V* et on a (avec les notations usuelles) :

$\alpha(t) = \theta(t) + V(t)$, $v(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{r^2(t)\theta'^2(t) + r'^2(t)}$,

$\cos V(t) = \frac{r'(t)}{v(t)}$, $\sin V(t) = \frac{r(t)\theta'(t)}{v(t)}$, $\tan V(t) = \frac{r(t)\theta'(t)}{r'(t)}$



- Points biréguliers, concavité : on suppose ici $\theta = t$.

D'après **II**-F), le point *O* est dans la concavité du point de paramètre birégulier θ si et seulement si $\det(\overrightarrow{OM}(\theta), \vec{M}'(\theta))\det(\vec{M}'(t), \vec{M}''(\theta)) \geq 0$

Le calcul des déterminants dans le repère mobile R_θ donne que *O* est dans la concavité si et seulement si $r^2 + 2r'^2 - rr' \geq 0$ ou, en posant $c = 1/r$, si et seulement si $c(c'' + c) \geq 0$

- Plan d'étude :

L'étude doit contenir les points suivants :

- Domaine de définition, d'étude et symétries éventuelles
- Le signe de $r(t)$ et la/les tangente(s) éventuelles en *O*.
- L'étude des branches infinies :

Si *r* tend vers $r_0 \in \mathbb{R}$ et θ tend vers $\pm\infty$, la branche infinie admet le cercle de centre *O* et de rayon $|r_0|$ comme asymptote.

Si *r* et θ tendent vers $\pm\infty$, la branche infinie est une branche spirale.

Si *r* tend vers $\pm\infty$ et θ tend vers $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la branche infinie admet comme direction asymptotique la direction d'angle polaire θ_0 ; si de plus $r\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers $p \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $Y = p$ dans le repère mobile R_θ est asymptote.

- Recherche des points multiples autres que *O*.