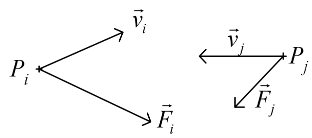
Chapitre 8 : Travail et puissance

I Puissance des actions exercées sur un système matériel

A) Puissance

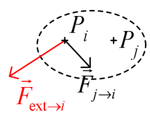
1) Système de points matériels



- Définition :

$\boxed{P = \sum_{i \in S} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i}$ (Dépend du référentiel considéré)

- Puissance intérieure et extérieure :

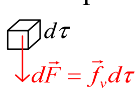


$$\vec{F}_i = \vec{F}_{\text{ext}\to i} + \sum_j \vec{F}_{j\to i}$$

$$P = \sum_{i \in S} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \underbrace{\sum_{i \in S} \vec{F}_{\text{ext}\to i} \cdot \vec{v}_i}_{P_{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{i \in S} \sum_j \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_i}_{P_{\text{int}}}$$

2) Système continu

- Répartition à densité volumique de force :



$$P = \iiint \vec{f}_v \cdot \vec{v} d\tau$$

- Répartition de couple :

$d\vec{M} = \vec{M}_v d\tau$.

On peut montrer que $P = \iiint \frac{1}{2} \vec{m}_v \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) d\tau$

B) Travail

1) Définition

$\boxed{\delta W = Pdt = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}}$

Si $\delta W > 0$, on dit que le travail est moteur, si $\delta W < 0$ il est dit résistant.
W dépend toujours du référentiel choisi.

2) Cas d'un système de forces

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

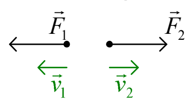
Donc $\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$

Soit $\boxed{\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}$.

C) Puissance d'un système d'actions appartenant au torseur nul

$$[\vec{0}] : \begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M} = \vec{0} \end{cases}.$$

- P est en général non nul. Exemple :



Mais : $\boxed{P \text{ est indépendant du référentiel.}}$

On se limite dans la démonstration à un système de points matériels :

On considère R absolu, R' relatif.

$$\begin{aligned} P_a &= \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{i,r} + \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{i,e} \\ &= P_r + \sum \vec{F}_i \cdot (\vec{v}_a(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'P_i}) \\ &= P_r + \vec{v}_a(O') \cdot \underbrace{\sum \vec{F}_i}_{=\vec{F}=\vec{0}} + \vec{\Omega}_e \cdot \underbrace{\sum \overrightarrow{O'P_i} \wedge \vec{F}_i}_{=\vec{M}(O')=0} \end{aligned}$$

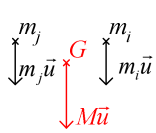
Donc $P_a = P_r$.

- Cas des actions intérieures à un système :

On a $[\vec{F}_{\text{int}}] = [\vec{0}]$ (théorème d'action et de réaction)

On a toujours en général $P_{\text{int}} \neq 0$, mais P_{int} est indépendant de R.

D) Puissance d'un système de forces proportionnelles aux masses



$(\vec{u} = \overrightarrow{\text{cte}})$

Le système réel est équivalent à $(G, M.\vec{u})$ (vu avant), et ces deux systèmes sont aussi équivalents pour P :

$$P = \sum m_i \vec{u} \cdot \vec{v}_i = \underbrace{(\sum m_i \vec{v}_i)}_{M.\vec{v}(G)} \cdot \vec{u} = M\vec{u} \cdot \vec{v}(G)$$

II Puissance des actions s'exerçant sur un solide

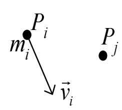
A) Les actions intérieures

Dans R lié au solide, on a : $P_{\text{int}} = 0$ (la vitesse de chaque point est nulle)

Ainsi, dans tout référentiel, $\boxed{P_{\text{int}} = 0}$ (pour un *solide*)

B) Les actions extérieures

1) Schématisation discrète



$P = \sum \vec F_i \cdot \vec v_i$.

On a $\vec v_i = \vec v(P_i) = \vec v(A) + \overrightarrow{P_iA} \wedge \vec\Omega$

Donc $P = \underbrace{\left(\sum \vec F_i\right)}_{\vec F} \cdot \vec v(A) + \underbrace{\left(\sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec F_i\right)}_{\vec M(A)} \cdot \vec\Omega$,

C'est-à-dire $\boxed{P = \vec F \cdot \vec v(A) + \vec M(A) \cdot \vec\Omega}$ (pour $A \in S$)

Remarque : $P = \underset{\substack{\vec F \\ \vec M(A)}}{[\vec F]} \cdot \underset{\substack{\vec\Omega \\ \vec v(A)}}{[\vec\Omega]}$

2) Schématisation continue

$\vec F = \iiint \vec f_v d\tau$, $\vec M(A) = \iiint \left(\vec m_v + \overrightarrow{AP} \wedge \vec f_v\right) d\tau$

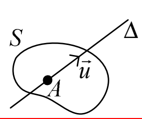
Et $P = \vec F \cdot \vec v(A) + \vec M(A) \cdot \vec\Omega$.

C) Cas particulier

1) S en translation

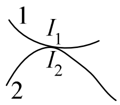
On a $\vec\Omega = \vec 0$, donc $\boxed{P = \vec F \cdot \vec v}$ ($\vec v = \vec v(A), \forall A \in S$)

2) S en rotation autour d'un axe fixe



$\boxed{P = \vec\Omega \cdot \vec M(A) = \dot\theta . \vec u \cdot \vec M(A) = \dot\theta . M_\Delta}$

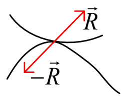
III Puissance des actions de contact entre deux solides



On suppose le contact ponctuel : pas de résistance au roulement ou au pivotement.

A) Expression de la puissance

$\{(I_1, \vec{R}_{2\to1}), (I_2, \vec{R}_{1\to2})\} = [\vec{0}]$ (on a $\vec{R}_{2\to1} = -\vec{R}_{1\to2} = \vec{R}$)



$P = \vec{R}\cdot\vec{v}(I_1) - \vec{R}\cdot\vec{v}(I_2) = \vec{R}\cdot(\vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)) = \vec{R}\cdot\vec{v}_g$

Comme $\vec{v}_g \in \pi$, $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$: $\boxed{P = \vec{T}\cdot\vec{v}_g}$.

Remarque :

Le résultat est valable dans tout référentiel, mais si $P = P_1 + P_2$, P_1 et P_2 dépendent indépendamment du référentiel.

B) Signe de *P*.

Si $\vec{v}_g = \vec{0}$; statique, roulement sans glissement, pivotement : $P = 0$.

Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, et $\vec{T} = \vec{0}$: $P = 0$

Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, et $\vec{T} \neq \vec{0}$: Comme $\vec{T}$ et $\vec{v}_g$ sont en sens opposé, on a $P < 0$.

Dans tous les cas, on a ainsi $P \leq 0$: travail résistant uniquement.

(Remarque : on a $P \leq 0$, mais on peut avoir $P_1, P_2 \gtrless 0$)

C) Liaison non dissipative

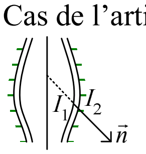
Définition :

C'est une liaison pour laquelle $\boxed{P \equiv 0}$.

Cas du contact ponctuel :

$P = 0 \Leftrightarrow \vec{T}\cdot\vec{v}_g = 0$, donc on a soit un roulement sans glissement $\vec{v}_g = \vec{0}$, soit un glissement sans frottement $\vec{T} = \vec{0}$.

Cas de l'articulation rotoïde :



La seule possibilité de liaison non dissipative est d'avoir glissement sans frottement ; on parle alors d'articulation parfaite.