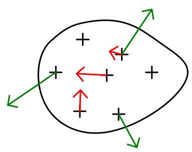
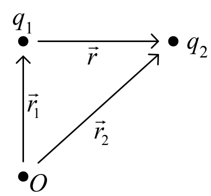
Chapitre 5 : Energie électrostatique



Objectif :
Energie propre du système : énergie potentielle des forces intérieures
Energie d'interaction avec l'extérieur : énergie potentielle des forces extérieures.

I Energie propre d'un système de charges électrostatiques

A) Système de deux charges ponctuelles



On prend le système constitué de q_1 et q_2.

On a deux forces intérieures : $\vec F_{1\to 2}$, $\vec F_{2\to 1}$

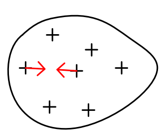
On a un travail électrostatique $\delta W_{ES} = \vec F_{1\to 2}\cdot d\vec r_2 + \vec F_{2\to 1}\cdot d\vec r_1 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec r}{r^3}\cdot(\underbrace{d\vec r_2 - d\vec r_1}_{d\vec r})$

Soit $\delta W_{ES} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec r\cdot d\vec r}{r^3} = -d\left(\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$

On a donc une énergie potentielle $U_{ES} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (à une constante additive près)

On a de plus $V_1 = V_{2\to 1} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc $U_{ES} = q_1 V_1 = q_2 V_2 = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$

B) Système de plusieurs charges ponctuelles



On note $U_{i,j} = q_i V_{j\to i}$. On a alors $\sum_j U_{i,j} = q_i \sum_j V_{j\to i} = q_i V_i$

Donc $\sum_i \sum_j U_{i,j} = \sum_i q_i V_i$

Soit $\boxed{U_{ES} = \dfrac{1}{2}\sum_i q_i V_i}$. (Les potentiels ont été comptés deux fois)

C) Conducteur seul dans l'espace

On considère un conducteur, de charge Q et de potentiel V.

1) Méthode 1

On fractionne la charge en charges élémentaires :

$$\boxed{U_{ES} = \frac{1}{2}\oiint dqV = \frac{1}{2}VQ}$$

2) Méthode 2

- Principe :

On a $dU_{ES} = -\delta W_{ES}$.

On prend initialement le conducteur non chargé, et on apporte de l'infini des charges pour le charger.

Ainsi, $\Delta U_{ES} = -W_{ES}$, ou $U_{ES} = -W_{ES}$ (en prenant un potentiel nul à l'infini)

Ainsi, q varie de 0 à Q, v de 0 à V.

- On travaille quasi-statiquement, et on néglige l'influence de dq sur le conducteur.

Ainsi, on peut considérer que le conducteur est seul dans l'espace et $q = Cv$.

Si on note $q = Qx$ pour $x \in [0;1]$ (paramètre de charge), on aura $v = Vx$.

- On a $d\vec{F} = dq.\vec{E}$

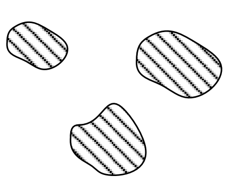
Donc $\delta W = \int_{+\infty}^{\text{cond}} dq\vec{E}\cdot d\vec{l} = dq\int_{+\kappa}^{\text{cond}} -dV = dq(V_\infty - V_{\text{cond}}) = -dq.v$

Soit $W = -\int_{x=0}^{1} Vx.d(Qx) = -QV\int_0^1 xdx = -\frac{1}{2}QV$

- Il y a aussi des forces électrostatiques des charges entre elles, mais elles ne travaillent pas lorsque ces charges se déplacent : les charges vont se déplacer sur la surface, et sur cette surface le champ est normal à la surface, donc au déplacement.

Ainsi, $U_{ES} = -W = \frac{1}{2}QV$

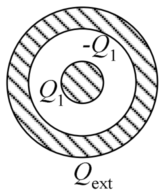
D) Système de conducteurs seuls dans l'espace



On aura de même pour un système de conducteurs $U_{ES} = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$.

On peut aussi appliquer la deuxième méthode pour le montrer, en prenant le même paramètre de charge pour tous les conducteurs.

E) Condensateur



On a $U_{ES}=\frac{1}{2}Q_1V_1+\frac{1}{2}Q_2V_2+\frac{1}{2}Q_{\text{ext}}V_2=\frac{1}{2}Q_1(V_1-V_2)+\frac{1}{2}Q_{\text{ext}}V_2$

On définit l'énergie potentielle pour un condensateur :

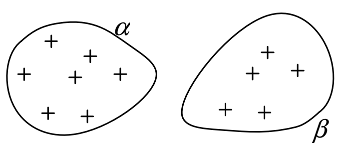
$$\boxed{U_{ES,C}=\frac{1}{2}Q_1(V_1-V_2)=\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C}=\frac{1}{2}C(V_1-V_2)^2}$$

Il y a une énergie potentielle d'interaction entre les charges intérieures et extérieures :

Si on considère un conducteur avec la même forme mais plein, on aurait $U_{ES}=\frac{1}{2}Q_{\text{ext}}V_2$, et donc ici $U_{ES}=U_{ES,C}+\frac{1}{2}Q_{\text{ext}}V_2$, donc il n'y a globalement pas d'énergie potentielle d'interaction

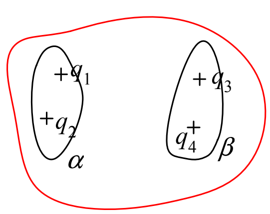
(Il y a quand même séparément pour les charges Q_1 et Q_2 des énergies potentielles d'interaction avec l'extérieur)

II Energie d'interaction de deux systèmes électrostatiques



On considère ici $\vec{F}_{\alpha\to\beta}$, $\vec{F}_{\beta\to\alpha}$

A) Exemple



Pour le système constitué de α et β :

$$U_{ES}=\frac{1}{2}(q_1V_{2\to1}+q_1V_{3\to1}+q_1V_{4\to1}+q_2V_{1\to2}+q_2V_{3\to2}+q_2V_{4\to2}$$
$$+q_3V_{1\to3}+q_3V_{2\to3}+q_3V_{4\to3}+q_4V_{1\to4}+q_4V_{2\to4}+q_4V_{3\to4})$$

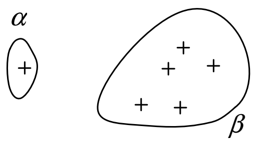
Soit en regroupant : $U_{ES}=U_\alpha+U_\beta+U_{\alpha\beta}$

Avec $U_\alpha=\frac{1}{2}(q_1V_{2\to1}+q_2V_{1\to2})$, $U_\beta=\frac{1}{2}(q_3V_{4\to3}+q_4V_{3\to4})$

Et $U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(2q_1V_{3\to1} + 2q_1V_{4\to1} + 2q_2V_{3\to2} + 2q_2V_{4\to2})$

Ou $U_{\alpha\beta} = q_1V_{\beta\to1} + q_2V_{\beta\to2} = q_3V_{\alpha\to3} + q_4V_{\alpha\to4}$

B) Energie d'une charge ponctuelle dans un potentiel extérieur



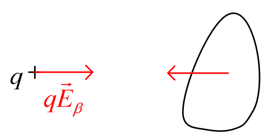
On note V le potentiel créé par les charges dans β.

1) Méthode 1

On a $U_{ES} = U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}qV_{\beta\to q} + \frac{1}{2}\sum_{i\in\beta} q_iV_{q\to\beta} = qV_{\beta\to q}$

Soit $\boxed{U_{ES} = qV}$

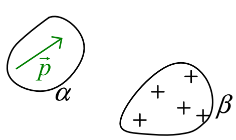
2) Méthode 2



$dU_{ES} = -\delta W_S = -q\vec{E}\cdot d\vec{l} = d(qV)$

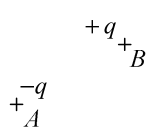
III Energie d'un dipôle dans un champ extérieur

A) Dipôle permanent



On suppose qu'on connaît le champ créé par β, et qu'on a $\|\vec{p}\| = $ cte

1) Expression de U_{ES}.



On a

$U_{ES} = U_{AB} = -qV(A) + qV(B) = q(V(B) - V(A)) = q(-\overrightarrow{AB}\cdot\vec{E})$

Soit $\boxed{U_{ES} = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$

2) Actions sur le dipôle

- Résultante :

Pour une petite translation du dipôle,

$$\left.\begin{aligned}\delta W_{ES} &= \vec{F}\cdot d\vec{l} \\ &= -dU_{ES}\end{aligned}\right\}\forall d\vec{l}$$

Donc $\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{ES} = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E})$

- Moment :

Pour une petite rotation du dipôle :

$$\left.\begin{aligned}\delta W_{ES} &= M_{\Delta}d\theta \\ &= -dU_{ES}\end{aligned}\right\}$$ (rotation d'axe $(O,\vec{u})$ où O est le centre du dipôle)

Donc $M_{\Delta}d\theta = d(\vec{p}\cdot\vec{E})$

Au cours de la rotation, $\vec{E}$ ne varie pas.

Donc $d(\vec{p}\cdot\vec{E}) = \vec{E}\cdot d\vec{p}$

On a $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{p} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}\wedge\vec{p}$ (mouvement de précession)

Donc $d\vec{p} = d\theta.\vec{u}\wedge\vec{p}$

Et $M_{\Delta} = \vec{E}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{p}) = (\vec{p}\wedge\vec{E})\cdot\vec{u} \quad ,\forall\vec{u}$

Donc $\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E}$

Remarque :

Pour un mouvement quelconque, $\delta W_{ES} = -dU_{ES} = d(\vec{p}\cdot\vec{E}) = \underbrace{\vec{p}\cdot d\vec{E}}_{\text{résultante}} + \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{p}}_{\text{moment}}$

3) Bilan énergétique

On a $\delta W_{op} = dU_{ES} = \underbrace{dU_{\alpha}}_{=0} + \underbrace{dU_{\beta}}_{=0} + dU_{\alpha\beta}$

(On travaille quasi statiquement donc il n'y a pas d'énergie cinétique, et on suppose que β ne change pas)

B) Dipôle induit

1) Polarisabilité

On suppose que $\vec{p} = \alpha\vec{E}$

2) Actions sur le dipôle

- Résultante :

$\vec{F} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E} = \alpha\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\alpha\vec{E}^2) = \vec{\nabla}(\tfrac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E})$

- Moment :

On a $\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E} = \vec{0}$

3) Energie potentielle

Définition : on pose $\boxed{U_{ES} = -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}}$, énergie potentielle du dipôle induit dans le champ $\vec{E}$.

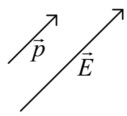
Remarque :

Pour un dipôle permanent, on avait $U_{ES} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

Pour un dipôle induit, $U_{ES} = -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}$

Problème :

On considère le cas suivant :



Quelle est l'énergie potentielle du dipôle ? Autrement dit, à quel dipôle a-t-on à faire ici ?

L'état électrostatique est en effet le même dans les deux cas.

En fait, il faut retenir que c'est la *variation* d'énergie potentielle qui a un sens physique, et il faut donc faire une transformation sur le système pour savoir si le dipôle est induit ($\vec{p}$ reste alors colinéaire à $\vec{E}$) ou s'il est permanent ($\|\vec{p}\| = \text{cte}$).

4) Bilan énergétique

On a :

$$\delta W_{op} = dU_{ES} = \underbrace{dU_{\alpha}}_{\neq 0} + \underbrace{dU_{\beta}}_{=0} + \underbrace{dU_{\alpha\beta}}_{\neq 0}$$

Donc $dU_{ES} = dU_{\alpha} + dU_{\alpha\beta}$

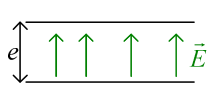
Comme $dU_{ES} = d(-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E})$, $dU_{\alpha\beta} = d(-\vec{p}\cdot\vec{E})$

On a $dU_{\alpha} = d(\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E})$

(On peut montrer ce résultat autrement, en modélisant le dipôle par un ressort $\frac{1}{2}kAB^2$)

IV Localisation de l'énergie

A) Cas d'un condensateur plan



On a $U_{ES} = \dfrac{1}{2}CV^2$, et $V = E\times e \left(= \int \vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$

Donc $U_{ES} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{e}e^2E^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Se = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 v$

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ correspond ainsi en quelque sorte à une densité volumique d'énergie.

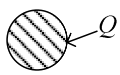
B) Postulat

Pour une masse ponctuelle animée d'une vitesse v, on considère que son énergie cinétique est localisée sur la particule qu'en est il par exemple pour un système de deux charges électriques ?

Postulat :

- De l'énergie électrostatique est présente partout où il y a du champ électrique (correspond à une « énergie du vide »)
- Un volume élémentaire $d\tau$ a une énergie $dU_{ES} = u_{ES} d\tau$ où $\boxed{u_{ES} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$.

C) Exemple : conducteur sphérique



Si $r < R$, $\vec{E} = \vec{0}$

Si $r > R$, $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

On a $U_{ES} = \dfrac{1}{2}QV$, et $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ Donc $U_{ES} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Et le même calcul avec le postulat :

$$U_{ES} = \iiint_{\text{espace}} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^{+\infty} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} 4\pi . r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

D) Energie propre et énergie d'interaction de deux systèmes α, β.

On a $\vec{E} = \vec{E}_\alpha + \vec{E}_\beta$

Donc $u_{ES} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_\alpha^2}_{u_\alpha} + \underbrace{\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_\beta^2}_{u_\beta} + \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}_\alpha \cdot \vec{E}_\beta}_{u_{\alpha\beta}}$

E) Energie d'un ensemble de charges ponctuelles

Paradoxe :

Si on prend un ensemble de charges $\{q_i\}$, on a :

$U_{ES} = \sum \frac{1}{2} q_i V_i \lessgtr 0$

Mais d'autre part $U_{ES} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 d\tau > 0$

Levée du paradoxe :

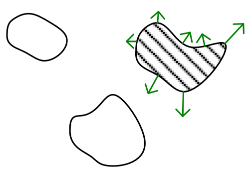
Dans la deuxième formule, on a même $U_{ES} = +\infty$, car le champ est divergent sur les charges ponctuelles.

En fait, la deuxième formule ajoute une « constante » infinie, à savoir l'énergie propre de chaque charge ponctuelle, d'où le fait qu'elle est toujours positive.

Lorsqu'on calcule une différence de potentiel, cette constante n'intervient plus.

V Actions électrostatiques sur un conducteur : calcul par le théorème des travaux virtuels

A) Principe



On a une pression électrostatique qui s'exerce sur le conducteur, qui n'est pas forcément nulle.

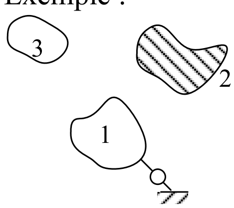
On cherche à savoir la force s'exerçant sur le dipôle.

Pour cela, on imagine un petit déplacement, et on regarde le travail qu'il faut alors fournir.

1) Déplacement virtuel à charges constantes

On maintient tous les autres conducteurs fixes, et tous les conducteurs gardent une *charge* constante.

Exemple :



Le déplacement de 2 ne se fera pas à charge constante pour le conducteur 1, puisque lorsque 2 va bouger, le potentiel va changer et il y aura un échange de charge. 3 et 2 resteront eux à charge constante.

- Bilan énergétique :

On a $\begin{cases} \delta W_{op} = dU_{ES} \\ \delta W_{op} = -\delta W \end{cases}$

Où δW est le travail du torseur des actions s'exerçant sur le conducteur.

Donc $\delta W = -dU_{ES}$.

- Résultante :

Pour une translation de dx le long de Ox :

$\delta W = F_x dx$, donc $F_x = -\dfrac{\partial U_{ES}}{\partial x}$, ou $\boxed{F_x = -\left(\dfrac{\partial U_{ES}}{\partial x}\right)_{y,z,q_i}}$

- Moment :

Pour une rotation autour de Δ :

$\delta W = M_\Delta d\theta = -dU_{ES}$

Donc $\boxed{M_\Delta = -\left(\dfrac{\partial U_{ES}}{\partial \theta}\right)_{q_i}}$

2) Déplacement à potentiels constants

On suppose ici que tous les potentiels restent constants dans chaque conducteur. (la charge peut varier)

- Bilan :

Il faut prendre ici en compte le travail des générateurs pour maintenir le potentiel :

$dU_{ES} = \delta W_{op} + \delta W_{\text{géné}}$

On a $U_{ES} = \sum \frac{1}{2} q_i V_i$. Donc $dU_{ES} = \sum \frac{1}{2} dq_i V_i$

Et $\delta W_{\text{géné},i} = (V_i - 0) dq_i$, soit $\delta W_{\text{géné}} = \sum dq_i V_i = 2dU_{ES}$

D'où $-dU_{ES} = \delta W_{op}$

- Résultante :

$\boxed{F_x = \dfrac{\partial U_{ES}}{\partial x}}$

- Moment :

$\boxed{M_\Delta = \dfrac{\partial U_{ES}}{\partial \theta}}$

3) Discussion

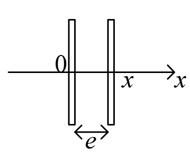
La relation $dU_{ES} = -\delta W_{ES}$ est toujours valable (c'est la définition de U_{ES}), et prend en compte le travail de toutes les forces électrostatiques.

Pour un déplacement à charges constantes, δW_{ES} se réduit au travail de la force qu'on veut calculer (F_x, M_Δ), puisque les charges qui se déplacent dans les conducteurs on un mouvement orthogonal aux forces s'exerçant sur elles.

A potentiel constant, δW_{ES} devient le travail des forces à calculer plus celui dû à l'ajout de charges par le générateur.

B) Application

1) Force exercée sur une armature d'un condensateur plan



On cherche la force exercée sur l'armature 2.

- Pression électrostatique :

On a $P=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$

Donc $\vec{F}_2=-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}S\vec{u}_x=-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\vec{u}_x$

- Déplacement virtuel à charge constante :

On déplace 2 en gardant 1 fixe :

$F_x=-\dfrac{\partial U_{ES}}{\partial x}$, et $U_{ES}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}x$

On retrouve alors $F_x=-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

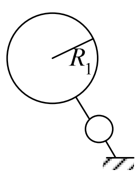
- Déplacement virtuel à potentiels constants :

On a $F_x=\dfrac{\partial U_{ES}}{\partial x}$. Mais ici, $U_{ES}=\dfrac{1}{2}CV^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}V^2$,

Donc $F_x=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{x^2}V^2$, et $V=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{Qx}{\varepsilon_0 S}$

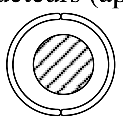
VI Compléments

A) Hémisphères de Cavendish



On charge la boule au potentiel V_0

On retire ensuite le générateur, et on place autour de la boule deux hémisphères conducteurs (appelés hémisphères de Cavendish) :



Et on charge les deux hémisphères jusqu'au potentiel V_2.

Ensuite, on les démonte et on les remonte à une distance infinie de la boule.

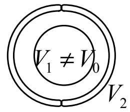
1) Potentiels

- Etat initial :

On a $Q_1=4\pi\varepsilon_0 R_1 V_0$

Et $Q_{2,e}=4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2$, $Q_{2,i}=-Q_1$.

Après avoir chargé les hémisphères et retiré le générateur :



On a $V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q_{2,e}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

- Etat final :

La boule est de nouveau isolée, donc a un potentiel $V'_1 = V_0$

Pour les deux hémisphères :

On a $Q'_{2,i} = 0$ (théorème de Gauss)

Et donc $Q'_{2,e} = Q_{2,e} + Q_{2,i}$

$V'_2 = \dfrac{Q'_{2,e}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \ldots = V_2 - \dfrac{R_1}{R_2} V_0$

2) Travail de l'opérateur

Lorsque l'opérateur réalise le démontage et remontage des hémisphères, il n'y a plus de générateurs.

Donc $W_{op} = \Delta U_{ES}$

On a $U_{ES,i} = \sum \frac{1}{2} q_i V_i = \frac{1}{2}(Q_{2,e} + Q_{2,i}) V_2 + \frac{1}{2} Q_1 V_1$

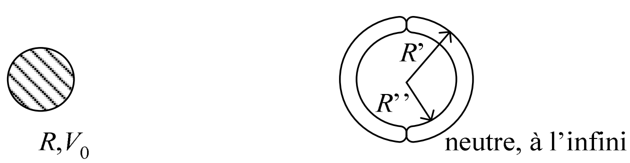
Et $U_{ES,f} = \frac{1}{2}(Q_{2,e} + Q_{2,i}) V'_2 + \frac{1}{2} Q_1 V_0$

Donc après calcul : $W_{op} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_0 \left(\dfrac{R_1}{R_2} V_0 - V_2 \right)$

Remarque :

Selon le potentiel imposé, on peut avoir un travail moteur ou résistant.

B) Sphère entourée de deux hémisphères



On amène les deux hémisphères jusqu'à la sphère, de façon à l'entourer, de plusieurs façons différentes.

1) Sphère et hémisphères isolés

- Travail de l'opérateur :

On a $W_{\text{op}} = \Delta U_{ES} = U_{ES,f} - U_{ES,i}$, avec $U_{ES} = \dfrac{1}{2} \sum Q_i V_i$

Initialement : $U_{ES,i} = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 R V_0^2 + 0$

Finalement :

Le conducteur intérieur est toujours isolé, donc la charge Q reste constante.

Ainsi, à l'intérieur des hémisphères, on a une charge $-Q$, et à l'extérieur une charge Q.

En faisant le calcul au centre, on obtient dans l'état final un potentiel pour la sphère :

$$V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)$$

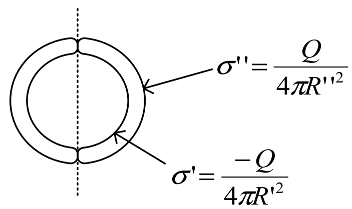
Pour les hémisphères, l'énergie est globalement nulle ($\frac{1}{2}QV + \frac{1}{2}(-Q)V = 0$)

On a donc une énergie dans l'état final :

$$U_{ES,f} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)$$

Et on doit donc fournir un travail $W_{op} = \frac{1}{2}Q_0V_0R\left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R'}\right) < 0$ (résistant)

- Force entre les armatures dans l'état final :



Force de pression : par symétrie, c'est la même que sur la surface projetée sur le plan en pointillés :

$$F_x = +\frac{\sigma''^2}{2\varepsilon_0}\pi R''^2 - \frac{\sigma'^2}{2\varepsilon_0}\pi R'^2 = \frac{Q_0^2}{32\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R''^2} - \frac{1}{R'^2}\right) < 0$$

On a donc une force globalement attractive.

2) Sphère maintenue au potentiel V_0, hémisphères isolés

On a $\Delta U_{ES} = W_{op} + W_{\text{géné}}$

Dans l'état initial, $U_{ES,i} = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 R V_0^2 + 0$

Dans l'état final, $U_{ES,f} = \frac{1}{2}\sum Q_i V_i = \frac{1}{2}Q_0'V_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_0'^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)$

Où Q_0' est la charge portée par la sphère

De plus, $W_{\text{géné}} = (Q_0' - Q_0)V_0$

D'où on tire W_{op} …

3) Sphère maintenue au potentiel V_0, hémisphères au potentiel nul

- On a $\Delta U_{ES} = W_{op} + W_{\text{géné},1} + W_{\text{géné},2}$
- $U_{ES,i} = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 R V_0^2$
- $U_{ES,f}$:

A l'extérieur, on a un problème de Dirichlet, dont la solution est $V = 0$
Il n'y a donc pas de charges à l'extérieur.

Donc $U_{ES,f} = \frac{1}{2}\sum Q_i V_i = \frac{1}{2}Q_0''V_0$

De plus, $V_0 = \frac{Q_0''}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$ (calcul au centre)

D'où ensuite Q_0'', $U_{ES,f}\ldots$

- Pour les générateurs, on a $W_{\text{géné},1} = (Q_0''-Q_0)V_0$, $W_{\text{géné},2} = 0$