

# Chapitre 12 : Oscillateurs

On va étudier les oscillateurs :

- A une dimension non amortis libres ou entretenus
- A une dimension amortis libres ou entretenus
- A trois dimensions
- Couplés
- Les portraits de phase

## I Oscillateurs harmoniques à une dimension non amortis

### A) Force attractive proportionnelle à la distance



#### 1) Equation du mouvement

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\text{donc } \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ et } x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

#### 2) Energie

- Cinétique

$$- E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m \omega^2}_k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$- E_c = \frac{1}{4} k A^2 (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) : \text{ on a une pulsation de } 2\omega$$

$$- E_{c,\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

$$- \langle E_c \rangle = \frac{1}{4} k A^2$$

- Energie potentielle ?

$$\delta W = -kx \cdot dx = -d\left(\frac{1}{2} kx^2\right). \text{ Donc } E_p = \frac{1}{2} kx^2 + \text{cte}$$

$$\text{Donc } E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{4} k A^2 (\cos(2\omega t + 2\varphi) + 1)$$

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2} k A^2, \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k A^2$$

Remarque :

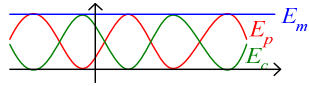
On a  $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$ , ce qui est un cas particulier du théorème du viriel :

Pour  $\vec{F} = \alpha \cdot r^n \vec{u}_r$ , une trajectoire et une vitesse bornées, on montre que :

$$\langle E_c \rangle = \frac{n+1}{2} \langle E_p \rangle$$

- Energie totale :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kA^2 = \text{cte}$$

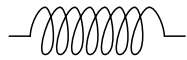


$$\begin{array}{cccc} & -A & O & A \\ E_c & 0 & \frac{1}{2}kA^2 & 0 \\ E_p & \frac{1}{2}kA^2 & 0 & \frac{1}{2}kA^2 \end{array}$$

## B) Ressort

### 1) Modèle

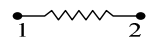
- Ressort linéaire :



- On suppose la masse du ressort négligeable devant les autres masses :

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc  $\underbrace{[m\vec{a}]}_{[0]} = [\vec{F}_{\text{ext}}]$

- Actions exercées par les extrémités du ressort :



On a  $[\vec{F}] = [0]$ , donc  $\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0} \end{cases}$

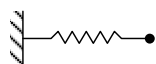
Les actions exercées sont donc opposées *et* colinéaires.

- Loi phénoménologique :

On a  $\|\vec{F}_i\| = k|l - l_0|$ .

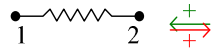
$\vec{F}_i$  est dirigé vers l'extérieur si  $l < l_0$ , et vers l'intérieur si  $l > l_0$ .

### 2) Mise en équation quand une extrémité est fixe



- Orientation de l'axe du ressort
- $x$  : abscisse de l'extrémité mobile du ressort  
 $x_0$  : abscisse de l'extrémité mobile du ressort à vide
- $F_x = -k(x - x_0)$ , et  $E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$
- On n'a pas fixé d'origine ; on peut choisir  $x_e = 0$  (position d'équilibre)

### 3) Mise en équation quand les deux extrémités peuvent se déplacer



- Orienter l'axe
- On a  $F_{1,x} = \pm k(l - l_0)$ ,  $F_{2,x} = \mp k(l - l_0)$
- Exprimer  $l$  en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  :

On prend  $l > 0$  :  $l = x_2 - x_1$  pour l'orientation en rouge

$l = x_1 - x_2$  pour l'orientation en vert

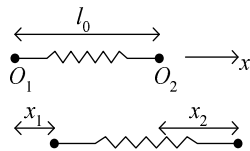
$F_{1,x}$  s'exprime en  $-kx_1$ ,  $F_{2,x}$  en  $-kx_2$

Ainsi :

Pour l'orientation rouge,  $F_{1,x} = k(x_2 - x_1 - l_0)$  et  $F_{2,x} = -k(x_2 - x_1 - l_0)$

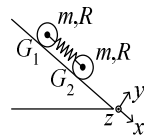
Pour l'orientation verte,  $F_{1,x} = -k(x_1 - x_2 - l_0)$  et  $F_{2,x} = k(x_1 - x_2 - l_0)$

- Si on prend deux origines différentes :



On a  $l = l_0 + x_2 - x_1$

### 4) Exemple



On suppose que les boules roulent sans glisser.

On a ainsi deux degrés de liberté.

- Système : {boule 1}, soumis à :

$[\vec{P}_1]$ ,  $[\vec{F}_1]$ ,  $[\vec{R}]$

$$\text{Donc } \begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg \sin \alpha + k(x_2 - x_1 - l_0) + \bar{T}_1 \\ 0 = -mg \cos \alpha + N_1 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à  $G_1z$  :

$$\frac{2}{5} mR^2 \ddot{\theta}_1 = \bar{T}_1 R$$

On a  $-R_1 \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1$ , donc  $-R_1 \ddot{\theta}_1 = \ddot{x}_1$  et :

$$\frac{7}{5} m\ddot{x}_1 = mg \sin \alpha + k(x_2 - x_1 - l_0)$$

- Système {boule 2} :

$$\text{On a de même } \frac{7}{5} m\ddot{x}_2 = mg \sin \alpha - k(x_2 - x_1 - l_0)$$

- On pose  $x_G = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $x_r = x_2 - x_1 - l_0$

Ainsi, les équations deviennent :

$$\frac{7}{5}m\ddot{x}_G = mg \sin \alpha \text{ et } \frac{7}{5}m\ddot{x}_r = -2kx_r .$$

Le centre de gravité a donc un mouvement uniformément accéléré ( $x_G$ )

Et les deux boules ont un mouvement sinusoïdal ( $x_r$ )

## C) Oscillateur harmonique

### 1) Définition

C'est un paramètre  $\rho(t)$  décrivant le système ( $x, \theta, i \dots$ ) tel que :

$$\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = \lambda, \text{ où } \omega \text{ est une constante réelle.}$$

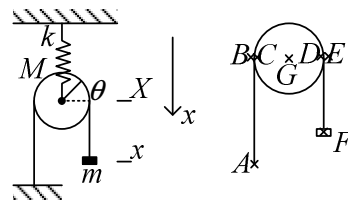
### 2) Intégrale première

En multipliant par  $\dot{\rho}$ ,  $\ddot{\rho}\dot{\rho} + \omega^2 \rho\dot{\rho} = \lambda\dot{\rho}$

Puis en intégrant :  $\frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \rho^2 = \lambda\rho + \mu$

$$\text{Ou } \dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2 = \alpha\rho + \beta.$$

### 3) Exemples



On suppose le fil sans masse, inextensible et qu'il ne glisse pas sur la poulie  
On n'a qu'un seul degré de liberté.

Relations entre  $x, X, \theta$  :

On a  $\vec{v}(A) = \vec{v}(B) = \vec{0}$ . Donc  $\vec{v}(C) = \vec{0}$ , puis on obtient  $\vec{v}(G)$  et  $\vec{v}(F) (= \vec{v}(D))$  avec la formule de Varignon. On trouve alors la relation :

$$\dot{x} = -2R\dot{\theta}, \dot{X} = -R\dot{\theta}.$$

Système : {poulie, fil, masse}

Le système est conservatif :  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{F}$  dérivent d'une énergie potentielle, et les autres (dont les forces intérieures) ne travaillent pas.

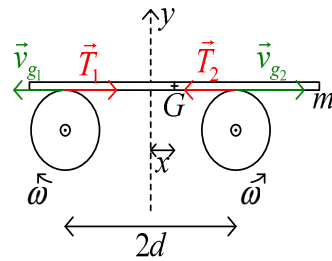
$$\text{Ainsi, } \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 - MgX - mgx + \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 = \text{cte}$$

$$\text{Ou } \frac{1}{2}\left(4m + M + \frac{J_{\Delta}}{R^2}\right)\dot{X}^2 - MgX - 2mgX + \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 = \text{cte}$$

$$\text{Et donc en dérivant, } \left(4m + M + \frac{J_{\Delta}}{R^2}\right)\ddot{X} + k(X - X_0) - Mg - 2mg = 0$$

Ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique.

Oscillateur de Timoshenko :



On suppose qu'il y a toujours glissement de la planche sur les roues. (pas de roulement)

- On n'a qu'un seul degré de liberté  $x$ .
- Référentiel terrestre galiléen
- Système {planche}
- Actions exercées sur la planche :  $[\vec{P}]$ ,  $[\vec{R}_1]$ ,  $[\vec{R}_2]$ .
- Théorème de la résultante dynamique :

$$m\ddot{x} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = T_1 - T_2 \quad (\text{où } T_1, T_2 > 0)$$

$$0 = N_1 + N_2 - mg$$

Théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta = Gz$  :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta}$$

$$\text{Soit } 0 = -N_1(d+x) + N_2(d-x)$$

(On peut considérer que la planche est plate, les actions tangentielles n'ont donc pas de moment par rapport à  $\Delta$ )

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} N_1 + N_2 = mg \\ (N_1 + N_2)x = (N_2 - N_1)d \end{cases}$$

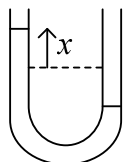
$$\text{Donc } N_2 - N_1 = mg \frac{x}{d} \quad (\text{et } N_2 = \frac{1}{2}mg\left(1 + \frac{x}{d}\right), N_1 = \frac{1}{2}mg\left(1 - \frac{x}{d}\right))$$

$$\text{Loi de Coulomb : } T_1 = fN_1, T_2 = fN_2.$$

$$\text{Donc } m\ddot{x} = f(N_1 - N_2) = -fmg \frac{x}{d}$$

$$\text{Ou } \ddot{x} + \underbrace{f \frac{g}{d}}_{\omega_0^2} x = 0$$

Troisième exemple : oscillation d'un liquide dans un tube en U :



Modélisation : on néglige les dimensions transversales, c'est-à-dire qu'on considère que tous les points dans une section du tube ont la même vitesse (ce qui n'est pas rigoureusement vrai dans la coudée)

On suppose le fluide non visqueux (c'est-à-dire parfait)

Le système {eau} constitue un système conservatif :

Le poids dérive d'une énergie potentielle, la réaction du tube de travail pas. Pour les forces intérieures, on admet qu'elles ne travaillent pas non plus (fluide non visqueux)

$$\text{On a ainsi } \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p = \text{cte}$$

Calcul de  $E_p$  : quand le système est à l'équilibre, on prend  $E_p = 0$ .

$$\text{Sinon : } E_p = \rho \cdot s \cdot x \times g \frac{x}{2} - (\rho \cdot s \cdot x \times g \frac{-x}{2}) = \rho \cdot s \cdot g \cdot x^2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \rho s g \cdot x^2 = \text{cte}$$

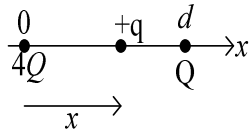
En dérivant,  $m\ddot{x} + 2\rho \cdot s \cdot g \cdot x = 0$

$$\text{Soit } \ddot{x} + 2\frac{g}{l}x = 0 \text{ (avec } m = \rho \cdot s \cdot l \text{).}$$

Remarque :  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ , indépendant de  $\rho$ .

## D) Mouvement d'un système dépendant d'un seul paramètre autour d'une position d'équilibre stable

### 1) Exemple 1 : mouvement unidimensionnel d'une charge électrique



On suppose que  $qQ > 0$ .

Position d'équilibre :

$$\frac{4Qq}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2} = 0, \text{ donc } x_e = \frac{2d}{3}$$

Petits mouvements autour de l'équilibre :

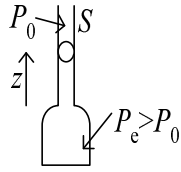
Pour  $X = x - x_e \ll 1$

$$\text{On a } x^{-2} = x_e^{-2} \left(1 + \frac{X}{x_e}\right)^{-2} = x_e^{-2} \left(1 - \frac{2X}{x_e}\right)$$

$$\text{Et } (d-x)^{-2} = (d-x_e - X)^{-2} = \left(\frac{d}{3}\right)^{-2} \left(1 + \frac{6X}{d}\right)$$

$$\text{Donc } m\ddot{X} = \frac{-81Qq}{4\pi\epsilon_0 d^3} X$$

## 2) Méthode de Ruchardt



On glisse une bille de section  $S$  dans le goulot, lui aussi de section  $S$ .  
La bille va ainsi rester coincée.

Actions exercées sur la bille :  $\vec{P}, \vec{F}_p, \vec{R}$ .

Etude du mouvement :

- Equation mécanique :

$$\text{On a } m\ddot{z} = -mg + PS - P_0S$$

$$\text{Et à l'équilibre } 0 = -mg + P_eS - P_0S$$

$$\text{Donc } m\ddot{z} = (P - P_e)S$$

- Equation thermodynamique : calcul de  $P(z)$ .

Hypothèses : on suppose la transformation adiabatique et réversible.

Ainsi,  $PV^\gamma = \text{cte}$

On suppose de plus que les mouvements sont petits.

$$\text{En différenciant logarithmiquement, } \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{P - P_e}{P_e} + \gamma \frac{V - V_e}{V_e} = 0$$

$$\text{Soit } P - P_e = -\gamma \frac{P_e}{V_e} Sz$$

En remplaçant dans la première équation,

$$m\ddot{z} = -\gamma \frac{P_e}{V_e} S^2 z$$

$$\text{Donc } \ddot{z} + \omega^2 z = 0, \text{ avec } \omega = \sqrt{\gamma \frac{P_e S^2}{V_e m}}$$

Remarque : cette méthode permet de déterminer  $\gamma$  expérimentalement.

## 3) Approximation harmonique

- Mouvement d'un point sur un axe :

Pour une équation de la forme  $m\ddot{x} = f(x)$ .

On suppose qu'il y a une position d'équilibre.

- Petits mouvements autour d'une position d'équilibre :

$$\text{Pour } x - x_e \ll 1, m\ddot{x} = \underset{=0}{F(x_e)} + F'(x_e)(x - x_e) + \frac{1}{2} F''(x_e)(x - x_e)^2 + \dots$$

Si  $F'(x_e) < 0$ , la position est stable et on a des oscillations harmoniques

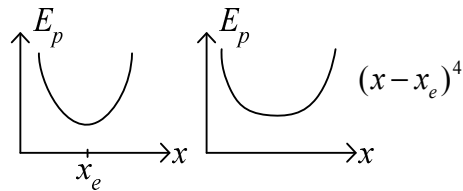
Si  $F'(x_e) > 0$ , la position est instable.

Si  $F'(x_e)=0$  : Soit  $F''(x_e) \neq 0$ , et l'équilibre est instable car  $(x-x_e)^2$  ne change pas de signe, et une direction est instable, soit  $F''(x_e)=0$  et on recommence avec  $F'''(x_e)$  comme pour  $F'(x_e)$  (mais on n'a plus des solutions harmoniques)

- Energie potentielle :

$$\text{Si } F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

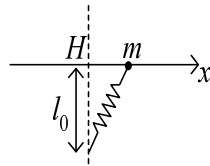
$$\text{On a } E_p(x) = E_p(x_0) + \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x_e)}_{=F'(x_e)=0} \times (x-x_e) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)}_{-F''(x_e)} \times (x-x_e)^2 + \dots$$



• Cas général :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= g(\rho) \\ &= \underbrace{g(\rho_e)}_{=0} + g'(\rho_e)(\rho - \rho_e) + \dots \end{aligned}$$

#### 4) Exemple d'oscillations anharmoniques



le système {bille} est un système conservatif.

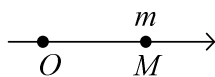
$$\text{On a } \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \text{cte}$$

$$\text{Et } l = \sqrt{l_0^2 + x^2} = l_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{l_0^2}} = l_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2l_0^2} \right)$$

$$\text{Donc } l - l_0 \approx \frac{x^2}{2l_0}, \text{ et l'équation devient } \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{8} k \frac{x^4}{l_0^2} = \text{cte}.$$

$$\text{Donc en dérivant } m \ddot{x} + \frac{k}{2} \frac{x^3}{l_0^2} = 0.$$

#### E) Oscillations forcées





En plus de la force attractive, on ajoute une force  $\vec{F} = F(t)\vec{u}_x$ , colinéaire à la force attractive, et où  $F(t)$  est périodique de pulsation  $\Omega$ .

### 1) Mouvement

Le principe fondamental s'écrit (en projection sur  $x$ ) :  $m\ddot{x} = -kx + F(t)$ .

Soit  $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$ , où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Solution de l'équation homogène associée :

$$x = B \cos(\omega t + \psi)$$

- Solution particulière :

Comme  $F(t)$  est périodique, on peut le décomposer en série de Fourier et :

$$F(t) = A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t) + \dots$$

Ainsi, il suffit de s'intéresser à une excitation sinusoïdale, puis de sommer :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_m}{m} \cos(\Omega t)$$

Méthode complexe :

On cherche une solution particulière de la forme  $x = A \cos(\Omega t + \varphi)$ .

On peut établir un isomorphisme entre l'espace des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\Omega$  et le corps des complexes :

À  $x = x_m \cos(\Omega t + \varphi)$ , on fait correspondre le complexe  $\underline{x} = x_m e^{i\varphi}$

Ainsi,  $x_1 + x_2 \leftrightarrow \underline{x}_1 + \underline{x}_2$

$$\frac{dx}{dt} \leftrightarrow i\Omega \underline{x}$$

$$\sum a_n \frac{d^n x}{dt^n} = \sum b_p \cos(\Omega t + \varphi_p) \leftrightarrow \sum a_n (i\Omega)^n \underline{x} = \sum b_p e^{i\varphi_p}$$

$$\cos(\Omega t) \leftrightarrow 1$$

$$\sin(\Omega t) \leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

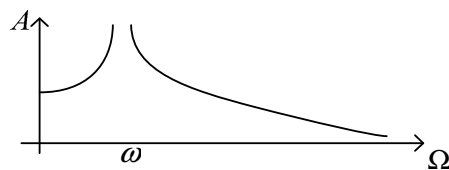
Remarque :

En général,  $x_1 x_2 \leftrightarrow \underline{x}_1 \underline{x}_2$

Amplitude complexe (pour  $\Omega \neq \omega$ ) :

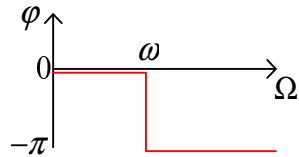
Dans ce cas, l'équation devient  $(-\Omega^2 + \omega^2)\underline{x} = \frac{F_m}{m}$ , soit  $\underline{x} = \frac{\frac{F_m}{m}}{\omega^2 - \Omega^2}$ , et

$$\text{donc } A = |\underline{x}| = \frac{\frac{F_m}{m}}{|\omega^2 - \Omega^2|}$$



Si  $\Omega < \omega$ , on a  $\varphi = 0$ .

Si  $\Omega > \omega$ , on a  $\varphi = -\pi [2\pi]$



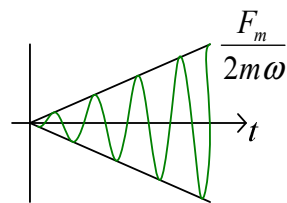
Résonance : solution particulière si  $\Omega = \omega$  :

$$At \cos(\Omega t + \varphi), \quad A = \frac{F_m}{2m\omega}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } x = \frac{F_m}{2m\omega} t \sin(\Omega t)$$

- Solution générale pour la résonance :

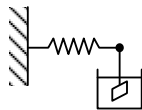
$$x = B \cos(\omega t + \psi) + \frac{F_m}{2m\omega} t \sin(\omega t)$$



- Conséquences :
  - Fonctionnement dans la limite de validité du modèle
  - Si on a des forces de frottement en  $-f\dot{v}$ , elles ne deviennent plus négligeables pour  $\dot{x}$  assez grand.
  - Le fonctionnement peut n'être plus linéaire.

## II Oscillateur unidimensionnel amorti par frottement visqueux

### A) Oscillations libres



#### 1) Analyse

- Physique :
  - Lorsque  $k$  est important et  $f$  faible, on doit avoir beaucoup d'oscillations
  - Quand au contraire  $k$  est faible et  $f$  important, on n'en aura aucune.
- Analyse dimensionnelle :
  - On a  $\vec{F}_f = -f\vec{v}$ , donc  $[f] = [M][T]^{-1}$ ,  $[k] = [M][T]^{-2}$ ,  $[m] = [M]$ ,  $[x_0] = [L]$
  - Donc  $\frac{mk}{f^2}$  est sans dimension. On aura donc une relation de la forme

$$\frac{mk}{f^2} > \dots \text{ pour avoir des oscillations.}$$

Si l'amortissement est en  $-f\dot{v}^2$ , c'est  $k$  qui n'intervient plus...

## 2) Equation du mouvement

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}$$

$$\text{Donc } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, Q = \frac{\sqrt{mk}}{f}$$

## 3) Différents régimes

- On cherche une solution de la forme  $e^{\lambda t}$ . L'équation équivaut alors à :

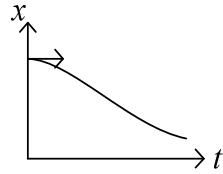
$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

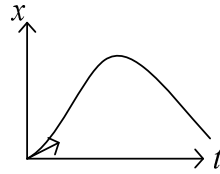
- Régime apériodique :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-, \text{ et } x = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{\sqrt{\Delta'}t} + Be^{-\sqrt{\Delta'}t})$$



Sans vitesse initiale, hors équilibre



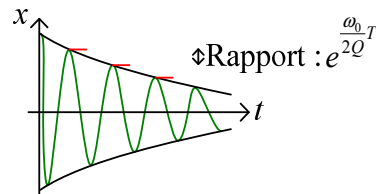
Avec vitesse initiale, à l'équilibre

- Régime pseudo-périodique :

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$$

$$\text{On a } (i\omega)^2 = \Delta', \text{ avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$$

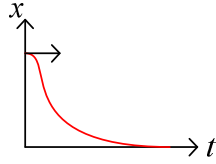
$$\text{On a une solution de la forme } x = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$



$$\delta = \ln \left| \frac{x(t)}{x(t+T)} \right| = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\pi \omega_0}{Q \omega} \text{ (décrément logarithmique)}$$

- Régime critique (théorique)

$$\text{C'est lorsque } Q = \frac{1}{2}$$



Correspond au retour le plus rapide à l'équilibre sans oscillation

- Amortissement :  
Les trois régimes tendent vers 0.

## B) Oscillations forcées

On ajoute à  $-k\vec{r}$ ,  $-f\vec{v}$  une force sinusoïdale  $F_m \cos(\Omega t) \cdot \vec{u}_x$

### 1) Mouvement

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos \Omega t$$

Solution de l'équation homogène : amortie.

Au bout d'un certain temps, seule la solution particulière va rester

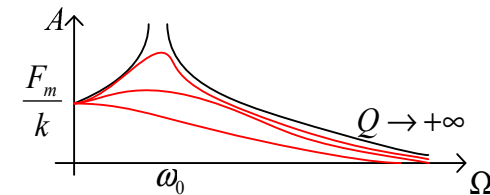
Solution particulière :

On la cherche de la forme  $x = A \cos(\Omega t + \varphi)$

$$\text{Donc } \underline{x}(-\Omega^2 + i\Omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = \frac{F_m}{m}, \text{ soit } \underline{x} = \frac{F_m / m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

- Amplitude :

$$A = \frac{F_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$$

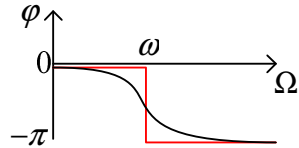


Lorsque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on n'a plus de maximum.

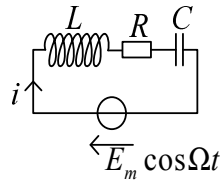
- Déphasage :

$$\text{On a } \underline{x} = \frac{F_m}{\underbrace{m(\dots)}_{\in \mathbb{R}}} (\omega_0^2 - \Omega^2 - i\Omega \frac{\omega_0}{Q})$$

$$\text{Donc } \tan \varphi = \frac{\Omega \omega_0 / Q}{\Omega^2 - \omega_0^2}, \text{ et } \text{sgn}(\sin \varphi) = \text{sgn}(-\Omega \frac{\omega_0}{Q}) < 0 \text{ donc } -\pi < \varphi < 0$$



## 2) Analogie électrique



$$\text{On a } L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E_m \cos \Omega t$$

$$\text{Soit } L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_m \cos \Omega t$$

$$\text{Par analogie avec } m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = F_m \cos \Omega t$$

Ainsi :

- $q \leftrightarrow x$  ;  $i \leftrightarrow v$  ;  $F \leftrightarrow u$
- $L \leftrightarrow m$  ;  $R \leftrightarrow f$  ;  $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$
- $\varepsilon_l = \frac{1}{2} Li^2 \leftrightarrow E_c = \frac{1}{2} mv^2$  ;  $\varepsilon_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \leftrightarrow E_p = \frac{1}{2} kx^2$  ;  
 $P_J = Ri^2 \leftrightarrow P_f = f\vec{v} \cdot \vec{v} = f v^2$

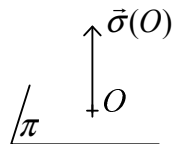
## III Oscillateur harmonique à trois dimensions



### A) Trajectoire

#### 1) Plane

Le mouvement est à force centrale, donc  $\vec{\sigma}(O) = \text{cte} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$



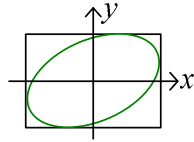
$\pi$  est déterminé par  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$

## 2) Elliptique

$$m\vec{a} = -k\vec{r}$$

$$\text{Dans le plan de la trajectoire, } \begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x = A_x \cos(\omega t) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



On a ainsi deux oscillateurs harmoniques.

## B) Mouvement

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = \frac{\vec{\sigma}}{2m} = \text{cte}$$

## C) Energie

### 1) Cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = E_{c,x} + E_{c,y}$$

### 2) Potentielle

$$E_p = \frac{1}{2} k r^2 \text{ (on a } \delta W = -k\vec{r} \cdot d\vec{r} = -d(\frac{1}{2} k r^2) \text{)}$$

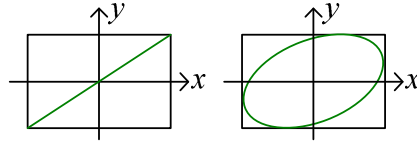
$$\text{Donc } E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 = E_{p,x} + E_{p,y}$$

### 3) Energie totale

$$E_m = E_c + E_p = E_{c,x} + E_{c,y} + E_{p,x} + E_{p,y}$$

$$\text{Et } E_{m,x} = \frac{1}{2} k A_x^2, \quad E_{m,y} = \frac{1}{2} k A_y^2$$

$$\text{Donc } E_m = \frac{1}{2} k A^2 \text{ avec } A^2 = A_x^2 + A_y^2$$



Tous ont ainsi la même énergie mécanique.

## **IV Oscillateurs couplés**

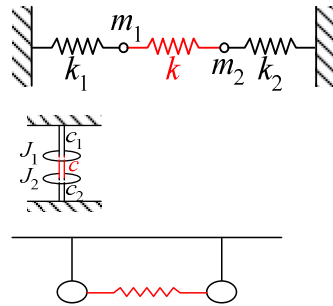
### A) Définition

C'est un système ayant un système d'équation de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{\rho}_1 = -\omega_1^2 \rho_1 + f_1(\rho_2, \dot{\rho}_2, \rho_1, \dot{\rho}_1) \\ \ddot{\rho}_2 = -\omega_2^2 \rho_2 + f_2(\rho_1, \dot{\rho}_1, \rho_2, \dot{\rho}_2) \end{cases}$$

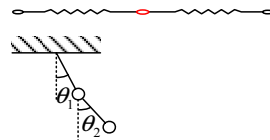
### B) Exemples de couplage

#### 1) Couplage par élasticité

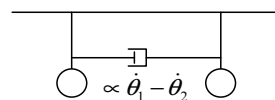


(Pour des petites oscillations)

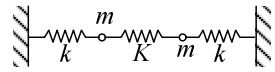
#### 2) Couplage par inertie



#### 3) Couplage par viscosité

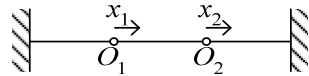


### C) Etude d'un cas particulier



On suppose qu'à l'équilibre, les ressorts ne sont ni comprimés ni étendus.

#### 1) Equation du mouvement



Principe fondamental de la dynamique :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \underbrace{x_{1,0}}_{=0}) + K(\underbrace{l_0 + x_2 - x_1 - l_0}_l) = -kx_1 + K(x_2 - x_1)$$

$$\text{Ou } \ddot{x}_1 = -\left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right)x_1 + \frac{k}{m}x_2$$

$$\text{Et de même } m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1), \text{ ou } \ddot{x}_2 = \frac{K}{m}x_1 - \left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right)x_2$$

#### 2) Energie potentielle

Terme de couplage :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(k+K)x_1^2 + \frac{1}{2}(k+K)x_2^2 - Kx_1x_2 \end{aligned}$$

#### 3) Modes propres

- Définition :

C'est un couple de solutions de l'équation, sinusoïdales de pulsation  $\omega$  identique pour  $x_1, x_2$  :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{On pose } \underline{x}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}, \quad \underline{x}_2 = A_2 e^{i\varphi_2} \quad (\text{et } x = \text{Re}(\underline{x}e^{i\omega t}))$$

- Pulsations propres :

$$\begin{cases} \underline{x}_1 \left( \omega^2 - \frac{k+K}{m} \right) = \frac{-K}{m} \underline{x}_2 \\ \underline{x}_1 \frac{-K}{m} = \underline{x}_2 \left( \omega^2 - \frac{k+K}{m} \right) \end{cases}$$

$$\text{Pour avoir des solutions autres que 0, il faut que } \omega^2 - \frac{k+K}{m} = \pm \frac{K}{m}$$



$$- : \omega^2 = \frac{k}{m}, \text{ donc } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_G$$

$$+ : \omega^2 = \frac{k+2K}{m}, \text{ donc } \omega = \sqrt{\frac{k+2K}{m}} = \omega_R$$

On a ainsi deux modes propres.

- Amplitudes complexes :
  - Mode  $G$  : on a alors  $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ , donc  $x_1 = x_2 = A \cos(\omega_G t + \varphi)$ .
  - Mode  $R$  : on a alors  $\underline{x}_1 = -\underline{x}_2$ , donc  $x_1 = -x_2 = A \cos(\omega_R t + \varphi)$

- Description des modes :

- Mode  $G$  :

(1)  $x_1 = x_2$

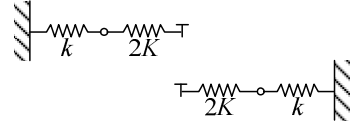
(2) Dans ce mode, le ressort central n'est pas sollicité. On pourrait le retirer.

(3) Pour avoir ce mode, il faut avoir  $x_{1,0} = x_{2,0}$  et  $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0}$

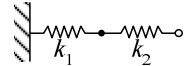
- Mode  $R$  :

(1)  $x_1 = -x_2$

(2) On pourrait « couper » le ressort central en deux parties :



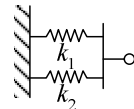
Justification (pour le «  $2K$  ») :



On a  $F = F_1 = F_2$  et  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ .

$$\text{Donc } \frac{1}{k} = \frac{\Delta l}{F} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{F} = \frac{\Delta l_1}{F_1} + \frac{\Delta l_2}{F_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Pour des ressorts en parallèle :



On a  $F = F_1 + F_2$ ,  $\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$ . Donc  $k = k_1 + k_2$ .

(3) On doit ici avoir  $x_{1,0} = -x_{2,0}$ ,  $\dot{x}_{1,0} = -\dot{x}_{2,0}$

#### 4) Solution générale

- On peut montrer que :

$$x_1 = A_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) + A_R \cos(\omega_R t + \varphi_R)$$

$$\text{Et } x_2 = A_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) - A_R \cos(\omega_R t + \varphi_R),$$

C'est-à-dire que les deux modes forment une base de solutions.

$$\text{On a } \begin{cases} x_1 = \text{Re}(\underline{A}_G e^{i\omega_G t} + \underline{A}_R e^{i\omega_R t}) \\ x_2 = \text{Re}(\underline{A}_G e^{i\omega_G t} - \underline{A}_R e^{i\omega_R t}) \end{cases}$$

- En général, le mouvement n'est pas sinusoïdal, et même pas périodique.
- Il reste alors à trouver  $\underline{A}_G$ ,  $\underline{A}_R$  (ou  $A_G, A_R, \varphi_G, \varphi_R$ )

## D) Généralisation

(1) Pour  $N$  oscillateurs couplés, on a un système de  $N$  équations différentielles couplées.

(2) Si ces équations sont linéaires, on cherche une solution en  $e^{\lambda t}$ , ou  $x_j = \text{Re}(\underline{x}_j e^{\lambda t})$

On a ainsi un système de Cramer en  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N$ , homogène.

Pour une solution non triviale, il faut que le déterminant soit nul.

On a alors un polynôme en  $\lambda$ , de degré  $N$ , donc  $N$  racines  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}$ , ou  $\lambda^{(k)} = a^{(k)} + ib^{(k)}$  ( $a^{(k)}, b^{(k)} \in \mathbb{R}$ )

- Si  $\forall k, a^{(k)} = 0$ , on a  $\lambda^{(k)} = ib^{(k)} = i\omega^{(k)}$ , qui forme une base de  $N$  modes propres sinusoïdaux

- Si  $a^{(k)} < 0$ , on a un mode propre amorti  $e^{a^{(k)}t} e^{ib^{(k)}t}$

- Si  $a^{(k)} > 0$ , on a un mode propre divergent.

(3)  $x_j = \text{Re}(\sum_k \underline{A}_j^{(k)} e^{\lambda^{(k)}t})$ , où  $\underline{A}_j^{(k)}$  dépend des conditions initiales.

(4) Stabilité :

Si  $\forall k, a^{(k)} \leq 0$ , l'oscillation du système est stable, il ne diverge pas.

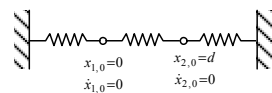
Si pour un  $k$ ,  $a^{(k)} > 0$ , la solution divergera.

## E) Battements

On reprend l'exemple précédent :

$$\text{On a } \omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad \omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{2K}{k}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2K}{k}}$$

$$\text{Si } K \ll k, \quad \omega_R \approx \omega_0 \left(1 + \frac{K}{k}\right).$$



$$\text{On a } x_1 = A_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) + A_R \cos(\omega_R t + \varphi_R),$$

$$\text{Et } x_2 = A_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) - A_R \cos(\omega_R t + \varphi_R)$$

Donc après calcul :

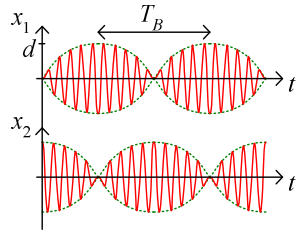
$$x_1 = \frac{d}{2} (\cos(\omega_G t) - \cos(\omega_R t)) = d \sin\left(\frac{\omega_R + \omega_G}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_R - \omega_G}{2} t\right)$$

$$\text{Et } x_2 = \frac{d}{2} (\cos(\omega_G t) + \cos(\omega_R t)) = d \cos\left(\frac{\omega_R + \omega_G}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_R - \omega_G}{2} t\right)$$

$$\text{On a } \omega_R + \omega_G \approx 2\omega_0, \quad \omega_R - \omega_G \approx \omega_0 \frac{K}{k}$$

$$\text{Donc } x_1 = d \sin(\omega_0 t) \sin\left(\omega_0 \frac{K}{2k} t\right) \text{ et } x_2 = d \cos(\omega_0 t) \cos\left(\omega_0 \frac{K}{2k} t\right)$$

Comme  $\omega_0 \gg \omega_0 \frac{K}{2k}$ , on a ainsi une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega_0$  dont l'amplitude est lentement modulée à la pulsation  $\omega_0 \frac{K}{2k}$  :



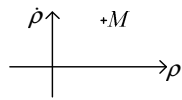
Pulsation de battement :  $\omega_B = \omega_0 \frac{K}{k}$   
 ( $T_B$  correspond à la moitié de la période de la sinusoïde)

## V Portrait de phase des oscillateurs

### A) Principe

Système à un degré de liberté :  $\rho(t)$ , solution d'une équation différentielle.

#### 1) Plan de phase



#### 2) Trajectoire de phase

- C'est la courbe décrite par  $M$  dans le plan de phase.
- Si  $M$  est dans le plan supérieur,  $\dot{\rho} > 0$  donc  $M$  se déplace vers la droite.  
 Si  $M$  est dans le plan inférieur,  $\dot{\rho} < 0$  donc  $M$  se déplace vers la gauche.  
 Ainsi, les flèches dans un portrait de phase sont inutiles.

#### 3) Portrait de phase

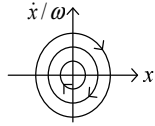
La trajectoire de phase dépend de la position  $M_0$  initiale du point  $M$ , de l'équation différentielle. Ainsi, si on dessine toutes les trajectoires possibles, le graphe obtenu traduit l'équation différentielle.

Les équations différentielles en mécanique sont de degré 2, donc  $\rho_0$  et  $\dot{\rho}_0$  déterminent le mouvement.

## B) Oscillateurs non amortis

### 1) Oscillateur harmonique

On a  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Donc  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = \text{cte}$ , ou  $\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = \text{cte}$ , ce qui correspond à l'équation d'un cercle.



### 2) Pendule pesant

Equation énergétique :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

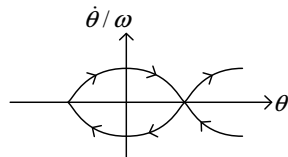
$$\text{Donc } \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{cte}$$

$$\text{Ou } \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \underbrace{mgl(1 - \cos \theta)}_{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \text{cte}$$

$$\text{Donc } \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{4mgl}{J_{\Delta}}}_{4\omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{cte}, \text{ soit } \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} = A$$

On a trois cas :

(1) Soit  $A = 4$ , et  $\frac{\dot{\theta}}{\omega} = \pm 2 \cos \frac{\theta}{2}$  :



(Cette courbe s'appelle la séparatrice)

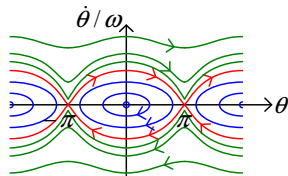
(2) Soit  $A < 4$  :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 < 4 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Donc  $\dot{\theta}$  s'annule, et  $\theta$  est borné

(3) Soit  $A > 4$  :

$\dot{\theta}$  ne s'annule pas.



## C) Oscillateurs amortis

### 1) Amortissement par frottement fluide

- Evolution temporelle :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

$$\text{Ou } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, Q = \sqrt{\frac{mk}{f^2}}$$

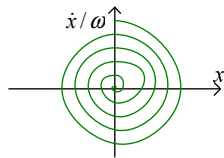
$$\text{Si } Q \gg \frac{1}{2} :$$

$$x = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0)$$

- Equation énergétique :

$$\ddot{x}x + \omega_0^2 x\dot{x} = -\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}^2, \text{ donc } d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) + \omega_0^2 d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}dx$$

- Trajectoire de phase (passer en polaire pour le tracer)

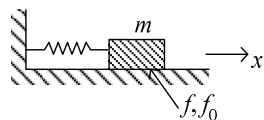


En général, le nombre de spirales visibles est de l'ordre de  $Q$ .

$O$  constitue un attracteur ponctuel.

Si au lieu de  $-f\dot{x}$  on avait  $+f\dot{x}$ , on aurait obtenu une spirale divergente.

### 2) Oscillateur harmonique amorti par frottement solide



- Différentes phases du mouvement :

On a en projection  $m\ddot{x} = -kx + \bar{T}$ , et  $0 = N - mg$ , soit  $N = mg$

- Immobilité : lorsque  $\ddot{x} = 0$ , on a  $x = \frac{\bar{T}}{k}$ , tant que  $|\bar{T}| < f_0 mg$ , c'est-à-dire

$$\text{tant que } |x| < a_0 = \frac{f_0 mg}{k}$$

- Lorsque  $\dot{x} > 0$  :

On a  $\bar{T} = -fmg$ . Donc  $m\ddot{x} + kx = -fmg$ , soit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg$

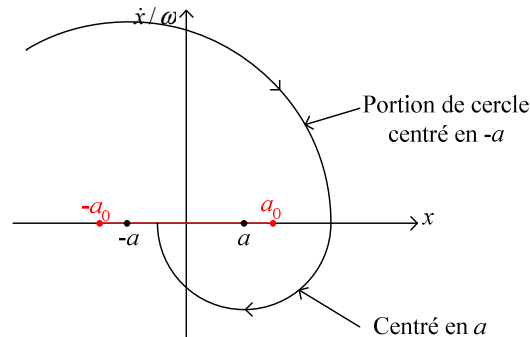
$$\text{Donc } \frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + x = -\frac{fmg}{k}, \text{ et en intégrant } \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{2} x^2 = -\frac{fmg}{k} x + \text{cte}$$

$$\text{Donc } \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} + x^2 + 2ax = \text{cte}, \text{ soit } \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + (x+a)^2 = \text{cte}. \text{ On a donc une}$$

portion de cercle dont le centre a pour coordonnées  $\dot{x} = 0, x = -a$ .

- Si  $\dot{x} < 0$ , on a  $\bar{T} = fmg$ , et on obtient de même  $\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + (x - a)^2 = \text{cte}$

• Exemple de trajectoire de phase :



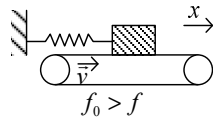
Lorsque le solide atteint le segment rouge, cela signifie qu'il est à l'arrêt ( $\dot{x} = 0$ ), et que  $|x| < a_0$ , donc le mobile ne repartira pas.

## D) Oscillateurs entretenus

### 1) Evaluation des oscillations

- L'apport d'énergie doit compenser exactement les pertes
- Deux phases de fonctionnement :
  - Phase transitoire de mise en route
  - Phase de régime établi, indépendant des conditions initiales.

### 2) Exemple



Théorème de la résultante dynamique :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \bar{T} \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

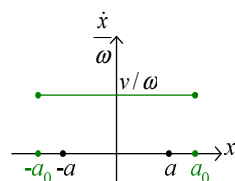
- Phases du mouvement :

Si  $v_g = 0$  :

On a  $\dot{x} - v = 0$ , soit  $\dot{x} = v$

Donc  $\ddot{x} = 0$ , et  $\bar{T} = kx$ .

Ceci est vrai tant que  $|\bar{T}| < f_0 N$ , soit  $|x| < a_0 = \frac{f_0 mg}{k}$



Si  $v_g > 0$ , on a  $\dot{x} > v$

On a alors  $\bar{T} = -fmg$

Donc  $m\ddot{x} + kx = -fmg$

Soit  $\frac{\ddot{x}}{\omega^2} + x\dot{x} = -\frac{fmg}{k}\dot{x}$ , et en intégrant  $\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = -2ax + cte$

Donc  $\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + (x+a)^2 = cte$

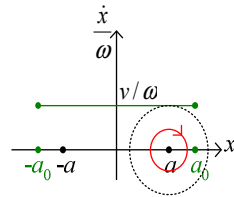
Si  $v_g < 0$ , on a  $\dot{x} < v$ .

Et  $\bar{T} = +fmg$

D'où  $\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + (x-a)^2 = cte$

- Oscillations sinusoïdales :

Lorsque le point initial est situé dans le disque de centre  $a$  et tangent au segment vert, on a une oscillation sinusoïdale :

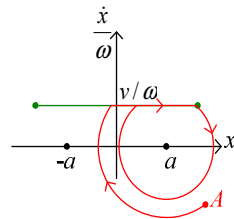


Explication : la masse ne va jamais assez vite pour rattraper le tapis, et on a donc toujours  $\bar{T} = +fmg$  ; on ajoute donc simplement une force constante.

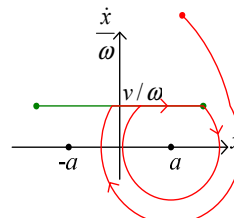
- Oscillations anharmoniques :

Régime transitoire :

Exemple 1 :



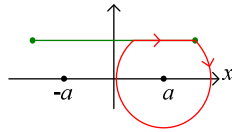
Exemple 2 :



On observe des ruptures de pente, mais la courbe reste continue.

Ainsi,  $x$  est continu,  $\dot{x}$  aussi mais pas  $\ddot{x}$ , ce qui s'explique par le changement de signe de  $T$ .

Le régime établi :  
Il est de la forme :



On n'a que deux phases possibles :  $v_g = 0$  ou  $v_g < 0$ .

La phase  $v_g > 0$  n'est donc possible qu'en régime transitoire. La partie de la courbe située sur le segment vient du fait que  $f \neq f_0$ .

On a un mouvement périodique de période  $T$ , de pulsation  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ .

$\Omega$  dépend de  $\omega, f, f_0, v, g$  :

On peut montrer que  $\Omega = \omega \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi}(y - \arctan y)}$  avec  $y = \frac{f_0 - f}{v\omega} g$ .

### 3) Modèle de Van der Pol

- Equation d'évolution :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

Donc  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , avec  $\gamma = \frac{\omega_0}{Q}$

Si  $\gamma > 0$ , le régime est amorti

Si  $\gamma < 0$ , le régime est divergent.

Modèle de Van der Pol :

$$\gamma = \gamma_0 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

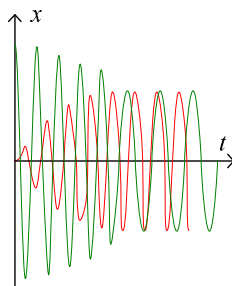
On a ainsi l'équation  $\ddot{x} + \gamma_0 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Le régime obtenu n'est ni amorti, ni divergent (mais l'équation n'est plus linéaire).

- Evolution temporelle :

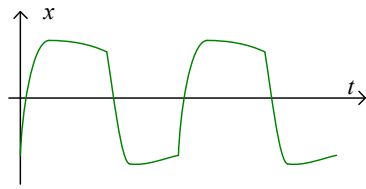
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Si  $Q$  est suffisamment grand :

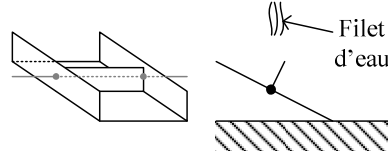




Si  $Q$  est au contraire petit, on a un oscillateur de relaxation :



Exemple d'oscillateur de relaxation :



- Bilan énergétique :

$$m\ddot{x} + f_0 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x} + kx = 0$$

$$\text{Donc } d \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + f_0 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x}^2 dt + d \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

On intègre sur une période :

$$\int d \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = 0, \quad \int d \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0.$$

$$\text{Donc sur une période, } \int f_0 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x}^2 dt = 0$$

$$\text{Soit } \underbrace{\int f_0 \frac{x^2}{a^2} \dot{x}^2 dt}_{\text{fourni}} = \underbrace{\int f_0 \dot{x}^2 dt}_{\text{dissipé}}$$

## E) Caractères généraux des portraits de phase

### 1) Les trajectoires de phase ne se coupent pas

Le fait que les trajectoires de phase se coupent serait contre le déterminisme mécanique : les équations de la mécanique sont du 2<sup>ème</sup> ordre, et la donnée de  $\dot{\rho}_0$ ,  $\rho_0$  détermine une unique solution.

### 2) Périodicité

Une évolution est périodique si et seulement si la trajectoire correspondante est fermée.

### 3) Réversibilité

- Critère :

S'il existe une trajectoire correspondant à une évolution réversible, le portrait de phase doit être symétrique par rapport à l'axe des  $\rho$  (correspond au « film » passé à l'envers)

- Exemples :
  - Les oscillateurs harmoniques non amortis.
  - Le pendule pesant

### 4) Linéarité, non linéarité

- Oscillateur linéaire :

Si pour des conditions initiales  $\rho_0, \dot{\rho}_0$  on a  $\rho(t), \dot{\rho}(t)$ , alors avec  $\lambda\rho_0, \lambda\dot{\rho}_0$  on aura comme solution  $\lambda\rho(t), \lambda\dot{\rho}(t)$ .

Les trajectoires de phase sont donc homothétiques l'une de l'autre.

- Oscillateur entretenu :

Toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire cyclique.

Les équations ne sont pas linéaires (car non homothétique)

## VI Compléments

### A) Oscillateur perturbé

On suppose qu'en plus de  $\vec{F}_1 = -kx\vec{u}_x = -m\omega_0^2 x\vec{u}_x$ , on a une force supplémentaire  $\vec{F}_2 = m\beta.x^3\vec{u}_x$ , avec :

$$|m\beta.x^3| \ll |m\omega_0^2 x|, \text{ ou } |\beta| \ll \left| \frac{\omega_0^2}{x^2} \right|$$

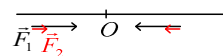
Le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + m\beta.x^3$$

$$\text{Soit } \ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta.x^3 = 0$$

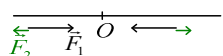
#### 1) Analyse

- $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dérivent d'une énergie potentielle
- On aura un mouvement d'oscillation.
- Si  $\beta < 0$  :



On aura une pulsation  $\omega < \omega_0$  : l'oscillateur est accéléré plus fort.

- Si  $\beta > 0$  :



On aura ici  $\omega > \omega_0$ .

## 2) Etude du mouvement

Sans la perturbation, on a une solution de la forme  $x = a \cos(\omega_0 t)$

On va chercher une solution de la forme  $x = \underbrace{a \cos(\omega t)}_{x_0} + x_1(t)$

(Avec  $\omega \approx \omega_0$ ,  $x_1 \ll a$ )

On pose  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

On suppose alors  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ ,  $\frac{|x_1|}{a} \ll 1$ ,  $\frac{\beta a^2}{\omega_0^2} \ll 1$ , tous du même ordre

On a alors avec  $x$  de la forme  $x = \underbrace{a \cos(\omega t)}_{x_0} + x_1(t)$  :

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \beta(x_0 + x_1)^3$$

$$\text{Soit } x_0 \underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)}_{-2\omega_0 \Delta\omega} + \omega_0^2 x_0 + \ddot{x}_1 + \underbrace{\omega_0^2}_{\omega^2} x_1 = \beta(x_0^3 + \underbrace{3x_0^2 x_1 + 3x_0 x_1^2 + x_1^3}_{\text{ordre 2 avec } \beta})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 2\omega_0 \Delta\omega a \cos \omega t + \beta a^3 \left( \frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t) \right) \\ &= a \left( 2\omega_0 \Delta\omega + \frac{3\beta a^2}{4} \right) \cos \omega t + \frac{\beta a^3}{4} \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

Le terme en  $\cos \omega t$  correspond à la pulsation de résonance, et la solution divergerait ce qui est impossible.

$$\text{Donc } 2\omega_0 \Delta\omega + \frac{3\beta a^2}{4} = 0, \text{ et } \Delta\omega = -\frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0}$$

$$\text{Et } \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{\beta a^3}{4} \cos(3\omega t)$$

Méthode complexe, avec  $\Omega = 3\omega$  :

$$-9\omega^2 \underline{x}_1 + \omega^2 \underline{x}_1 = \frac{\beta a^3}{4}$$

$$\text{Donc } \underline{x}_1 = \frac{-\beta a^3}{32\omega^2}, \text{ soit } x_1 = \frac{-\beta a^3}{32\omega^2} \cos(3\omega t)$$

On valide ainsi l'hypothèse faite que tous les infiniment petits sont du même ordre, et on a une solution  $x = a \cos(\omega t) - \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \cos(3\omega t)$

## 3) Conclusion

- $a$  est déterminé par les conditions initiales
- $\Delta\omega = -\frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0}$ , dépend de l'amplitude des oscillations.

#### 4) Application

Pendule pesant :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta = -\omega_0^2 (\theta - \frac{1}{6} \theta^3)$$

$$\text{Ici, } \beta = \frac{\omega_0^2}{6}, \quad a = \theta_m, \quad \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{3}{8} \beta \frac{a^2}{\omega_0^2}$$

$$\text{Donc } \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{-1}{16} \theta_m^2$$

$$\text{On a } T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ donc } \frac{dT}{T} = -\frac{d\omega}{\omega}, \text{ soit au premier ordre } \frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{1}{16} \theta_m^2$$

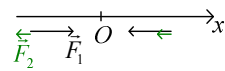
$$\text{Ainsi, } T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 \right)$$

$T$  dépend donc de  $\theta_m$  pour les grandes oscillations.

$$\text{Si on veut } \frac{\Delta T}{T} < 10^{-2}, \text{ il faut avoir } \theta_m < 0,4 \text{ rad} = 23^\circ$$

#### 5) Perturbations du deuxième ordre

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cdot x^2$$



Cette fois, la force sera dans le même sens des deux cotés.

Ici,  $\gamma > 0$  :

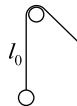
La demi-période à droite sera plus courte, et celle à gauche plus longue

Donc au premier ordre,  $\Delta \omega = 0$

Ainsi,  $x_e > 0$

On doit alors chercher  $x_0(t)$  en  $\omega_0$  + une correction en  $2\omega_0$ .

#### B) Excitation paramétrique du pendule simple

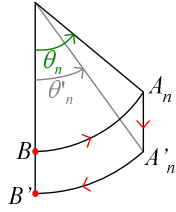


Lorsque le pendule passe à  $\theta = 0$ , on raccourcit sa longueur à  $l_0 - \Delta l$ .

Quand  $\theta$  est maximum, on relâche le pendule à  $l_0$ .

On cherche alors  $\theta(t)$ .

On considère qu'il n'y a que des petites oscillations.



(Il y a chute libre entre  $A_n$  et  $A'_n$ )

## 1) Analyse physique

Le pendule va osciller de plus en plus fort : il y a un travail moteur en  $B'$  où la vitesse est déjà importante, et un travail résistant moins grand en  $A_n$  où la vitesse est nulle.

Le système va donc globalement recevoir de l'énergie.

## 2) Etude des phases du mouvement

- De  $A_n$  à  $A'_n$  :

$$\frac{\sin \theta_n}{l_0} = \frac{\sin \theta'_n}{l_0 - \Delta l}$$

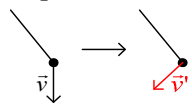
$$\text{Donc } \theta'_n = \theta_n \left( 1 - \frac{\Delta l}{l_0} \right)$$

Chute libre :

$$\text{On a } \frac{1}{2} m v^2 = m g h \text{ (où } h = A_n A'_n \text{)}$$

$$\text{Donc } v = \sqrt{2 g h}. \text{ Comme } h \approx \Delta l, \text{ on a ainsi } v = \sqrt{2 g \Delta l}$$

La percussion :



La percussion est dirigée selon la direction du fil, et ne modifiera donc pas la composante orthoradiale. Donc  $\bar{v}'$  correspond à la composante orthoradiale de  $\bar{v}$ .

$$\text{Et donc } \dot{\theta}'_n = \frac{v \sin \theta}{l_0}$$

- De  $A'_n$  à  $B'$  :

D'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2} m l_0^2 \dot{\theta}'_n{}^2 + m g l_0 \underbrace{(1 - \cos \theta'_n)}_{\frac{\theta'_n{}^2}{2}} = \frac{1}{2} m l_0^2 \underbrace{\dot{\theta}'_n{}^2}_{\text{en } B'}$$

(Où on a pris  $E_p = 0$  en  $B'$ )

Ainsi,  $\dot{\theta}'^2_n = \dot{\theta}_n^2 + \underbrace{\frac{g}{l_0}}_{\omega_0^2} \theta_n^2$

Soit  $\dot{\theta}'^2_n = \underbrace{\dot{\theta}_n^2}_{\frac{v \sin \theta}{l_0}} + \omega_0^2 \underbrace{\theta_n^2}_{\theta_n(1-\frac{\Delta l}{l_0})}$

Et donc au premier ordre  $\dot{\theta}'^2_n = \omega_0^2 \theta_n^2$

- De  $B'$  à  $B$  :

Percussion dirigée selon  $B'O$ .

Donc d'après le théorème du moment cinétique,  $\sigma_\Delta$  se conserve.

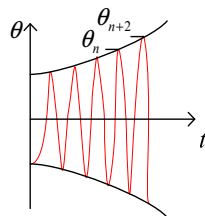
Et  $ml_0^2 \dot{\theta}'_n = m(l_0 - \Delta l)^2 \dot{\theta}'_{n+1}$

- De  $B$  à  $A_{n+1}$  : même chose que de  $A'_n$  à  $B'$  :

On trouve ainsi  $\theta_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta l}{2l_0}\right) \left(1 + \frac{2\Delta l}{l_0}\right) \theta_n = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta l}{l_0}\right) \theta_n$

### 3) Evolution séculaire

- Temps caractéristiques :



On a donc deux temps caractéristiques : un correspondant à la variation d'amplitude, et l'autre pour la période :

$$T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \tau \gg T$$

On a  $\theta = \underbrace{\theta_m(t)}_{\tau} \underbrace{\cos(\omega_0 t + \varphi)}_T$

- Détermination de  $\theta_m(t)$  :

$$\Delta \theta_m = \theta_{n+2} - \theta_n = \frac{3\Delta l}{l_0} \theta_m, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Donc  $\frac{\Delta \theta_m}{\Delta t} \approx \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{3\Delta l}{l_0} \frac{\omega_0}{2\pi} \theta_m$

Soit  $\theta_m = \theta_{n_0} e^{t/\tau}$ , avec  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{l_0}{3\Delta l} = T \frac{l_0}{3\Delta l} \gg T$

- Discussion :

On a une amplification exponentielle de l'amplitude.

Quand  $\theta_n$  atteint des valeurs trop grandes ( $\theta_n \sim 23^\circ$ ), le modèle devient caduc.

On ne peut amplifier qu'un mouvement qui est déjà commencé

On obtient une formule algébrique par rapport à  $\Delta l$ .

### C) Oscillateur de Van der Pol quasi-sinusoïdal

C'est un oscillateur d'équation  $\ddot{\xi} + \frac{1}{Q}(\xi^2 - 1)\dot{\xi} + \xi = 0$

On suppose  $Q \gg 1$ .

#### 1) A l'ordre 0

On a un oscillateur harmonique,  $\xi_0 = A \cos \tau$ .

#### 2) A l'ordre 1

- On cherche  $\xi$  sous la forme  $\xi = \xi_0 + \xi_1$ , avec  $|\xi_1| \ll |\xi_0|$

On obtient ainsi l'équation :  $\ddot{\xi}_0 + \ddot{\xi}_1 + \frac{1}{Q}(\xi_0^2 - 1)\dot{\xi}_0 + \xi_0 + \xi_1 = 0$

Soit  $\ddot{\xi}_1 + \frac{1}{Q}(\xi_0^2 - 1)\dot{\xi}_0 + \xi_1 = 0$

(On ne garde que le terme d'ordre 0 dans la correction, puisque  $\frac{1}{Q} \ll 1$ )

Ainsi, l'équation s'écrit :  $\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = \frac{1}{Q}(A^2 \cos^2 \tau - 1)A \cos \tau$

- Conservation de l'énergie :

On doit avoir  $\int_0^{2\pi} \xi^2 \dot{\xi}^2 d\tau = \int_0^{2\pi} \dot{\xi}^2 d\tau$

(La puissance perdue au cours d'une période doit compenser l'apport du terme correctif)

C'est-à-dire en considérant que  $\xi \approx \xi_0$  :

$A^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau \sin^2 \tau d\tau = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau$ , soit  $A = 2$

- Retour sur l'équation d'évolution :

On obtient alors pour  $\xi_1$  l'équation :

$$\ddot{\xi}_1 + \xi_1 = \frac{2}{Q} \sin(3\tau)$$

La solution de l'équation homogène associée peut être « incluse » dans  $\xi_0$

Une solution particulière de l'équation est  $\xi_1 = -\frac{1}{4Q} \sin(3\tau)$

Ainsi, on obtient au premier ordre :  $\xi = 2 \cos \tau - \frac{1}{4Q} \sin(3\tau)$

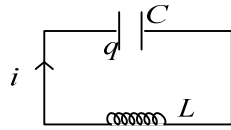
#### 3) Commentaire

L'amplitude des différents termes ne dépend pas des conditions initiales (attracteur cyclique)

On peut réappliquer la méthode pour obtenir plus de termes

## D) Excitation paramétrique d'un circuit LC

### 1) Oscillateur non amorti



- Charge :

Avec les notations du schéma, on a  $i = \frac{dq}{dt}$

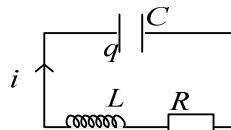
Et donc avec la loi des mailles :  $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

On obtient ainsi  $q = q_0 e^{i\omega_0 t}$ , où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- Energie :

On a  $E = E_C + E_L = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$

### 2) Oscillateur amorti



(On suppose  $R \ll \text{petit}$  »)

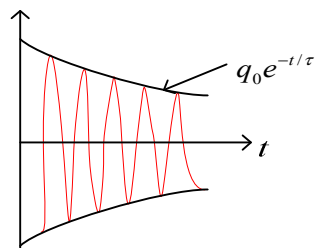
- Charge :

On a ici l'équation  $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$

L'équation caractéristique a pour discriminant  $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C} < 0$  ( $R$  a été supposé petit)

Donc  $q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

On pose  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $\tau = \frac{2L}{R}$  (ainsi,  $\tau \gg T$ ) :



On a ainsi une évolution séculaire :  $q = Q_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$



- Intensité :

$$i = \dot{q} = \dot{Q}_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - Q_m(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \approx -Q_m(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

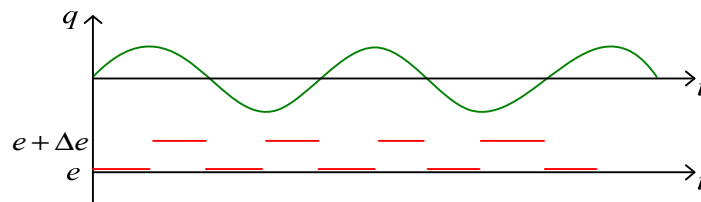
- Energie :

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2(t)}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} e^{-Rt/L}$$

Donc l'énergie varie avec un temps caractéristique  $\tau' = \frac{\tau}{2}$

### 3) Oscillateur excité paramétriquement

On fait varier la distance  $e$  entre les armatures du condensateur :



- Analyse physique :

Les deux armatures s'attirent

Quand on éloigne les armatures, on fournit un travail, alors que quand on les rapproche, on en récupère.

Ici, on fournit un travail maximal quand on éloigne les armatures, et nul quand on les rapproche (le condensateur a une charge nulle à ce moment là)

On doit donc ici comparer l'énergie dissipée au cours d'une période à celle fournie.

- Bilan énergétique au cours d'une période

- Opérateur :

$$\text{On a } E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad E = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2(t)}{C} \quad \text{avec } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

$$\text{Et } W_{op} = \frac{1}{2} Q_m^2 \times \left( \frac{e + \Delta e}{\epsilon_0 S} - \frac{e}{\epsilon_0 S} \right) \times 2 = \frac{\Delta e}{\epsilon_0 S} Q_m^2$$

(L'opérateur travaille deux fois au cours d'une période)

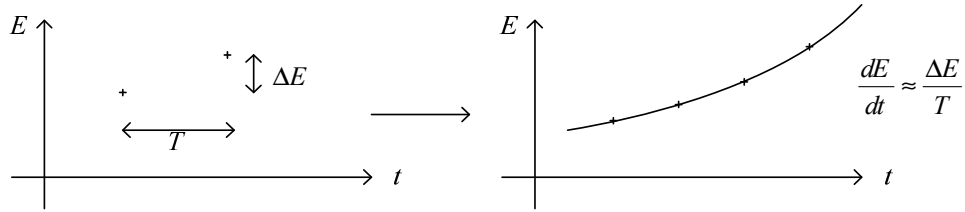
- Dissipée par la résistance :

$$W_J = \int_{\text{période}} Ri^2 dt = R \omega_0 Q_m^2(t) \cdot \pi$$

- Au cours d'une période :

$$\Delta E = W_{op} - W_J = Q_m^2 \times \left( \frac{\Delta e}{\epsilon_0 S} - R \omega_0 \cdot \pi \right)$$

- Evolution séculaire :



$$\text{On a } \frac{dE}{dt} = \frac{\omega_0}{2\pi} Q_m^2(t) \left( \frac{\Delta e}{\epsilon_0 S} - R\omega_0 \pi \right), \quad E = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2(t)}{C}$$

$$\text{Donc } \frac{dE}{dt} = \frac{\omega_0}{2\pi} \times 2CE \left( \frac{\Delta e}{\epsilon_0 S} - R\omega_0 \pi \right)$$

$$\text{Soit } \frac{dE}{E} = \frac{\omega_0}{\pi} \left( \frac{\Delta e}{e} - \pi RC \omega_0 \right) dt$$

$$\text{Et donc } E = E_0 \exp \left( \frac{\omega_0}{\pi} \left( \frac{\Delta e}{e} - \pi RC \omega_0 \right) \times t \right)$$

Si  $\frac{\Delta e}{e} > \pi RC \omega_0$ , on a des oscillations divergentes

Sinon, elles sont amorties