

Chapitre 1 : Éléments de théorie générale

I Séries de Fourier

A) Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

1) Série d'exponentielles imaginaires

- Théorème de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique de période L , de pulsation $k = \frac{2\pi}{L}$. Si f est de

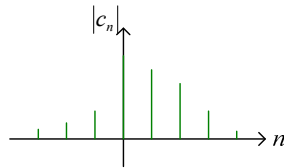
carré sommable sur $[0, L]$, alors $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x}$ où, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$k_n = n \times \frac{2\pi}{L}$$

$$\text{Et } c_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

- Spectre de Fourier :

C'est $\{|c_n|, n \in \mathbb{Z}\}$:



(En général, $|c_n|$ décroît quand $|n|$ augmente)

2) Série de sinus et de cosinus

- Cas général :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin k_n x \text{ avec } a_0 = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos(k_n x) dx \text{ et } b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin(k_n x) dx$$

- Parité :

Si $f(x)$ est paire, on aura $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$

Si $f(x)$ est impaire, on aura $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$

- Cas d'une fonction réelle :

Si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) = a'_n \cos(k_n x + \varphi_n)$

$$\text{Et donc } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n \cos(k_n x + \varphi_n)$$

Le terme pour $n=1$ s'appelle le fondamental ou la première harmonique.

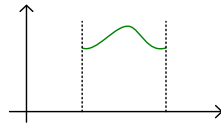
Celui pour $n=2$ s'appelle deuxième harmonique, etc.

3) Egalité de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

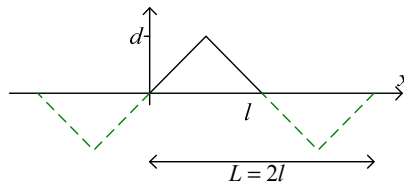
B) Développement d'une fonction de support fermé

1) Principe



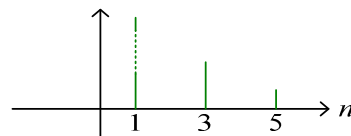
On peut ensuite reproduire le motif en une fonction périodique (éventuellement en ajoutant autre chose pour un raccordement continu...)

2) Exemple



On a $k_n = 2n \frac{\pi}{L} = n \frac{\pi}{l}$, et la fonction est impaire :

$$\text{On trouve alors } f(x) = \frac{8d}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right)$$



C) Fonction spatiale et temporelle

1) Fonctions spatiales

x : abscisse, L : longueur (ou longueur d'onde), $k = \frac{2\pi}{L}$: pulsation spatiale.

$$\text{On a } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x}.$$

2) Fonctions temporelles

$$x \rightarrow t, L \rightarrow T, \omega = \frac{2\pi}{T} : \text{pulsation temporelle ; } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

II Transformation de Fourier

A) Intégrale de Fourier

1) L'intégrale de Fourier comme limite d'une série de Fourier

On considère f définie sur \mathbb{R} , non périodique à priori.

On considère f_L périodique de période L telle que $f_L(x) = f(x)$ pour

$$x \in \left] \frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right[$$

$$\text{Ainsi, } f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik_n x} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_n x'} f(x') dx' \right)$$

$$\text{On a } k_{n+1} = \frac{2\pi}{L}(n+1), k_n = \frac{2\pi}{L}n. \text{ Donc } \frac{1}{L} = \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi}$$

$$\text{Et } f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik_n x} \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-ik_n x'} f(x') dx' \right)$$

Quand $L \rightarrow +\infty$:

$$f_L(x) \rightarrow f(x), k_{n+1} - k_n \rightarrow dk, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\text{Et ainsi } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-ikx'} f(x')$$

2) Transformée de Fourier

- Définition :

La transformée de Fourier de $f(x)$ est $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$

- Ainsi, on a le théorème (théorème de Fourier) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

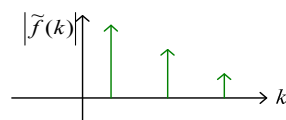
3) Interprétation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

f est donc la somme continue de fonctions sinusoïdales : $\tilde{f}(k) dk \leftrightarrow c_n$

Si f est périodique :

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(k - k_n) \text{ où } k_n = n \frac{2\pi}{L} :$$



B) Propriétés

On note $\mathfrak{F} : f \mapsto \tilde{f}$

Transposée :

$$f^*(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \tilde{f}^*(-k)$$

Translation :

$$f(x-x_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-ikx_0} \tilde{f}(k)$$

$$f(x)e^{ik_0x} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \tilde{f}(k-k_0)$$

Dilatation :

$$f(ax) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$$

Avec $a=1$: \mathfrak{F} conserve la parité.

Dérivation :

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} (ik)^n \tilde{f}(k)$$

$$\tilde{f}^{(n)}(k) \xrightarrow{\mathfrak{F}} (-ix)^n f(x)$$

Egalité de Parseval–Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

C) Exemples

1) Fonction porte

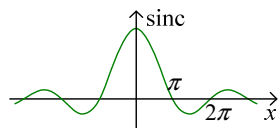
- Définition :

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Transformation de Fourier de $\pi\left(\frac{x}{l}\right)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \pi\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l/2}^{l/2} dx e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{ik} \left(-2i \sin \frac{kl}{2} \right) \right) = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{kl}{2}}{\frac{kl}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kl}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \right)$$



- Analyse :

On a $\Delta x = l$, $\Delta k \approx 4\pi/l$, donc $\Delta x \Delta k \approx 4\pi$

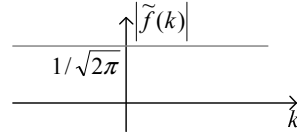
2) Distribution delta de Dirac

- Transformée :

$$f(x) = \delta(x - x_0)$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$$

- Analyse :



- Cas particulier :

$$\text{Si } x_0 = 0, \text{ on a } \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

3) Fonction sinusoïdale

$$f(x) = e^{ik_0x}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{ik_0x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(k-k_0)x}$$

$$\text{On a ait } \delta(x - x_0) \xrightarrow{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \xrightarrow{\delta^{-1}} \delta(x - x_0)$$

$$\text{Donc } \delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} e^{-ikx_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ik(x_0 - x)}$$

$$\text{Et par identification : } \delta(k_0 - k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ix(k - k_0)}$$

(On a changé $k \rightarrow x$, $x_0 \rightarrow k$, $x \rightarrow k_0$)

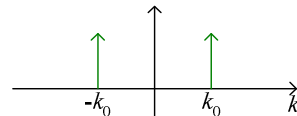
$$\text{C'est-à-dire } \delta(k - k_0) = \frac{\tilde{f}(k)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{Donc } e^{ik_0x} \xrightarrow{\delta} \sqrt{2\pi} \times \delta(k - k_0)$$

Remarque :

$$\cos(k_0x) = \frac{1}{2} (e^{ik_0x} + e^{-ik_0x})$$

On a donc un spectre :

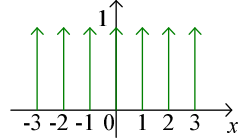


$$\text{Et la transformée : } \tilde{f}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$$

4) Peigne de Dirac

- Définition :

$$\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n). \quad (\Psi : \text{« cha », lettre cyrillique})$$

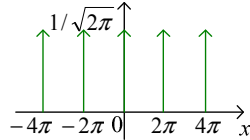


- Transformée :

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-ikn}$$

On peut montrer que $\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n x}$

Ainsi, $\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi\left(\frac{k}{2\pi}\right)$



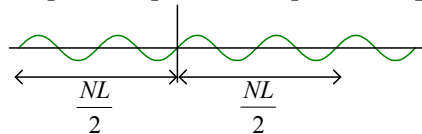
5) Train sinusoïdal

- Définition :

$$f(x) = a \sin(k_0 x)$$

Période : $L = \frac{2\pi}{k_0}$

On prend N périodes, réparties de part et d'autre de 0 :



Ainsi, $f(x) = a \sin(k_0 x)$ si $x \in \left[-\frac{NL}{2}, \frac{NL}{2}\right]$, et 0 sinon.

Largeur du train : NL

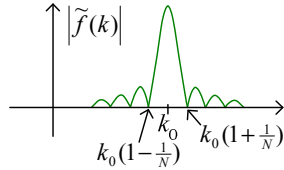
Remarque :

$$f(x) = a e^{ik_0 x} \pi \left(\frac{x}{NL} \right)$$

- Transformée :

$$\tilde{f}(k) = \frac{2ak_0}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(N\pi \frac{k-k_0}{k_0}\right)}{k^2 - k_0^2}$$

(Vu après)



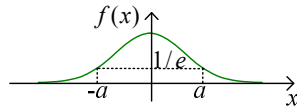
• Analyse :

Largeur : $\Delta x = NL$ pour f , $\Delta k = \frac{2k_0}{N} = \frac{4\pi}{NL}$ pour \tilde{f} .

Ainsi, $\Delta x \Delta k = 4\pi$

6) Gaussienne

$f(x) = e^{-x^2/a^2}$, où $a = \text{cte}$



Largeur : $\Delta x \sim a$

$\tilde{f}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}$; c'est aussi une Gaussienne, de largeur $\Delta k \sim \frac{2}{a}$,

donc $\Delta x \Delta k \sim 2$

D) Transformée de Fourier dans l'espace à trois dimensions

$$f(x, y, z) \xrightarrow{\delta_x} \tilde{f}(k_x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx. e^{-ik_x x} f(x, y, z)$$

$$\rightarrow \tilde{f}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy. e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dx. e^{-ik_x x} f(x, y, z)$$

Puis :

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz. e^{-ik_z z} \int_{-\infty}^{+\infty} dy. e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{+\infty} dx. e^{-ik_x x} f(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint dx dy dz e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} f(x, y, z)$$

On introduit $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$$\text{Ainsi, } \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r})$$

$$\text{Et } f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{f}(\vec{k})$$

E) Transformée de Fourier spatiotemporelle

$$f(x, y, z, t) \rightarrow \tilde{f}(k_x, k_y, k_z, \omega), \text{ ou } f(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{f}(\vec{k}, \omega).$$

On a $\tilde{f}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d^3r . dt \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) f(\vec{r}, t)$

(On prend la convention inverse pour t dans le signe de l'exponentielle)

Et $f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d^3r . dt \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \tilde{f}(\vec{k}, \omega)$

III Produit de convolution

A) Définition

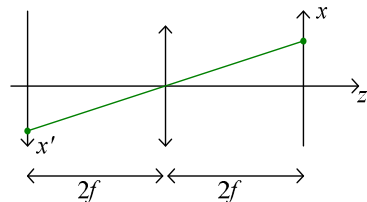
$f_1, f_2 \rightarrow f = f_1 \otimes f_2$ défini par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y') \delta(x - y - y') dy dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - y) f_2(y) dy$$

B) Utilisation du produit de convolution

Montage 4f :

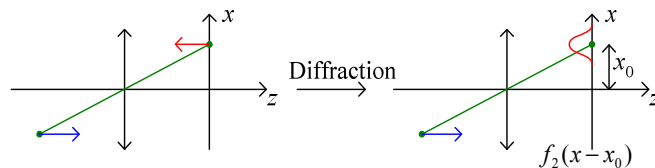


On considère l'objet constitué de l'axe x' .

On a une luminosité ponctuelle $f_1(x')$.

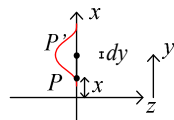
Selon l'optique géométrique, l'image est caractérisée par $f(x) = f_1(x)$

A cause de la diffraction, il n'en est pas ainsi :



L'image d'un point lumineux (un « Dirac » de lumière) n'est pas un point lumineux, mais une tache, avec un étalement $f_2(x - x_0)$

On décompose alors l'axe x en petites quantités :

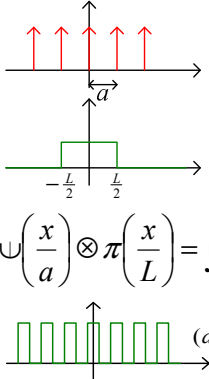


Contribution de dy en P' à la luminosité en P : $f_2(x - y) f_1(y) dy$

Donc en sommant : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x - y) f_1(y) dy$

Ainsi, le produit de convolution permet « d'étaler » une fonction sur une autre.

C) Exemple : convolution d'une porte et d'un peigne :

$$\Psi\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \pi\left(\frac{x}{L}\right)$$


$$\Psi\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \pi\left(\frac{x}{L}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(y - an) \times \pi\left(\frac{x-y}{L}\right) dy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi\left(\frac{x-an}{L}\right)$$

$(a > L)$

D) Propriétés

- \otimes est commutatif
- δ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$(f \otimes \delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(x-y) dy = f(x)$$

- $\mathfrak{F}(f_1 \otimes f_2) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f_1) \times \mathfrak{F}(f_2)$:

On note $f = f_1 \otimes f_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y') \delta(x-y-y') dy dy' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dy dy' f_1(y) f_2(y') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \delta(x-y-y')}_{e^{-ik(y+y')}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} f_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dy' e^{-iky'} f_2(y') \end{aligned}$$

- De la même façon, $\mathfrak{F}(f_1 \times f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}(f_1) \otimes \mathfrak{F}(f_2)$

E) Application au train sinusoïdal

On pose $f = f_1 \times f_2$, avec :

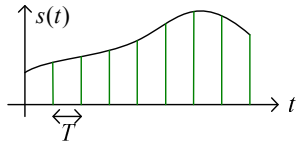
$$f_1(x) = a \sin(k_0 x), \text{ donc } \tilde{f}_1(k) = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2i} (\delta(k-k_0) - \delta(k+k_0))$$

$$\text{Et } f_2(x) = \pi\left(\frac{x}{NL}\right), \text{ donc } \tilde{f}_2(k) = \frac{NL}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{kNL}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi, } \mathfrak{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}_1 \otimes \tilde{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a\sqrt{2\pi}}{2i} \frac{NL}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{(k-k_0)NL}{2}\right) - \dots$$

IV Echantillonnage

A) Définition



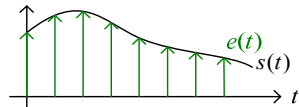
T : pas d'échantillonnage.

A la fonction $s(t)$ on associe $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ où $s_n = s(nT)$

B) Echantillonnage par un peigne de Dirac

1) Principe

$$e(t) = s(t) \times \cup\left(\frac{t}{T}\right)$$



2) Echantillonnage d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 .

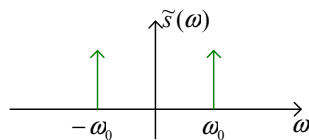
- Spectre de Fourier du signal échantillonné :

$$\tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{s}(\omega) \otimes \tilde{\cup}\left(\frac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

- $\tilde{s}(\omega)$:

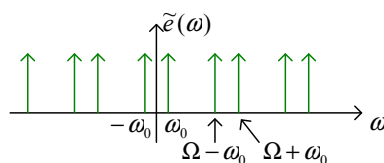
$$\text{On a } s = S \cos \omega_0 t = \frac{S}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

$$\text{Donc } \tilde{s}(\omega) = \frac{S}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

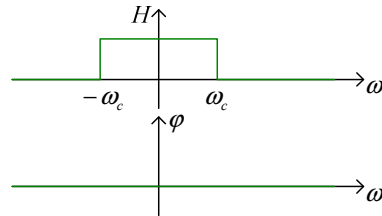


- $\tilde{\cup}\left(\frac{\omega 2\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cup\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$

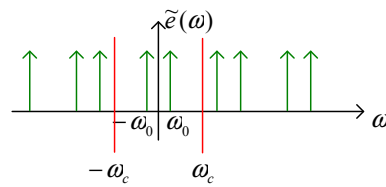
- $\tilde{e}(\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{S}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \otimes \cup\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$



- Reconstitution du signal de départ :
- Filtre passe-bas idéal : c'est une fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = He^{i\varphi}$ telle que :

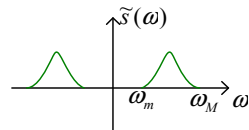


- Condition de Shannon pour pouvoir reconstituer le signal :
Il faut trouver ω_c tel que $\omega_0 < \omega_c < \Omega - \omega_0$:

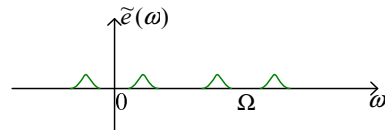


Il faut donc que $\omega_0 < \Omega - \omega_0$, c'est-à-dire que les fourches ne se croisent pas.

3) Echantillonnage d'un signal de spectre borné



- Spectre du signal échantillonné :

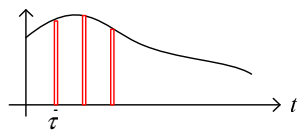


- Condition de Shannon :
Il faut ici que $\omega_M < \omega_c < \Omega - \omega_M$, soit $\Omega > 2\omega_M$.
- Théorème de Shannon :

Toute l'information d'un signal est contenue dans l'échantillonnage si l'échantillonnage a une pulsation $\Omega > 2\omega_M$ où ω_M est un majorant des pulsations du spectre de s .

C) Echantillonnage réel

- On fait les mesures sur un temps fini :



- On n'échantillonne pas indéfiniment : $e(t) = \dots \times \pi$
- Le passe bas idéal n'existe pas.
(Le deuxième point nuit au théorème de Shannon, mais pas le premier)