

# Chapitre 19 : Propagation guidée

## Introduction

### A) Principe du guidage

On veut imposer à l'onde de se déplacer dans un espace limité

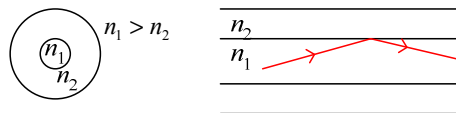
### B) Différents types de guide

Les guides dépendent généralement de la pulsation

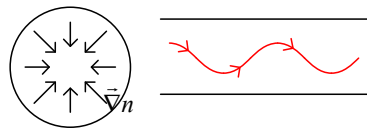
#### 1) Ondes optiques

On a les fibres optiques :

- A saut d'indice :

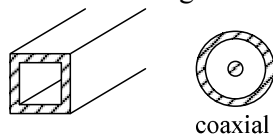


- A gradient d'indice :



#### 2) Ondes hertziennes

On utilise des guides métalliques, et un milieu de propagation diélectrique :



### C) Hypothèses simplificatrices

On suppose que  $\epsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$ .

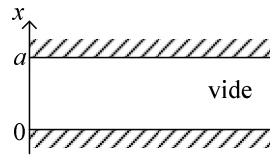
On suppose aussi que le métal est parfait ( $\sigma = +\infty$ )

Ainsi, il n'y a pas de dissipation d'énergie ; dans le métal, on aura  $\vec{E} = \vec{0}$  (car le conducteur est parfait),  $\vec{B} = \vec{0}$  (statique en fait), et au voisinage  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$

# I Propagation entre deux plans parallèles infinis

## A) Hypothèses de travail

### 1) Plans conducteurs



On suppose que les plans conducteurs sont infinis, et que ce sont des conducteurs parfaits.

### 2) Onde propagée

- Elle satisfait l'équation d'onde classique
- On a des conditions aux limites imposées par les plans et la source.

On cherche ici si on peut avoir des ondes de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(x)e^{i(kz-\omega t)}), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\vec{B}}(x)e^{i(kz-\omega t)})$$

C'est-à-dire des ondes sinusoïdales (par rapport à  $\omega$ ), se propageant selon  $Oz$ , avec  $k = \alpha + i\beta$

Attention : Ici, on n'a pas des ondes planes.

## B) Mise en équation

### 1) Formalisme complexe

- Pour les champs :

$$\vec{E}(x, z, t) \rightarrow \underline{\vec{E}}(x), \quad \vec{B}(x, z, t) \rightarrow \underline{\vec{B}}(x).$$

- Pour les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \vec{\nabla} \rightarrow \frac{d}{dx}\vec{u}_x + ik\vec{u}_z$$

### 2) Equations de Maxwell

$$\text{Maxwell-Gauss} : \frac{d\underline{E}_x}{dx} + ik\underline{E}_z = 0 \quad (1)$$

$$\text{Maxwell-Flux} : \frac{d\underline{B}_x}{dx} + ik\underline{B}_z = 0 \quad (2)$$

$$\text{Maxwell-Faraday} : \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ 0 \\ ik \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = i\omega\underline{\vec{B}}, \text{ soit } \begin{cases} -k\underline{E}_y = \omega\underline{B}_x & (3.1) \\ ik\underline{E}_x - \frac{d\underline{E}_z}{dx} = i\omega\underline{B}_y & (3.2) \\ \frac{d\underline{E}_y}{dx} = i\omega\underline{B}_z & (3.3) \end{cases}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \begin{cases} k \underline{B}_y = \frac{\omega}{c^2} \underline{E}_x & (4.1) \\ ik \underline{B}_x - \frac{d\underline{B}_z}{dx} = -i \frac{\omega}{c^2} \underline{E}_y & (4.2) \\ \frac{d\underline{B}_y}{dx} = -i \frac{\omega}{c^2} \underline{B}_z & (4.3) \end{cases}$$

### 3) Equation d'onde

On a avec les opérateurs :  $\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ , soit  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

Donc pour les champs :

$$\frac{d^2 \vec{E}_x}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}_x = 0, \quad \frac{d^2 \vec{B}_x}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B}_x = 0 \quad (\text{et la même chose pour}$$

les autres coordonnées)

### 4) Conditions aux limites

En  $x=0$  et  $x=a$ , on a  $\vec{E}_T = \vec{0}$ , soit :

$$\underline{E}_y(0) = \underline{E}_y(a) = 0 \quad (\text{CL1})$$

$$\text{Et } \underline{E}_z(0) = \underline{E}_z(a) = 0 \quad (\text{CL2})$$

$$\text{On a aussi } \vec{B}_N = \vec{0}, \text{ soit } \underline{B}_x(0) = \underline{B}_x(a) = 0 \quad (\text{CL3})$$

(Remarque : avec (3.1), les conditions 1 et 3 sont équivalentes)

## C) Ondes transverses électromagnétiques (TEM)

On cherche si on peut avoir des ondes transverses électromagnétiques, c'est-à-dire  $\underline{E}_z = 0$  et  $\underline{B}_z = 0$  pour tout  $x$ .

### 1) Structure de l'onde transverse électromagnétique

L'équation (1) donne alors  $\underline{E}_x = \text{cte}$ , et (2) donne  $\underline{B}_x = \text{cte}$ . Mais avec la condition (CL3), on a  $\underline{B}_x = 0$

$$\text{Ainsi, } \vec{B} = \underline{B}_y(x) \vec{u}_y$$

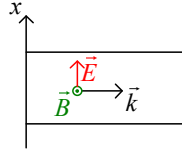
$$\text{Avec (3.1), on a alors } \underline{E}_y = 0, \text{ donc } \vec{E} = \underline{E} \vec{u}_x \quad (\underline{E} = \underline{E}_x = \text{cte})$$

$$\text{Avec (3.2), on a } \underline{B}_y = \frac{k}{\omega} \underline{E}$$

$$\text{Et avec (4.1), } \underline{B}_y = \frac{\omega}{kc^2} \underline{E}$$

$$\text{Donc } \underline{B}_y = \frac{1}{c} \underline{E}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{B} = \underline{B}_y \vec{u}_y = \underline{B} \vec{u}_y \quad \text{avec } \underline{B} = \frac{1}{c} \underline{E}$$



On a ainsi une structure d'OPPS dans le vide.

## 2) Propagation

- Relation de dispersion :

Encore avec (3.2) et (4.1), on a  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , soit  $k = \frac{\omega}{c}$

- Propagation :

On a  $k \in \mathbb{R}$ , donc il n'y a pas d'atténuation.

Et  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$ , donc il n'y a pas non plus de dispersion.

## 3) Charges et courants superficiels

- Charges :

En  $x=0$  et  $x=a$  :  $\underline{\underline{E}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\epsilon_0} \underline{\underline{n}}$

Donc en  $x=0$ ,  $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{u}}_x$  et  $\underline{\underline{\sigma}} = \epsilon_0 \underline{\underline{E}}$

Soit  $\underline{\underline{\sigma}} = \text{Re}(\underline{\underline{\sigma}} e^{i(kz - \omega t)}) = \epsilon_0 E \cos(\omega t - kz)$

En  $x=a$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}(a) = -\underline{\underline{\sigma}}(0)$

- Courants :

En  $x=0$  et  $x=a$ , on a  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}_y = \mu_0 \underline{\underline{j}}_s \wedge \underline{\underline{n}}$

Donc en  $x=0$ ,  $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}_y = \mu_0 \underline{\underline{j}}_s \wedge \underline{\underline{u}}_x$

Soit  $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}_z = \mu_0 \underline{\underline{j}}_s$ , puis  $\underline{\underline{j}}_s = \frac{\underline{\underline{B}}}{\mu_0} \underline{\underline{u}}_z$

Ainsi,  $\underline{\underline{j}}_s = \frac{E}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \underline{\underline{u}}_z$  ; on a donc une onde longitudinale

En  $x=a$ ,  $\underline{\underline{j}}_s(a) = -\underline{\underline{j}}_s(0)$

Remarque :

On a bien conservation de la charge :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{j}}_s = 0 \Leftrightarrow -i\omega \underline{\underline{\sigma}} + ik \underline{\underline{j}}_s = 0 \Leftrightarrow -i\omega \epsilon_0 \underline{\underline{E}} + ik \frac{\underline{\underline{E}}}{\mu_0 c} = 0, \text{ ce qui est vrai.}$$

## D) Ondes transverses électriques (TE)

On cherche des ondes sous la forme  $\underline{\underline{E}}_z = 0$ ,  $\underline{\underline{B}}_z \neq 0$  (transverses électriques)

### 1) Champ $\vec{E}$ .

L'équation (1) donne déjà  $\underline{E}_x = \text{cte}$

Ensuite, en projetant l'équation d'onde sur  $\vec{u}_x$ , on obtient

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{E}_x = 0$$

Donc :

Soit  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , et on peut montrer qu'alors  $\underline{B}_z = 0$  (avec les équations et

conditions aux limites), ce qui est le cas précédent.

Soit  $\underline{E}_x = 0$ .

Donc  $\vec{E} = \underline{E}_y \vec{u}_y = \underline{E}(x) \vec{u}_y$

### 2) Champ $\vec{B}$ .

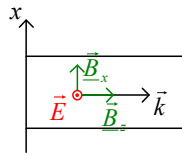
L'équation (4.1) donne alors  $\underline{B}_y = 0$

Donc  $\vec{B} = \underline{B}_x \vec{u}_x + \underline{B}_z \vec{u}_z$

Avec (3.1), on obtient :  $\underline{B}_x = -\frac{k}{\omega} \underline{E}(x)$

Et (3.3) :  $\underline{B}_z = \frac{1}{i\omega} \frac{d\underline{E}(x)}{dx}$

Donc  $\vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{E}$ , avec une composante longitudinale et une composante transverse :



On n'a donc plus que  $\vec{E}(x)$  à déterminer

### 3) Modes TE

- « Relation de dispersion » :

En projetant l'équation d'onde sur  $\vec{u}_y$ , on obtient :

$$\frac{d^2 \underline{E}(x)}{dx^2} + \underbrace{\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)}_{\gamma^2} \underline{E}(x) = 0$$

Donc  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2$

(On n'a pas une onde plane, donc ce n'est pas une relation de dispersion ; de plus, si on partait de cette relation, on trouverait une équation de Klein-Gordon, et non pas l'équation d'onde)

- Conditions aux limites :

(CL1) donne  $\underline{E}(0) = \underline{E}(a) = 0$

Ainsi, on a nécessairement  $\gamma^2 > 0$  (sinon, on obtient une solution en exponentielle réelle, qui, vues les conditions, est nécessairement nulle)

Ainsi,  $\underline{E}(x) = \underline{E}_0 \sin(\gamma x + \varphi)$

En 0,  $\sin \varphi = 0$  donc  $\varphi = 0$  ou  $\pi$  ; on prend 0

En  $a$ ,  $\sin \gamma a = 0$ , donc  $\gamma = \frac{m\pi}{a}$  où  $m \in \mathbb{N}^*$  (pour  $m < 0$ , on remplace  $E_0$

par  $-E_0$ )

On obtient ainsi une famille discrète de solutions,

$\underline{E}_m(x) = \underline{E}_{0,m} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ , solution qu'on note mode  $TE_m$

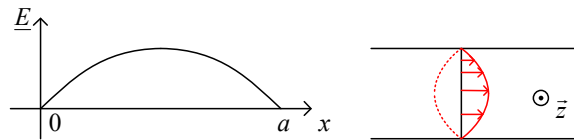
Et on a  $\underline{E}(x) = \sum_m \underline{E}_m(x)$ , puis  $E(x) = \sum_m E_{0,m} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - kz + \psi_m)$

Ainsi, à  $x$  fixé, on a une propagation dans le plan équiperpendiculaire à  $x$ .

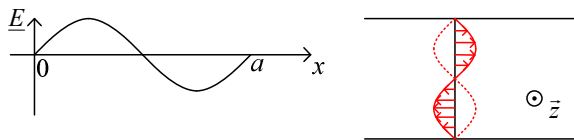
À  $z$ , fixé, on a une onde stationnaire sinusoïdale

- Allure des modes  $TE_m$  :

-  $TE_1$  :



-  $TE_2$  :



-  $TE_m$  :

On a un nœud de  $E$  sur chacun des plans, et  $m$  ventres.

- Pulsation de coupure :

- Mode  $TE_m$  :

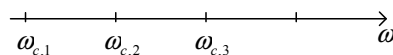
Propagation : il faut que  $k \in \mathbb{R}$ .

On a  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,m}^2}{c^2}$  où  $\omega_{c,m} = \frac{m\pi c}{a}$

Ainsi, si  $\omega > \omega_{c,m}$ , on a une propagation sans atténuation

Si  $\omega < \omega_{c,m}$ , on a une onde évanescente.

- Ensemble des modes  $TE$  :



Pour  $\omega$  donné, tous les modes qui ont une pulsation de coupure en dessous vont pouvoir passer, mais pas les autres ; on a donc un filtre passe-haut.

## E) Ondes transverses magnétiques (TM)

On cherche ici des solutions pour lesquelles  $\underline{B}_z = 0$ ,  $\underline{E}_z \neq 0$ .

### 1) Champ $\vec{B}$ .

L'équation (2) et (CL3) donnent  $\underline{B}_x = \text{cte} = 0$

Donc  $\vec{B} = \underline{B}_y \vec{u}_y = \underline{B}(x) \vec{u}_y$

### 2) Champ $\vec{E}$ .

Avec (3.1), on obtient  $\underline{E}_y = 0$

Donc  $\vec{E} = \underline{E}_x \vec{u}_x + \underline{E}_z \vec{u}_z$

Et avec (4.1),  $\underline{E}_x = \frac{kc^2}{\omega} \underline{B}_y = \frac{kc^2}{\omega} \underline{B}(x)$

Puis (4.3),  $\underline{E}_z = -\frac{c^2}{i\omega} \frac{d\underline{B}(x)}{dx}$

On a donc un champ  $\vec{B}$  transverse tangent aux plaques, et  $\vec{E}$  orthogonal à  $\vec{B}$ .

### 3) Modes TM

- « Relation de dispersion » :

On projette l'équation d'onde sur  $\vec{u}_y$  pour  $\vec{B}$  :

$$\frac{d^2 \underline{B}(x)}{dx^2} + \underbrace{\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)}_{\gamma^2} \underline{B}(x) = 0$$

- Conditions aux limites :

Avec (CL2) et (4.3), on obtient  $\frac{d\underline{B}(x)}{dx} = 0$  en  $x=0$  et  $a$ .

Ainsi,  $\underline{B}(x) = B_0 \cos(\gamma x + \varphi)$

Donc en  $x=0$ ,  $\sin \varphi = 0$  soit  $\varphi = 0$ .

Et en  $a$ ,  $\sin \gamma a = 0$ , donc  $\gamma = \frac{m\pi}{a}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$

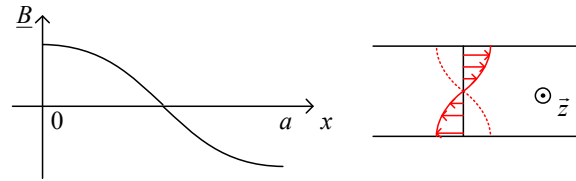
Donc  $\underline{B}_m = B_{0,m} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$ , soit  $B_m(x, z, t) = B_{0,m} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - kz)$

- Pulsation de coupure :

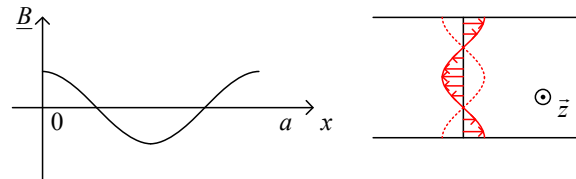
C'est le même principe que pour le mode transverse.

- Allure des modes TM :

-  $TM_1$  :



-  $TM_2$  :



-  $TM_n$  :

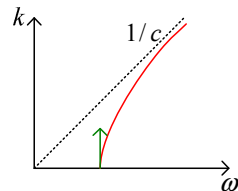
On aura un ventre sur chacune des plaques, et  $n$  nœuds entre les plaques.

## F) Propagation du mode $TE_1$ .

### 1) Relation de dispersion

- En pulsation :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}, \text{ où } \omega_c = \frac{\pi \cdot c}{a}$$



- En longueur d'onde :

On a  $\lambda_0 = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}$  (pour une OPPS dans le vide)

$$\text{Et } \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{4a^2}$$

### 2) Condition de propagation

- Simple :

$$\omega > \omega_{c,1} \Leftrightarrow \lambda_0 < 2a$$

- Exclusive :

Si on veut que  $TE_1$  se propage et pas les autres, il faut que  $\omega_{c,2} > \omega > \omega_{c,1}$ , soit  $a < \lambda_0 < 2a$ .

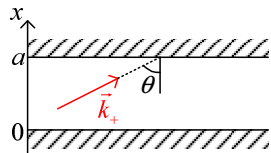


### 3) Vitesse de propagation

- On a  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,1}^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}} > c$
- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,1}^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} < c$

### G) Propagation d'ondes planes obliques

On admet qu'en combinant les différents modes (TEM, TE, TM), on obtient toutes les solutions possibles.



Peut-on avoir une OPPS dirigée selon  $\vec{k}_+$  ?

#### 1) Condition de propagation

- Réflexions multiples :

L'onde  $\vec{k}_+$  va se réfléchir et on aura une onde descendante  $\vec{k}_-$ .

On a  $\vec{k}_+ = \frac{\omega}{c} \vec{u}_+$  avec  $\vec{u}_+ = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z$

Et  $\vec{k}_- = \frac{\omega}{c} \vec{u}_-$  avec  $\vec{u}_- = -\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z$

Mais cette onde sera aussi réfléchiée.

On aura ainsi une superposition de petites ondes planes montantes et descendantes

- Onde résultante :

On a une résultante  $\vec{E}_+ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{e}_{+,n}$ , et entre deux réflexions, on a un

déphasage :  $\vec{e}_{n+1} = \vec{e}_n e^{i\varphi}$

Condition d'interférence constructive :

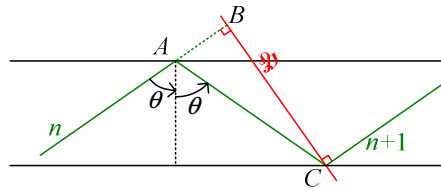
Si  $\varphi = 0 [2\pi]$ , toutes les petites ondes sont en phase, donc on peut avoir un champ résultant.

Si  $\varphi = \pi [2\pi]$ , les termes de la somme s'annulent deux à deux, et on n'aura pas d'onde résultante (ou un infiniment petit)

Si  $\varphi = \frac{\pi}{N} [2\pi]$ , les ondes  $n$  et  $n+N$  sont en opposition de phase, et on n'aura pas non plus de propagation.

Pour un réel quelconque non nul modulo  $2\pi$ , on aura toujours en quelque sorte une annulation, et l'onde ne pourra pas se propager.

- Quantification de l'angle d'incidence  $\theta$  :



La phase est constante sur le plan  $\mathfrak{P}$  pour chacune des deux ondes, donc on doit avoir  $\varphi_n = \varphi_{n+1} [2\pi]$  sur le plan  $\mathfrak{P}$ .

On a  $\varphi_n(B) = \varphi_n(A) + \vec{k}_+ \cdot \vec{AB}$  et  $\varphi_{n+1}(C) = \varphi_n(A) + \pi + \vec{k}_- \cdot \vec{AC} + \pi$  (on a un déphasage de  $\pi$  pour chaque réflexion)

Et on doit avoir  $\varphi_n(B) = \varphi_{n+1}(C) [2\pi]$

Donc  $\vec{k}_+ \cdot \vec{AB} = \vec{k}_- \cdot \vec{AC} + 2m\pi$ , soit  $\frac{\omega}{c} AC = \frac{\omega}{c} AB + 2m\pi$  où  $m \in \mathbb{N}^*$  ( $m$  est non nul car  $AB > AC$ )

De plus,  $AB = AC \cos(\pi - 2\theta) = -AC \cos(2\theta)$ , et  $AC = \frac{a}{\cos \theta}$

Donc  $\frac{\omega}{c} \frac{a}{\cos \theta} (1 + \cos 2\theta) = 2m\pi$ , soit  $2 \frac{\omega}{c} a \cos \theta = 2m\pi$

Et donc  $\frac{\omega}{c} \cos \theta = m \frac{\pi}{a}$ .

- Pulsation de coupure :

- Expression :

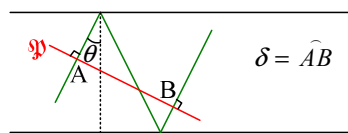
On a  $\cos \theta < 1$ , donc  $\omega > \frac{m\pi \cdot c}{a} = \omega_{c,m}$

- Interprétation :

$\phi = \varphi_{n+1} - \varphi_n$  est une fonction décroissante de  $\theta$ , puisqu'on a :

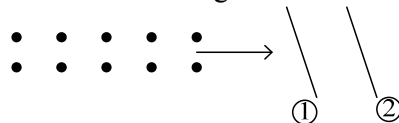
$$\phi = \varphi_{n+1} - \varphi_n = 2m\pi = 2 \frac{\omega}{c} a \cos \theta$$

On note  $\delta$  la distance qu'a parcourue l'onde à partir d'un point pour se retrouver dans le plan de phase :



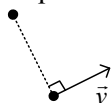
Ainsi,  $\delta = 2a \cos \theta$ , et  $\delta$  est une fonction décroissante de  $\theta$ , toujours inférieure à  $2a$ .

Sous forme d'image :



On imagine une double file d'élèves qui se déplacent « en phase » (on suppose la file infinie), c'est-à-dire l'un à côté de l'autre. On demande à la file de droite, quand elle touche (2), de « se réfléchir », atteindre (1), se réfléchir à nouveau.

Le but ici est de trouver un angle pour lequel après la double réflexion subie par les élèves de la file de droite, ceux-ci continuent quand même d'avancer « à côté » (mais plus éloigné) d'un autre élève de la file de gauche, c'est-à-dire qu'il y en a un qui avance dans la même direction que lui à sa gauche :



## 2) Propagation des champs

Pour le champ  $\vec{E}$  total, on a  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

- Pour  $\vec{E}_+$  : on suppose que  $\vec{E}_+$  est polarisé selon  $\vec{u}_y$ .

Ainsi,  $\vec{E}_+ = \vec{E}_+ e^{i(\vec{k}_+ \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , et  $\vec{k}_+ = \frac{\omega}{c} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z)$

Donc  $\vec{E}_+ = \underline{E}_+ e^{i(\frac{\omega}{c}(x \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t)} \vec{u}_y$

-  $\vec{E}_- = \underline{E}_- e^{i(\frac{\omega}{c}(-x \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t)}$

Conditions aux limites :

On a  $\vec{E} = \vec{0}$  en  $x = 0$  et  $x = a$ . Donc  $\underline{E}_- = -\underline{E}_+ \vec{u}_y$

- Ainsi,  $\vec{E} = 2i \underline{E}_+ \sin(\frac{\omega}{c} \cos \theta x) e^{i(\frac{\omega}{c} z \sin \theta - \omega t)} \vec{u}_y$

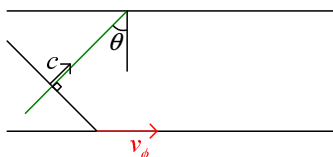
Or,  $\frac{\omega}{c} \cos \theta = m \frac{\pi}{a}$ , donc  $\frac{\omega}{c} \sin \theta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} = k$

Donc  $\vec{E} = 2 \underline{E}_{+,0} \sin(\frac{m\pi}{a} x) \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y = 2 \underline{E}_{+,0} \sin(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_y$

On a donc un mode transverse électrique.

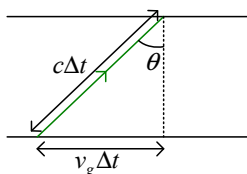
## 3) Vitesse de phase, vitesse de groupe

• Vitesse de phase :



$$\text{On a } v_\phi = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,m}^2}{\omega^2}}}$$

• Vitesse de groupe :

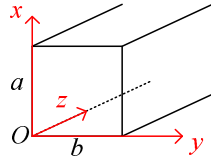


$$\text{Donc } v_g = c \sin \theta.$$

## II Propagation dans un guide de section rectangulaire

### A) Hypothèses de travail

#### 1) Guide



On suppose que  $a \geq b$  et qu'on a une paroi conductrice parfaite

#### 2) Champ électromagnétique

On cherche un champ électromagnétique sous la forme  $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(x, y)e^{i(kz - \omega t)})$ ,  $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}}(x, y)e^{i(kz - \omega t)})$

### B) Mise en équation

#### 1) Formalisme complexe

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \vec{\nabla} \leftrightarrow ik\vec{u}_z + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y}_{\vec{\nabla}_T} = ik\vec{u}_z + \vec{\nabla}_T$$

#### 2) Equations de Maxwell

A partir des équations de Maxwell–Ampère et Maxwell–Faraday, on a :

$$(A) \quad \underline{\vec{E}}_T = \frac{-1}{i\omega \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)} \left( \vec{\nabla}_T \underline{B}_z \wedge \vec{u}_z + \frac{k}{\omega} \vec{\nabla}_T \underline{E}_z \right)$$

$$(B) \quad \underline{\vec{B}}_T = \frac{1}{i\omega \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)} \left( \vec{\nabla}_T \underline{E}_z \wedge \vec{u}_z + c^2 \frac{k}{\omega} \vec{\nabla}_T \underline{B}_z \right)$$

#### 3) Equation d'onde

$$\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{\vec{E}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{\vec{E}} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{\vec{E}} = \vec{0}, \text{ et on a la même chose pour } \underline{\vec{B}}.$$

#### 4) Conditions aux limites

- Pour  $\vec{E}$  :  
 $\underline{E}_y(0, y) = \underline{E}_y(a, y) = 0$  (CL1)  
 $\underline{E}_x(x, 0) = \underline{E}_x(x, b) = 0$  (CL2)
- Pour  $\vec{B}$  :  
 $\underline{B}_x(0, y) = \underline{B}_x(a, y) = 0$  (CL3)  
 $\underline{B}_y(x, 0) = \underline{B}_y(x, b) = 0$  (CL4)

### C) Mode transverse électromagnétique ?

Peut on avoir des solutions pour lesquelles  $\underline{E}_z = 0$ ,  $\underline{B}_z = 0$  ?

#### 1) Relation de dispersion

Avec (A), (B), il faut que le dénominateur soit nul pour avoir  $\vec{B}_T \neq \vec{0}$  ou  $\vec{E}_T \neq \vec{0}$ , c'est-à-dire  $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1$ , ou  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

#### 2) Impossibilité du mode TEM

- Equation d'onde :

$$\text{On a alors } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{E}_x = 0$$

- A  $x = x_0$ , on a donc :

$$\frac{d^2 \underline{E}_x(x_0, y)}{dy^2} = 0$$

$$\text{Donc } \underline{E}_x(x_0, y) = \alpha \cdot y + \beta$$

Et la condition (CL1) impose alors que  $\underline{E}_x(x_0, y) = 0$

Et donc  $\underline{E}_x = 0$

Puis de même  $\underline{E}_y = 0$ .

Remarque :

Ceci s'applique à n'importe quel guide cylindrique creux.



(Un coaxial n'est pas creux)

## D) Modes transverses électriques

On cherche des solutions telles que  $\underline{E}_z = 0$ ,  $\underline{B}_z \neq 0$

Les équations (A) et (B) indiquent qu'avec le calcul de  $\underline{B}_z$ , on peut ensuite trouver  $\vec{B}_T$ ,  $\vec{E}_T$ .

### 1) Equation de Helmholtz

On a avec l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_z}{\partial y^2} + \gamma^2 \underline{B}_z = 0$$

$$\text{Où } \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

### 2) Séparation des variables

On cherche une solution sous la forme  $\underline{B}_z(x, y) = f(x)g(y)$

$$\text{On a alors } \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \gamma^2 = 0$$

$$\text{Donc } \frac{f''(x)}{f(x)} = \text{cte} = -\alpha^2, \quad \frac{g''(y)}{g(y)} = \text{cte} = -\beta^2 \text{ avec } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

### 3) Conditions aux limites

$$\text{D'après (A), } \underline{E}_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial y} = 0, \text{ et } \underline{E}_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} = 0.$$

$$\text{Donc avec (CL1) : } \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = a, \text{ soit } f'(0) = f'(a) = 0$$

$$\text{Et avec (CL2), } g'(0) = g'(b) = 0$$

### 4) Modes TE

Les conditions aux limites imposent que  $\alpha^2 > 0$  et  $\beta^2 > 0$  (c'est-à-dire qu'on a des solutions en exponentielle imaginaire)

$$\text{Ainsi, } f(x) = A \cos(\alpha x + \varphi) = A \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \text{ où } m \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Et } g(y) = B \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ainsi, } \underline{B}_z = \underline{B}_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \text{ mode } TE_{m,n}$$

Si  $n=0$  :  $\underline{B}_z = \underline{B}_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ , donc  $TE_{m,0} \equiv TE_m$   
 (remarque : dire que  $n=0$  revient à dire que  $b \rightarrow +\infty$ )

### 5) Pulsation de coupure

- Condition de propagation du mode  $TE_{m,n}$  :

On doit avoir  $\text{Re}(k) \neq 0$ .

Mais  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2$ , donc  $k^2 \in \mathbb{R}$  ; il faut donc  $k \in \mathbb{R}$

C'est-à-dire que  $\frac{\omega^2}{c^2} > \gamma^2$

Ainsi,  $\omega^2 > c^2 \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$

On note  $\omega_{c,m,n} = \pi.c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$

- Sélection du mode  $TE_{1,0}$  :

On suppose  $a > b$ . Ainsi,  $\inf \omega_{c,m,n} = \omega_{c,1,0}$

Si  $\omega < \omega_{c,1,0}$ , il n'y aura aucune propagation ( $\lambda_0 > 2a$ )

Si  $\omega_{c,1,0} < \omega < \inf(\omega_{c,0,1}, \omega_{c,2,0})$ , seul le mode  $TE_{1,0}$  peut se propager (on a alors  $\sup(a, 2b) < \lambda_0 < 2a$ )

## E) Etude du mode $TE_{1,0}$ .

### 1) Champs

- $\vec{B}$  :

- Longitudinal :

$$\begin{aligned} \vec{B}_z &= \text{Re}(\underline{B}_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(kz - \omega t)}) \vec{u}_z \\ &= B_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z \end{aligned}$$

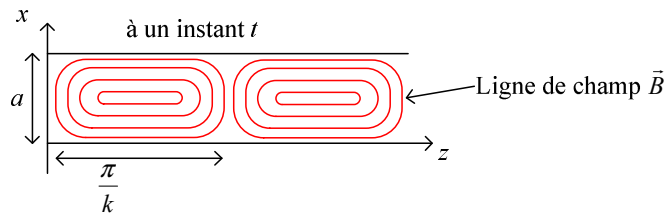
Avec  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$ .

- Transverse :

Avec l'équation (B), on a  $\vec{B}_T = i \frac{ka}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_x$

Donc  $\vec{B}_T = \frac{ka}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x$ , polarisé sur  $\vec{u}_x$

- Total :

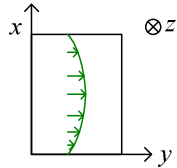


• Champ  $\vec{E}$  :

D'après (A), on a  $\vec{E}_T = -ia \frac{\omega}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} \vec{u}_y$

Soit  $\vec{E}_T = -a \frac{\omega}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_y$

Avec  $E_0 = -a \frac{\omega}{\pi} B_0$ .



Ainsi,  $\vec{E}_T, \vec{B}_T, \vec{k}$  forme un trièdre direct.

## 2) Propagation de l'énergie

• Vecteur de Poynting :

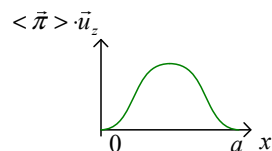
On a  $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$

Donc  $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \right)$

Mais  $B_z$  est en déphasage de  $i$  avec les autres composantes, donc n'intervient pas dans la partie réelle du produit.

Donc  $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \vec{u}_z$

Ainsi, l'énergie se propage selon  $\vec{u}_z$ .



On trouve une forme semblable au profil de vitesse de l'eau dans un canal, plus important au centre et tendant vers 0 aux bords.

• Puissance transmise :

- Expression :

$P = \iint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S}$ , et  $d\vec{S} = dx dy \vec{u}_z$



$$\text{Donc } P = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{1}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2 \sin^2 \frac{\pi \cdot x}{a} dy dx = \frac{1}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2 \frac{ab}{2}$$

$$\text{Soit } P = \frac{ab}{4\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2.$$

$$\text{Avec } \lambda_0 = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}, k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ on a :}$$

$$P = \frac{ab}{4\mu_0 c} E_0^2 \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}}$$

- Valeurs limites :

On doit avoir  $\lambda_0 < 2a$ .

$$(1) \text{ Si } \lambda_0 = 2a, P = 0$$

$$(2) \text{ Si } \lambda_0 = 0, P = \frac{ab}{4\mu_0 c} E_0^2 = P_{\max}$$

$$(3) \text{ Si } \lambda_0 = a, P = P_{\max} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 P_{\max}$$

Ainsi, sélectionner exclusivement le mode  $TE_{1,0}$  ( $a < \lambda_0 < 2a$ ) permet quand même d'atteindre 87% de la puissance maximale transmise.

- Ordres de grandeur :

$$\text{Avec } \nu = 3\text{GHz}, \lambda_0 = \frac{c}{\nu} = 10^{-1} \text{m} = 10\text{cm}$$

(1) Il faut  $\sup(a, 2b) < \lambda_0 < 2a$ . On peut prendre  $a = 9\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$

(2) Si  $E$  est trop important, on aura une décharge (« champ disruptif », à cause de l'ionisation des molécules de l'air)

Pour l'air, le champ disruptif est de  $30000\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$

(C'est-à-dire  $E_{\max} = 3 \cdot 10^6 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ )

A 3GHz (en régime sinusoïdal),  $E_{\max} = 10^8 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

On prend donc par exemple  $E_0 = 10^6 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On a alors  $P = 2 \cdot 10^6 \text{W}$

Remarque :

On aura des courants surfaciques d'intensité  $I \sim 100 - 1000 \text{A}$

### III Atténuation dans un guide d'onde de conductivité finie

#### A) Structure des ondes

##### 1) Propagation dans le vide intérieur

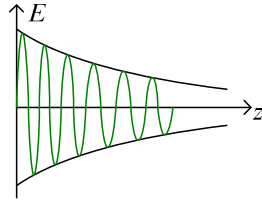
- L'onde satisfait toujours l'équation d'onde classique.

Mais on a des conditions aux limites différentes.

- L'onde est amortie :

On aura une onde en  $e^{i(kz - \omega t)}$  où  $k = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\beta = \frac{1}{d}$ .

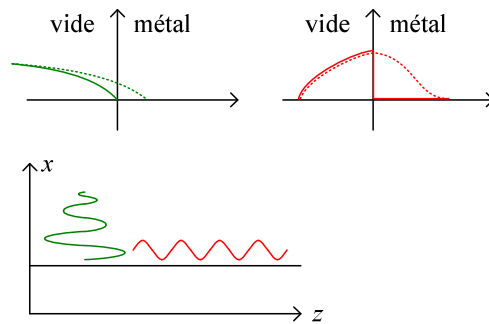
Pour un bon métal,  $d \gg \lambda$



- Sur une distance  $\Delta z \ll d$ , on peut négliger l'amortissement, et donc pour  $\lambda \ll \Delta z \ll d$ , on se retrouve dans le cas précédent.

## 2) Propagation dans le métal

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pénètrent dans le métal
  - $\vec{E}_T$  est continu, et  $\vec{B}$  est totalement continu.
- On n'a donc pas forcément un nœud pour  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}_T$  (idem pour les ventres)



- Propagation :
  - Propagation longitudinale :

$$k_z = \alpha + i\beta$$

- Propagation transversale :

$$k_T = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

On a donc une longueur d'onde  $2\pi\delta$ , une distance d'atténuation  $\delta$ . L'onde est donc atténuée en environ une longueur d'onde.

$$- \text{ On a } e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{-x/\delta} e^{-z/d} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi z}{\lambda} - \omega t)}$$

- Ordres de grandeur :

(1) Pour  $\nu = 1\text{GHz}$ , on a  $\lambda_0 = 0,3\text{m}$

(2)  $\sigma = 10^7 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ , donc  $\delta = 5\mu\text{m}$

(3) En mode  $TE_{1,0}$ ,  $d \sim 400\text{m}$

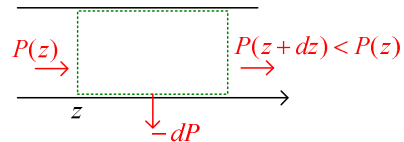
On a donc bien  $\delta \ll \lambda_0 \ll d$

## B) Atténuation

### 1) Origine

L'atténuation est due à l'effet Joule

### 2) Bilan énergétique



On a  $\oint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S} = 0$

- On a  $P \propto \vec{E} \wedge \vec{B}$

Et  $dP \propto Pdz$  (plus la puissance est importante, plus les pertes sont importantes), donc  $dP = -KPdz$ , soit  $P = P_0 e^{-Kz}$ .

- Champs :

Ainsi,  $E^2$  décroît en  $e^{-Kz}$ , donc  $E$  décroît en  $e^{-\frac{K}{2}z}$ , et on retrouve  $\beta = \frac{K}{2}$ .