Chapitre 21 : La diffraction

I Le modèle scalaire

A) Vibration lumineuse

1) Lumière

On considère une onde électromagnétique dont la longueur d’onde dans le vide est comprise entre 0,4μm < λ₀ < 0,8μm
(Mais les résultats sont valables dans tout le domaine des ondes électromagnétiques)

2) Ondes scalaires

- Monochromatiques :
  Avec l’équation de Maxwell–Faraday, si on connaît \( \vec{E} \), on peut trouver \( \vec{B} \)
  \( \vec{E} \times \vec{B} = i \omega \vec{E} \)  
  On peut donc ne travailler qu’avec \( \vec{E} \).
- Il peut arriver que seules des grandeurs scalaires interviennent :
  \( \vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} \hat{u}(r,t) \)
  Le caractère vectoriel n’est pas alors fondamental.
  C’est le cas par exemple pour la diffraction, les interférences, mais pas pour la polarisation.
  Dans la suite du chapitre, on étudiera \( E(\vec{r},t) = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}) \)
  On appelle vibration lumineuse la grandeur \( A(\vec{r}) = \alpha \vec{E}(\vec{r}) \) où \( \alpha \) est un coefficient déterminé plus tard. Ainsi, \( A(\vec{r},t) = \text{Re}(A(\vec{r})e^{-i\omega t}) \)

B) Intensité lumineuse

1) Définition

On pose \( I = \langle \hat{\vec{E}} \rangle \) où \( \hat{\vec{u}} \) est un vecteur unité dirigé selon \( \vec{u} \).

(On a \( \vec{u} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \))

2) Eclairement d’une surface

- Définition :

  \( dS \)

On note \( d\phi \), la puissance incidente élémentaire sur \( dS \)
On pose alors $E = \frac{d\phi}{dS}$, éclairement de la surface.

- Incidence normale :

\[
\hat{n} \rightarrow dS
\]

On a alors $d\phi = IdS$, et donc $E = I$

- Incidence oblique :

\[
\hat{\theta} \rightarrow dS
\]

On a $d\phi = I \cos \theta dS$, et donc $E = I \cos \theta$

3) Cas des ondes (localement) planes progressives sinusoïdales dans un milieu linéaire isotrope

- On a d’après l’équation de Maxwell–Faraday, $\hat{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$

Donc $\hat{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} (\frac{\hat{k}}{\omega} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{k} \wedge \vec{E}$

Et $\vec{k} = \frac{n \omega}{c} \vec{u}$, soit $\hat{\pi} = \frac{n}{\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{u}$

(Comme le milieu n’est pas homogène, $n$ peut dépendre de $\vec{r}$)

Ainsi, $\langle \hat{\pi} \rangle = \frac{n}{\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{u}$

Donc $I = \frac{n}{2\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{n}{2\mu_0 c} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{\mu_0 c} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{\mu_0 c}$

- On choisit alors le coefficient $\alpha$ tel que $\vec{I} = \alpha \vec{A} \vec{A}^*$ ($\alpha$ dépend aussi de $\vec{r}$)

II Le phénomène de diffraction

A) Diffraction d’une onde à la surface d’un liquide

On observe un phénomène qui n’est pas en accord avec l’optique géométrique.
B) Diffraction d'une onde lumineuse par un diaphragme

1) Exemple 1

- Si \( l \gg \lambda \):
- Si \( l \sim \lambda \):

Plus \( l \) est proche de \( \lambda \), plus il y a de diffraction.

2) Exemple 2

- En optique géométrique :
- En optique physique :
La lentille est limitée par un diaphragme, donc il y a une diffraction :

La tâche a une épaisseur \( \rho \) inversement proportionnelle au rayon de la lentille.

C) Cas général

1) Historique

Lorsqu'on observe une diffraction, cela signifie qu'il y a un phénomène ondulatoire qui intervient ; la réciproque est aussi vraie
Fresnel, Arago, Biot et Young ont mis en évidence le caractère ondulatoire de la lumière.

Avec l’effet photoélectrique, Einstein a mis en évidence son caractère corpusculaire.

Les deux caractères sont reliés par les relations \( E = h \nu, \quad p = \frac{h \nu}{c} \).

En 1923, De Broglie (prononcer « Broeill ») postule qu’une particule de quantité de mouvement \( p \) est associée à une onde de longueur d’onde \( \lambda \) telle que

\[
\lambda = \frac{h}{p} \quad (p = \hbar \nu)
\]

1927 : Davisson et Germer observent (par hasard) une diffraction d’un faisceau d’électrons. Le postulat de de Broglie est donc validé.

2) Structure d’un faisceau lumineux

- Rappels sur la transformée de Fourier :
  - Toute onde est superposition d’OPPS.

\[
A(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int d^3 k \omega \omega \omega e^{i(k \cdot \vec{r} - \omega t)} \tilde{A}(\vec{k}, \omega)
\]

- Une OPPS a une extension spatiale et temporelle infinies.

Si \( A(\vec{r}, t) \) varie sur une longueur caractéristique \( \Delta \gamma \), \( A(\vec{k}, \omega) \) ne prend des valeurs importantes que sur \( \Delta \vec{k} \) avec \( \Delta x \Delta k_x \sim 2\pi 

- On peut montrer que si \( A \) est à support borné (nulle hors d’un intervalle), alors sa transformée de Fourier s’étend de \(-\infty \) à \(+\infty\).

- Faisceau cylindrique :

\[
\begin{array}{c}
\Delta x\\ \Delta y
\end{array} \rightarrow z
\]

Est-ce qu’il existe une onde lumineuse se propageant exactement selon \( Oz \) et ayant un support borné ? Il n’en existe pas :

Si \( A(\vec{r}, t) = f(x, y) e^{i(k_0 z - \omega t)} \) où \( f(x, y) \) est à support borné par \( \Delta x, \Delta y \), alors avec le spectre de Fourier de l’onde,

\[
A(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int dk_x \int \int dk_y \widetilde{f}(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_0 z - \omega t)}
\]

Et \( k_x, k_y \) prennent des valeurs sur \( \mathbb{R} \) tout entier.

Mais avec l’équation d’onde, si on suppose par exemple que l’onde se propage dans le vide, \(-k_x^2 - k_y^2 - k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0\)

Soit \( k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \)

Donc \( k_x \) et \( k_y \) sont bornées, ce qui est impossible.

Conclusion :
Quand on parle d’un faisceau parallèle d’extension finie, on fait en fait une approximation.
On a $\Delta k_x \sim \frac{2\pi}{\Delta x}$, $\Delta k_y \sim \frac{2\pi}{\Delta y}$, donc le faisceau ne peut pas non plus être rigoureusement parallèle. Plus il est large, plus il est « bien » parallèle.

- Faisceau gaussien (faisceau laser) :
  
  $A(\vec{r},t) = A_0 e^{-\left( x^2 + y^2 \right)/w^2} e^{ik \left( x \cos \theta + y \sin \theta \right)}$ est une solution approchée de l’équation d’onde classique, avec $A_0(z), w(z), R(z)$ et $\omega, k$ des constantes, $A_0, w, R$ variant sur une distance $D >> \lambda = \frac{2\pi}{k}$.

- On a une onde quasi-sphérique :
  
  Surface d’onde: $\frac{x^2 + y^2}{2R} + z = \text{cte}$
  
  (Surface de phase constante)

On a une sphère de rayon $R(z)$, avec $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$, où $z_R$ est une constante.

Si $z = 0$, $R = +\infty$ (on a donc un plan, de rayon de courbure infini)

Si $z > 0$, $R > 0$ :

Si $z < 0$, $R < 0$ :

- Extension transverse :
  
  On note $x^2 + y^2 = r^2$ ; ainsi, on a une amplitude en $e^{-r^2/w^2}$

On a $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$, où $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$
III Principe de Huygens–Fresnel

A) Interprétation de Huygens de la diffraction (1678)

1) Sources secondaires

Si on a un bouchon sur de l’eau, et qu’il y a une onde, celle-ci va se
ddiffacter en arrivant sur le bouchon ; il y aura donc des ondelettes qui seront
 créées.

L’interprétation de Huygens est que tous les points atteints par l’onde
 émettent des ondelettes, même s’il n’y a pas de bouchon. On les appelle alors
 sources secondaires.

2) Interférence des ondelettes

Les points atteints par l’onde sont des petites sources, qui vont créer des
 ondelettes etc.

La somme des ondes est nulle partout sauf sur l’arc.

3) Diffraction

Les ondelettes n’interfèrent plus de la même façon.

B) Enoncé du principe (Fresnel, 1818)

1) Problème équivalent
2) Caractéristiques des sources fictives

On suppose que les sources fictives :
- Forment un continuum
- Emettent chacune une onde sphérique
- Sont synchrones de l’onde incidente (même plusation)
- D’amplitude proportionnelle à \( dS \) et à l’amplitude de l’onde incidente
- Déphasée de \( \phi_0 \) par rapport à l’onde incidente (\( \phi_0 \) indépendant de \( P \))

\[ P \quad k \quad M \]

Le point \( P \) reçoit \( A_i(\vec{r}, t) \), ou en complexe \( A_i \) ;

La surface \( dS \) va donc diffacter \( dA = \beta e^{i\phi_0} A_i(\vec{P}, \vec{k}, t) e^{-i\omega t} \leq \text{Re} \left( \frac{\beta e^{i\phi_0}}{r} \right) e^{-i\omega t} A_i dS e^{i\phi_0} \)

Ou en posant \( dA = \beta e^{i\phi_0} \frac{e^{i\phi_0}}{r} A_i(\vec{P}) dS \), \( dA = \text{Re}(dA e^{-i\omega t}) \)

\[ M \]

C) Discussion

1) Exemple préliminaire

\[ \begin{align*}
\exp 1 & \quad \equiv \quad \exp 2 \\
\forall
\end{align*} \]

L’expérimentateur 1 fait vibrer la corde. 2 ne la touche pas, mais bouge en même temps.
Ainsi, l’observateur voit l’expérimentateur 2 émettre l’onde alors que ce n’est pas lui qui le fait.

2) Utilité du principe

Si on écrit les équations de Maxwell pour essayer de retrouver ce calcul, on arrive rapidement à des calculs très compliqués. (Il a été réalisé une fois pour un problème simplifié, et les calculs étaient déjà fastidieux…)
On pourrait quand même retrouver ce principe à partir des équations de Maxwell (le principe est un résultat approché, donc on n’obtiendrait sûrement pas exactement la même chose, mais au moins de façon approchée)
3) Validité du principe

- Ondes scalaires
- Il faut que la source et le plan soient assez éloignés de l’ouverture.
- Les rayons doivent être peu inclinés par rapport à la surface du trou.
- L’ouverture doit être de grande dimension par rapport à \( \lambda \)

4) Diffraction par une ouverture – diffraction par la matière

- Diffraction par une ouverture : (sources fictives)
- Diffraction par la matière :
  Diffraction cristalline (sources pas fictives !!)

\[
\begin{array}{cccc}
\odot & \odot & \odot \\
\odot & \odot & \odot \\
\odot & \odot & \odot \\
\end{array}
\]

IV Diffraction de Fraunhofer

A) Définition

C’est lorsque la source et l’écran sont à une distance infinie du diaphragme

- Faisceau incident parallèle :

\[
\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\
\end{array}
\]

- Observation :

\[
\begin{array}{cccc}
\odot & \odot & \odot & \odot \\
\end{array}
\]

On peut donc ne prendre que ce qui est émis dans la direction \( \vec{k} \)

\( \vec{k} \) est fixée, mais \( \vec{\hat{k}} \) est variable (on veut l’amplitude diffractée dans toutes les directions de l’espace)

- Approximation de Fraunhofer :

\[
\begin{array}{cccc}
\odot & \odot & \odot & \odot \\
\end{array}
\]

On a \( dA(P,M) = \beta e^{i\vec{k} \cdot \vec{\phi}} \frac{A(P)}{r} dS \) où \( \vec{r} = \vec{PM} \).

- Approximation :

\[
\begin{array}{cccc}
\odot & \odot & \odot & \odot \\
\end{array}
\]

\( 1/r \) varie lentement à grande distance, mais \( e^{i\vec{k} \cdot \vec{\phi}} \) varie toujours aussi vite.
Donc \( dA(P,M) = \alpha e^{ik \cdot A(P)} dS \)
On peut donc assimiler l’onde à une onde plane localement.

B) Réalisation expérimentale

1) Source

- Eloignée :

- Laser :

- Source à distance finie au foyer d’une lentille

2) Ecran

- Ecran éloigné

On peut considérer que les rayons émergeants sont quasiment parallèles.

- Ecran dans le plan focal d’une lentille convergente

A un point \( M \) de l’écran, on peut faire correspondre un vecteur \( \vec{k} \), et vice-versa :

\[
\frac{k_x}{f} = \frac{k_y}{y} = \frac{k_z}{z}
\]

On a \( OM \parallel \vec{k} \), donc

De plus, \( k = \frac{2\pi}{\lambda} \), et \( k_y, k_z \ll k_x \)

Donc \( k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \)
Et \( k_y = \frac{2\pi}{\lambda f} y, \ k_z = \frac{2\pi}{\lambda f} z \).

Si les ondelettes interfèrent destructivement, on aura un point sombre. Si elles interfèrent constructivement, on aura un point lumineux.

3) Montage global (de Fraunhofer)

- A deux lentilles :

- A une lentille :
On peut rapprocher \( L_1 \) et \( L_2 \) autant qu’on veut de la fente

(Deux lentilles accolées forment une lentille)

Où \( S \) et \( E \) sont conjugués : \( \frac{1}{OE} = \frac{1}{OS} = \frac{1}{f} \), c’est-à-dire \( \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \)

C) Cas d’une ouverture plane : formule de Fraunhofer

1) Transmittance de l’ouverture

- Définition :
Si on met un négatif sur l’ouverture :
L’amplitude initiale \( A_i(P) \) sera affaiblie, \( A_i(P) \) puis diffractionnée \( dA_d(P, \vec{k}) \).
Transmittance \( t = \frac{A_f(P)}{A_i(P)} \)

\( t \) est donc un complexe, dépendant de \( P \).
On a alors dans la direction \( \vec{k} \) :

\[
dA_d(P, \vec{k}) = \alpha e^{i\phi} t(P) A_i(P) dS
\]
• Cas particuliers :
  - $t = 0$ (opaque)
  - $t = 1$ (transparent)
  - $t = t_0 e^{ip}$

• Le diaphragme est caractérisé par la donnée de $t(P)$ :

   ![Diaphragme graphique]

On a $t(y, z) = 1$ pour $y^2 + z^2 < R^2$, $t(y, z) = 0$ pour $y^2 + z^2 > R^2$.

2) Eclaircissement sous incidence normale

Comme on a une onde plane, $A_i$ est indépendant de $P$.

• Amplitude élémentaire émise par $P$ dans la direction $\vec{k}$ au niveau de $\pi$ :

   \[ dA(P, \vec{k}, \pi) = \alpha t(P) A_i(P) e^{ik \vec{PH}} dS \]

Ou avec $\vec{PH} = \vec{OH} - \vec{OP}$ :

   \[ dA(P, \vec{k}, \pi) = \alpha e^{ik \vec{PH}} A_i t(P) e^{-ik \vec{OP}} dS \]

• Amplitude totale :

   \[ A(\vec{k}, \pi) = K \iint_{\mathbb{R}^2} t(y, z) e^{-i(k, y + \vec{k}z, \pi)} dy dz \]

ou \[ A(\vec{k}, \pi) = K \iint \iint t(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \vec{r}} d^2r : \text{formule de Fraunhofer.} \]

Remarque :

On reconnaît une transformée de Fourier : $A(\vec{k}) \propto \vec{I}(\vec{k})$

On a $I = AA^*$. Donc le produit $KK^*$ intervient :

On a $KK^* = A_i A_i^* \alpha \alpha^*$, indépendant de $\pi$.

3) Eclaircissement sous incidence quelconque

• On aura ici $A_i(P) = A_i(O) e^{ik \vec{OP}}$

• Et $dA = \alpha e^{i k \vec{PH}} A_i(O) t(P) e^{i \vec{PH} \vec{OP}} e^{-i \vec{k} \vec{OP}} dS = \alpha e^{i \vec{PH}} A_i(O) t(P) e^{-i(\vec{k} - \vec{PH}) \vec{OP}} dS$

Donc $A = K \iint t(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} - \vec{PH}) \vec{r}} d^2r$

On retrouve la même forme en remplaçant $\vec{k}$ par $\vec{k} - \vec{PH}$. 

Chapitre 21 : La diffraction
Electromagnétisme
**V** Diffraction par une fente

**A)** Rappel : fonction sinus cardinal

1) Transformée de Fourier d’une porte

\[
\text{On a } \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx} dx = a \cdot \text{sinc} \frac{ka}{2} \quad \text{où } \text{sinc} x = \frac{\sin x}{x}
\]

2) Fonction sinus cardinal

Les extrema sont les points en lesquels \( \tan x = x \)

On a donc un maximum en 0, un autre au voisinage de \( \frac{3\pi}{2} \)

3) Fonction \( \text{sinc}^2 \)

\[
\text{On a } \frac{A_t}{A_0} = 2.6 \cdot 10^{-2}
\]

**B)** Préliminaire : intensité diffractée par une fente rectangulaire éclairée
dessous incidence normale
1) Amplitude

On a

\[ A(k) = i \frac{b}{\sqrt{2}} \int_{-c/2}^{c/2} e^{ik_y y} e^{ik_z z} dz dy = K \text{sinc} \left( \frac{k_y b}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{k_z c}{2} \right) \]

2) Intensité correspondante

On a

\[ I = A A^* = KK^* b^2 c^2 \text{sinc} \frac{k_y b}{2} \text{sinc} \frac{k_z c}{2} = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_y b}{2} \text{sinc}^2 \frac{k_z c}{2} \]

Où \( I_0 = I(z = y = 0) \) : intensité dans la direction d’incidence.

C) Fente infiniment longue éclairée normalement

1) Amplitude par unité de longueur

On a

\[ a = \lim_{c \to +\infty} A = Kbs\text{sinc} \left( \frac{k_y b}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{k_z c}{2} \right) \]

Si \( k_z = 0 \), alors \( \text{sinc} \frac{k_z c}{2} = 1 \), donc \( a \neq 0 \)

Sinon, \( a = 0 \)

Conclusion :
La lumière est diffractée dans la direction de la petite dimension.

2) Intensité

\[ I = aa^* \]

- En fonction de \( k_y, k_z \) :

\[ I(k_y, k_z \neq 0) = 0 \]

\[ I(k_y, k_z = 0) = I_0 \text{sinc}^2 \left( \frac{k_y b}{2} \right) \]
• Angle de diffraction :

\[ k_y = \frac{\lambda}{2\pi k}, \quad \theta = \arcsin \left( \frac{k_y}{k} \right) \]

On a \( \sin \theta = \frac{k_y}{k} = \frac{\lambda}{2\pi k_y} \)

\[ \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b} ; \quad \theta_1 \] est le \( \frac{1}{2} \) angle de diffraction.

1) Si \( \lambda \ll b \), il n’y a pas de diffraction

2) Si \( \lambda \sim b, \ c >> \lambda \), il y a une diffraction.

• C’est valable pour tout type d’onde, pas seulement électromagnétique.

D) Cas d’une incidence non normale

1) Trou rectangulaire

• En optique géométrique :

\[ \vec{k} \]

• En optique physique :

On remplace simplement \( \vec{k} \) par \( \vec{k} - \vec{k}_i \), dans les expressions obtenues précédemment.

2) Fente infiniment large

Si \( k_z - k_{i,z} \neq 0 \), on a \( I = 0 \)

\[ I = I_0 \sin^2 \left( \frac{(k_y - k_{i,y})b}{2} \right) \] (où \( I_0 = I(k_y = k_{i,y}, k_z = k_{i,z}) \))

Conclusion :
La figure de diffraction est centrée sur l’image géométrique de la source.

E) Figure de diffraction sur un écran

1) Utilisation d’un point source

\[ S \]
On a dans ce cas  \( \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \)

On a  \( k_y = \frac{2\pi}{\lambda f} y \),  \( k_z = \frac{2\pi}{\lambda f} z \). Ainsi :

-  \( k_z \neq 0 \iff z \neq 0 \), donc  \( I = 0 \)
-  \( k_z = 0 \iff z = 0 \), donc  \( I = I_o \text{sinc}^2 \left( \frac{k_y b}{2} \right) = I_o \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi}{\lambda f} y b \right) \)

Il n’y a donc d’intensité que sur  \( Oz \)

\[ \text{Non visible (trop faible)} \]

2) Utilisation d’une fente source parallèle à la fente diffractante

\[ \begin{align*}
I & \leftrightarrow \vec{k} \\
& \leftrightarrow \vec{k}'
\end{align*} \]

On a donc une superposition d’ondes  \( \vec{k}' \)  \( k_{i,x} = 0 \)

\[ k_{i,\ell} \text{ variable} \]

Les franges de diffraction sont caractérisées par le fait que la frange centrale est beaucoup plus lumineuse et deux fois plus large.

3) Analyse de la figure de diffraction
Qualitativement :
- En $P_0$ :

\[ \vec{k} \]

Toutes les ondelettes émettent en phase sur le diaphragme et parcourent la même distance, donc on a une interférence constructive.
- En $P_1$ :

\[ \text{Les ondelettes sont maintenant déphasées dans le plan.} \]
\[ \text{Pour avoir une interférence totalement destructive :} \]

\[ \frac{1}{2} \text{longueur d'onde} \]

La source en bas et celle du milieu vont ainsi émettre des ondes qui seront en opposition de phase dans le plan, et les ondelettes vont ainsi se détruire mutuellement.

On aura dans ce cas $\sin \theta = \frac{\lambda/2}{b/2} = \frac{\lambda}{b}$. 

La seule possibilité pour que toutes les ondes interfèrent constructivement est que l’angle soit nul ; sinon, il y en aura toujours une qui interféra avec l’autre.

F) Frange en lumière blanche

Franges sombres :
Elles sont en $y_1 = f \frac{\lambda}{b}$, $y_2 = 2f \frac{\lambda}{b}$ …
Elles dépendent donc de la longueur d’onde :

\[ \text{On aura donc une frange centrale blanche irisée de rouge, et les autres franges seront blanches irisée de bleu vers l’intérieur et de rouge vers l’extérieur.} \]
VI Diffraction par une ouverture rectangulaire

A) Intensité diffractée

On a \( I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k_c b}{2} \text{sinc}^2 \frac{k_c c}{2} \)

B) Figure de diffraction

La tache centrale a une intensité maximale
Sur la ligne/colonne du milieu, les taches sont « simplement » secondaires (c’est la tache principale selon \( Oz \) et diffractée selon \( Oy \) ou le contraire), et sont moins lumineuse
Les autres taches sont doublement secondaire (diffraction selon les deux axes) et sont beaucoup moins lumineuses.

C) Cas d’une incidence oblique

La figure de diffraction sera simplement décalée…

VII Diffraction par une ouverture circulaire

A) Allure de la figure de diffraction

- On a une symétrie de rotation autour de \( x \).
- Dans le plan focal d’une lentille :

Environ deux fois moins large
La tache centrale s’appelle aussi la tache d’Airy.
B) Etude de la figure de diffraction

1) Intensité diffractionnée

- Formule de Fraunhofer :
  \[ A(k_x, k_z) = K \int \int t(y, z) e^{-i(k_x x + k_z z)} dx dy \]
  Avec \( t(y, z) = 1 \) si \( x^2 + y^2 < R \), 0 sinon.

  \[ k \rightarrow \theta \]
  \[ x \]

  On obtient, en intégrant, une fonction de Bessel :
  \[ A(\hat{k}) = 2K \frac{J_1(X)}{X} \quad \text{où} \quad X = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta \]

  (La courbe de \( x \rightarrow \frac{J_1(x)}{x} \) a une allure semblable à celle d’un sinus cardinal)

- On a ainsi \( I = K K^* \left( \frac{2J_1(X)}{X} \right)^2 = I_0 f(X) \)

  \( (\text{On arrête la courbe à} \quad \frac{2\pi}{\lambda} R ) \)

2) Rayon de la tache d’Airy

- Rayon angulaire :
  On a \( x_1 = 1,22\pi \), donc \( \sin \theta_1 = \frac{1,22\lambda}{2R} = 0,61 \frac{\lambda}{R} \)
  \( x_2 = 2,33\pi \), \( x_3 = 3,33\pi \)

- Rayon sur l’écran :
  \[ \rho = f \tan \theta_1 \approx f \sin \theta_1 = f \times 0,61 \frac{\lambda}{R} \]

3) Image d’un point par une lentille mince

Chapitre 21 : La diffraction
Electromagnétisme
Récapitulatif :
Pour une source ponctuelle, avec la diffraction de Fraunhofer :
(1) Une tache centrale, de loin la plus brillante, et des taches latérales moins larges et moins brillantes.
(2) La tache centrale est plus large dans le sens où le diaphragme est étroit.
(3) On a une largeur proportionnelle à \( \frac{\lambda}{R} / \frac{\lambda}{b} \)
(4) La tache centrale est centrée sur l’image géométrique
(5) On admet que lorsque la transmittance est réelle, la figure de diffraction possède un centre de symétrie.

VIII Théorème de Babinet

A) Démonstration

1) Écran diffractant

On note \( t'(\vec{r}) \) la transmittance
Pour une onde plane \( \vec{E}_i \), on a une amplitude complexe \( A'(\vec{k}) \)

2) Écran complémentaire

On aura pour l’écran complémentaire \( t''(\vec{r}) = 1 - t'(\vec{r}) \).
Pour la même onde plane \( \vec{E}_i \), on aura une amplitude complexe \( A''(\vec{k}) \)

3) Superposition des transmittances

On a \( t(\vec{r}) = t'(\vec{r}) + t''(\vec{r}) = 1 \)
- Il n’y a donc pas de diffraction :
\( A(\vec{k}) = 0 \) si \( \vec{k} \neq \vec{k}_i \), et \( A(\vec{k}) \neq 0 \) si \( \vec{k} = \vec{k}_i \)

On a \( A(\vec{k}) = K \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{y} + k \cdot z)} dy dz = K \delta(\vec{k} - \vec{k}_i) \)
- Par linéarité de l’intégration, on a \( A(\vec{k}) = A'(\vec{k}) + A''(\vec{k}) \)
Donc si \( \vec{k} \neq \vec{k}_i \), \( A'(\vec{k}) = -A''(\vec{k}) \)
Donc \( I'(\vec{k}) = I''(\vec{k}) \)
L’intensité est donc la même partout sauf éventuellement en un point.

B) Vérification expérimentale

Si on remplace une fente par un cheveu, on observe effectivement la même figure de diffraction.
IX Diffraction par un réseau plan

A) Présentation

1) Réseau simple

- Définition : plan opaque percé d’une succession de fentes parallèles, équidistantes de même largeur \( b \) et de hauteur \( c >> \lambda \).

- Caractéristique :
  - Pas du réseau : \( a \ (n = 1/\lambda) \) : nombre de fentes par unité de longueur ;
    \( n \sim 500 \text{mm}^{-1} \)
  - \( N \) traits (environ 10000)
  - \( b \) : largeur de chaque fente ; \( b \sim \lambda \)
  - \( c \) : hauteur des fentes, \( c >> \lambda \)

- Transmittance :
  - Rappel :
    (1) Porte :

(2) Peigne de Dirac :

\[
\varnothing(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)
\]

(3) Convolution :

\[
f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x'')\delta(x - x' - x'')dx'dx''
\]

- Application : expression de \( t \) :

\[
t = t(y) = (\pi(y) \otimes \varnothing(y)) \times \pi\left(\frac{y}{\lambda_0}\right)
\]

- Fabrication :

On raye une plaque de verre poli avec une pointe de diamant, ce qui aura pour effet de dépolarir le verre, et on obtient le complémentaire du réseau voulu :

Verre poli — Rayures
2) Généralisation : réseaux plans

- Définition :
  C’est une surface plane diffractante à transmittance périodique
- Réseaux unidimensionnels : \[ t(y) = (t_l(y) \otimes \cup(\frac{y}{L})) \times \pi(\frac{x}{L}) \]
- Réseaux bidimensionnels :
  \[ t(x, y) = (((t_l(x, y) \otimes \cup(\frac{x}{L})) \times \pi(\frac{x}{L})) \otimes \cup(\frac{y}{L})) \times \pi(\frac{y}{L}) \]

- Caractéristiques :
  - Période(s) spatiale(s) \( a \)
  - Nombre de période \( N \).
  - Motif : \( t_l(\vec{r}) \)

B) Utilisation

1) Eclairément par une onde plane

2) A l’infini

On suppose que les fentes sont très longues et qu’il n’y a pas de diffraction dans le sens vertical.

- Observation par transmission :

- Observation par réflexion :

  On aura une diffraction pour l’onde transmise, donc une aussi pour l’onde réfléchie.
  Si on prend un réseau constitué d’une plaque de verre, on pourra observer une figure de diffraction par réflexion, qui sera symétrique de celle par transmission.

C) Maxima principaux

On suppose que chaque trait diffracte de façon isotrope (c'est-à-dire qu’il n’y a qu’une seule source sur la largeur)
1) Condition d’interférence constructive

- Si toutes les ondelettes sont en phase, au niveau du plan, on aura bien une interférence constructive
- Sinon, on aura une interférence destructive : pour un décalage de phase de \( \delta \phi = \frac{2\pi}{N} \) entre une ondelette et la suivante, on aura un décalage de \( \pi \) entre la première et celle du milieu, et toutes les ondes vont s’annuler. On n’aura donc pas du tout de lumière.

2) Expression de \( \phi \)

- Sous incidence normale :
  On a \( \varphi_m(H) = \varphi_m(O_m) + \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_mH} \), \( \varphi_{m+1}(H) = \varphi_{m+1}(O_{m+1}) + \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_{m+1}H} \)
  Et \( \varphi_{m+1}(O_{m+1}) = \varphi_n(O_m) \)
  On a donc un décalage de phase
  \( \varphi = \varphi_m(H) - \varphi_{m+1}(H) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_mO_{m+1}} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \)
- Sous incidence oblique :
  On a \( \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin \theta - \sin \theta_i) \) (on remplace \( \vec{k} \) par \( \vec{k} - \vec{k_i} \))

3) Formule du réseau

On a une interférence constructive pour \( \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin \theta - \sin \theta_i) = 2K\pi \), \( K \in \mathbb{Z} \), donc pour des angles \( \sin \theta_k - \sin \theta_i = Kn\lambda \) (\( n = 1/a \))

Remarques :
- Pour le réseau par réflexion, on aura \( \sin \theta_k + \sin \theta_i = Kn\lambda \)
- La tache pour \( K = 0 \) correspond à celle obtenue en optique géométrique.
- \( \lambda = \frac{\lambda_0}{n_0} \) (\( n_0 \) : indice du milieu)
4) Discussion

- On a un nombre limité de maxima principaux : sous incidence normale,
  \[ K \in \left[ -\frac{1}{n\lambda}, \frac{1}{n\lambda} \right] \]
  Pour \( n = 500 \text{mm}^{-1} \), \( \lambda = 0,6 \mu \text{m} \), on a \(-3,3 \leq K \leq 3,3\) (7 valeurs possibles)
  Pour \( n = 5000 \text{mm}^{-1} \), \( -0,33 \leq K \leq 0,33\) : c’est comme s’il n’y avait pas de réseau.
  Pour \( n = 50 \text{mm}^{-1} \), on obtient 67 directions possibles

Problème : on a plus de directions possibles, mais l’intensité de chaque point en est divisée d’autant. C’est pour cela qu’on utilise principalement des réseaux avec 500 traits par millimètre, qui représente un compromis entre les deux extrêmes.

D) Amplitude et intensité diffractées

On se place sous incidence normale : \( k_{i,y} = k_{i,z} = 0 \)
Avec des fentes infiniment longues selon \( Oz \).

1) Amplitude

\[
\begin{align*}
  A(k_y) &= K \left( \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i k_y y} dy + \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i k_y y} dy + \ldots + \int_{-(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} e^{-i k_y y} dy \right) \\
  &\text{Et} \quad \int_{a-b/2}^{a+b/2} e^{-i k_y y} dy = \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i k_y y'} e^{i k_y a} dy' \\
  &\text{Donc} \quad A(k_y) = K \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i k_y y} \left( 1 + e^{-i k_y a} + \ldots + e^{-(N-1)i k_y a} \right) \\
\end{align*}
\]

- Facteur de forme :
  \[ F = K \int_{b/2}^{b/2} e^{-i k_y y} dy \]
  Il correspond à l’amplitude diffractée par une seule fente.
  \( F \) dépend du motif.

- Facteur de structure :
  \[ S = 1 + e^{-i k_y a} + \ldots + e^{-(N-1)i k_y a} = \frac{1 - e^{-i k_y Na}}{1 - e^{-i k_y a}} \]
  \( S \) est indépendant du motif.
2) Intensité

- Expression :

\[ I = A^\ast A = FF \ast SS = KK \ast b^2 \sin^3 \left( \frac{k \cdot b}{2} \right) \times \frac{\sin^2 \frac{k_y N a}{2}}{\sin^2 \frac{k_y a}{2}} \]

Ou en notant \( I_0 = I(k_y = 0) = KK \ast N^2 b^2 \):

\[ I = I_0 \sin^2 \left( \frac{k \cdot b}{2} \right) \times \frac{\sin^2 \frac{k_y N a}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{k_y a}{2}} \]

- Étude de la fonction :

\[ g(k_y) = \frac{\sin^2 \frac{k_y N a}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{k_y a}{2}} \]

\( g \) est périodique de période \( \frac{2\pi}{a} \)

(On a \( N >> 1 \))

On a donc des pics pour \( k_y = \frac{2\pi}{a} K \), de largeur \( \Delta k_y = \frac{2\pi}{Na} \)

- Figure de diffraction :

On a \( I = I_0 f(k_y) g(k_y) \) où \( f(k_y) = \sin^2 \left( \frac{k_y b}{2} \right) \)

(la figure est symétrique de l’autre côté)

On a ainsi \( k_y = \frac{2\pi}{a} K \) et \( k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \)

Donc on retrouve \( \sin \theta_k = \frac{K \lambda}{a} \)

On a aussi \( \Delta k_y = \frac{2\pi}{Na} \) (on n’a donc de la lumière que sur un petit intervalle)

Et en différenciant \( k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \), on a \( \Delta k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \delta \theta \)
Donc $\delta \theta_k = \frac{1}{\cos \theta_k} \frac{\lambda}{Na} = \frac{1}{\cos \theta_k} \frac{\lambda}{L}$

Ainsi, plus le réseau est long, plus la direction dans laquelle la lumière sort est précise.

Ordre de grandeur :
Pour $\lambda = 0,6 \mu m$, $L = 2 cm$, $\cos \theta_k = 0,5$, on obtient $\delta \theta_k \approx 5 \cdot 10^{-5} rad$ (une seconde d’angle)

3) Utilisation de la transformée de Fourier

Rappel : on a $\mathcal{F}(f \times g) = \alpha \mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{F}(g)$, $\mathcal{F}(f \otimes g) = \alpha^{-1} \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$.

- Infinité de fentes infiniment fines :
  On a une transmittance $t(y) = \cup \left( \frac{\lambda}{a} \right)$

Amplitude :

$A(k_y) = K \mathcal{F}(t)(k_y) = K \cup \left( \frac{a}{2 \pi} k_y \right)$

- Nombre fini de fentes infiniment fines :
  - Transmittance :
    On a $t(y) = \pi \left( \frac{\lambda}{a} \right) \times \cup \left( \frac{\lambda}{a} \right)$ ($L = Na$)
  - Amplitude :
    $A(k_y) = K \cup \left( \frac{a}{2 \pi} k_y \right) \otimes \text{sinc} \left( \frac{k_y L}{2} \right)$
  - Intensité :

- Nombre fini de fentes de largeur finie :
  - Transmittance :
    $t(y) = \left[ \pi \left( \frac{\lambda}{a} \right) \times \cup \left( \frac{\lambda}{a} \right) \right] \otimes \pi \left( \frac{\lambda}{a} \right)$
  - Amplitude :
    $A(k_y) = K \text{sinc} \left( \frac{k_y b}{2} \right) \times \left\{ \cup \left( \frac{a}{2 \pi} k_y \right) \otimes \text{sinc} \left( \frac{k_y L}{2} \right) \right\}$

Chapitre 21 : La diffraction
Electromagnétisme
E) Spectroscope à réseaux

1) Principe

On a \( \sin \theta_K - \sin \theta_i = Kn \lambda \), donc \( \theta_K \) dépend de la longueur d’onde pour \( K \neq 0 \).

Si \( \theta_i = 0 \), \( \sin \theta_K = K n \lambda \)
- On peut avoir des spectres non disjoints (peu pratique… ⊗)
- Il n’y a pas de dispersion pour \( K = 0 \)
- Le rouge est le plus dévié (contrairement au prisme)

2) Séparation de deux raies

On envoie sur un spectroscop e une onde contenant deux longueurs d’onde différentes \( \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_i + \Delta \lambda \) avec \( \Delta \lambda \ll \lambda_i \)

- Ecart angulaire entre les maxima principaux :
  A \( K \) fixé :
  \( \sin \theta_K - \sin \theta_i = Kn \lambda \)
  \( \Delta \theta_K \)

En différenciant l’égalité, \( \cos \theta_K \Delta \theta_K = K n \Delta \lambda \).

Donc \( \Delta \theta_K = \frac{K n \Delta \lambda}{\cos \theta_K} \)

- ½ largeur angulaire d’un maximum principal :

On a \( \delta \theta_K = \frac{\lambda}{N a \cos \theta_K} \)

On a deux cas :

Il n’y a pas de recouvrement

Les raies se recouvrent.
Critère de séparation (Rayleigh) :
Un critère peut être d’avoir une courbe d’intensité de la forme :

\[ I(\theta) \]

En fait, le critère est trop sévère :

\[ I(\theta) \rightarrow I(\theta) \]

Les raies sont donc encore discernables.
Il faut donc \( \Delta \theta_k > \delta \theta_k \)

C’est-à-dire \( K_n \Delta \lambda > \frac{\lambda}{Na} \). Donc \( \frac{\lambda}{\Delta \lambda} < \frac{K.N}{\kappa} \) (on a \( n = \frac{1}{a} \))

\( R \) : pouvoir de résolution du réseau.

Exemple :
Pour \( \lambda_1 = 5890 \ Å \), \( \lambda_2 = 5896 \ Å \) : on a \( \lambda / \Delta \lambda \sim 1000 \), donc \( KN > 1000 \)
Ainsi, avec \( K = 1 \), il suffit de 2mm de réseau avec \( n = 500 \text{mm}^{-1} \).

**X Compléments**

**A) Modification du dispositif de Fraunhofer**

1) Influence d’une translation selon \( y \).

- De \( S \):

\[ S \]

Si on décale \( S \) vers le bas, l’image \( S’ \) est décalée vers le haut avec un rapport \( \frac{f_2}{f_1} \)

- De \( D \):

Il n’y aura pas de changement (on étudie la diffraction à l’infini) :

On a \( A(k_y) = K \int_{-\infty}^{\infty} t(y)e^{-ik_yy} \, dy \)

En faisant une translation, \( t(y) \rightarrow t(y-d) = t(Y) \)

Et \( A'(k_y) = K \int_{-\infty}^{\infty} t(y-d)e^{-ik_yy} \, dy = Ke^{-ik_yd} \int_{-\infty}^{\infty} t(Y)e^{-ik_yY} \, dY = A(k_y)e^{-ik_yd} \)
Donc \( I'(k_x) = I(k_x) \)
- De \( L_1 \):

On aura le même effet en décalant \( L_1 \) vers le haut que si on décale la source vers le bas.
- De \( L_2 \):

On aura un décalage de l’image de la même quantité.

2) Influence d’un élargissement selon \( \gamma \).

- De \( S \):

On a un élargissement de la tache de diffraction :
- De \( D \):

On aura un rétrécissement de la tache de diffraction.

B) Diffraction par un ensemble d’ouvertures identiques

1) Cas général

On a \( A(\vec{k}) = K \int \int t(O\vec{P}) e^{-ik\vec{OP}} dS = \sum_{i=1}^{n} A_i(\vec{k}) \)

Où \( A_i(\vec{k}) = K \int_{S_i} t(O\vec{P}) e^{-ik\vec{OP}} dS \)

Ou, en notant \( t_i(O\vec{P}) = \begin{cases} t(O\vec{P}) & \text{si } P \in S_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \)

\( A_i(\vec{k}) = K \int_{S_i} t_i(O\vec{P}) e^{-ik(O\vec{O}_i + \vec{OP})} dS \)

\[ = e^{-ik \vec{O}_i} \int_{S_i} t_i(O\vec{P}) e^{-ik \vec{OP}} dS \]

\[ \text{indépendant de } i \]
Donc \( A(\vec{k}) = \left( k \int_{\vec{r}} |t_1(\vec{O}, \vec{P})| e^{-i\vec{q}_P \vec{r}} d\vec{S} \sum_{i=1}^{N} e^{-i\vec{q}_i \vec{r}_i} \right) \)

\( F \) : facteur de forme, correspond à l’amplitude diffractée par une seule forme

\( S \) : facteur de structure.

- Convolution :
  \( t(\vec{r}) = t_1(\vec{r}) \otimes \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \) avec \( \vec{r}_i = \overrightarrow{O O_i} \). Ainsi, \( A(\vec{k}) = K_1(\vec{k}) \times \sum_{i=1}^{N} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{O}_i} \)

- Intensité :
  \( I = FF^* SS^* \)

2) Répartition régulière ou aléatoire

- Régulière : Pour des réseaux ou des cristaux, la figure de diffraction renseigne aussi bien sur la structure que sur la forme du diaphragme.

- Aléatoire :
  - Analyse sommaire :
    On a \( I = FF^* SS^* \)

    Et \( SS^* = \left( \sum_{i=1}^{N} e^{-i\vec{q}_i \vec{r}_i} \right) \left( \sum_{j=1}^{N} e^{+i\vec{q}_j \vec{r}_j} \right) = N + \sum_{i<j} 2 \cos \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_j O_i} \)

    Comme la répartition est aléatoire, peut-on considérer que \( \sum_{i<j} 2 \cos \vec{k} \cdot \overrightarrow{O_j O_i} = 0 \) ?

    Dans ce cas, \( I = NFF^* \), ce qui correspond à la somme des intensités de \( N \) fentes simples.

    - Analyse fine :
      (1) Marche au hasard :
      Si on fait \( N \) pas aléatoirement : on parcourt une distance \( \Delta N \), et en général \( |\Delta N| > 0 \)

      Si on fait un grand nombre d’expériences comme celles-ci, on trouve une valeur moyenne \( |\Delta N| \sim \sqrt{N} \)

      On a donc un étalement.

      Dans notre cas, on a une somme de \( N^2 - N \sim N^2 \) termes, donc \( \sum_{i<j} 2 \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{O_j O_i}) \sim \sqrt{N^2} \)

      (2) Application à la diffraction :
      On a \( I = FF^* SS^* \), \( SS^* \) étant aléatoire, et \( FF^* \) fixé.

      - Poudre de Lycopode (grains très réguliers) :
        On souffle de la poudre de Lycopode sur une plaque de verre : on obtient d’après le théorème de Babinet la même chose que si on avait fait des trous.
        On trouve une tache centrale très lumineuse, avec des marbrures (« speckle »)