Chapitre 11 : Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif (souvent un sous corps de $\mathbb{C}$). Les lettres n, p, q… désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$.

I Définition

A) Matrice

Une matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Leur ensemble est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$; $M_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté aussi $M_n(\mathbb{K})$

B) Représentation d'une matrice

Une matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est représentée par un tableau à n lignes, p colonnes de sorte que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est placé sur la i-ème ligne de la j-ème colonne.

Ainsi :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}\in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

La i-ème ligne de A est $(a_{i,1},a_{i,2}...a_{i,p})\in M_{1,p}(\mathbb{K})$ (matrice ligne)

La j-ème colonne de A est $(a_{1,j},a_{2,j}...a_{n,j})\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne)

Une matrice de type (n,n) s'appelle une matrice carrée d'ordre n.

II Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Ici, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,...e_p)$.

Soit $v\in E$, on lui associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ de ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_E$

L'application : $\varphi : E \to M_{p,1}(\mathbb{K})$ est évidemment bijective (d'inverse $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$)

$$v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Plus généralement, étant donnée une famille $\mathfrak{F} = (v_1, v_2 ... v_q)$ d'éléments de *E*, on introduit la matrice $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, la *j*-ème colonne de *A* soit la colonne des composantes de v_j dans la base $\mathfrak{B}_E$. Cette matrice sera notée $\text{mat}(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}_E)$.

Exemple :

$P = 1 - 2X$; $Q = 3 + X^2$; $R = 1 + X + X^2$

Matrice de (P, Q, R) dans la base naturelle de $\mathbb{R}_2[X]$ ($(1, X, X^2)$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est aussi la matrice de $\big((1,-2,0),(3,0,1),(1,1,1)\big)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

III Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soit *E* un $\mathbb{K}$-ev de dimension *p*, muni d'une base $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, ... e_p)$.

Soit *F* un $\mathbb{K}$-ev de dimension *n*, muni d'une base $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, ... f_n)$.

Soit $\varphi \in L(E, F)$

Définition :

La matrice de φ dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$ est, par définition, la matrice à *n* lignes, *p* colonnes, qui donne, par colonne, les $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathfrak{B}_F$:

C'est $\text{mat}((\varphi(e_1), \varphi(e_2) ... \varphi(e_p)), \mathfrak{B}_F)$, notée $\text{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$

Proposition : la matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ détermine une unique application linéaire $\varphi \in L(E, F)$ telle que $A = \text{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$.

C'est le fait que la donnée des images des vecteurs de $\mathfrak{B}_E$ détermine une et une seule application linéaire.

Ainsi, l'application $\phi_{\mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F} : L(E, F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est bijective.

$$\varphi \mapsto \text{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$$

Cas particulier : Si $E = F$ et $\mathfrak{B}_E = \mathfrak{B}_F$, alors $\text{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_E)$, notée $\text{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E)$ est la matrice de φ dans la base $\mathfrak{B}_E$

IV Le $\mathbb{K}$-ev $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Idée : transporter avec $\phi_{\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F}$ la structure de $\mathbb{K}$-ev de $L(E,F)$ de sorte que $\phi_{\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F}$ devienne un isomorphisme (et pas seulement une bijection)

A) Somme

Etude :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, ...e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, ...f_n)$.

Soit $f \in L(E,F)$, de matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ dans $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Soit $g \in L(E,F)$, de matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ dans $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Alors, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$(f+g)e_j = f(e_j) + g(e_f) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i + \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$$

La matrice de $f+g$ dans $\mathfrak{B}_E$, $\mathfrak{B}_F$ est donc la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ deux éléments de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. $A+B$ est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, ...e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, ...f_n)$.

Soient $f, g \in L(E,F)$

Alors $\mathrm{mat}(f+g, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) = \mathrm{mat}(f, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) + \mathrm{mat}(g, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$

Démonstration : résulte de l'étude.

B) Produit par un scalaire

L'étude est analogue à celle de la somme, avec $f \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

λA est la matrice $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a'_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit $f \in L(E,F)$

Alors $\mathrm{mat}(\lambda.f, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) = \lambda.\mathrm{mat}(f, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$

C) Le $\mathbb{K}$-ev $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème :

- $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Alors $\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F} : L(E,F) &\to M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \varphi &\mapsto \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) \end{aligned}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :

- Vérification immédiates des différentes règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-ev (le neutre est noté $0_{M_{n,p}(\mathbb{K})}$, matrice dont tout les coefficients sont nuls)
- Idem

Cas particulier :

Si $E = \mathbb{K}^p$ muni de sa base canonique $\mathfrak{B}_p$

Et $F = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathfrak{B}_n$

Alors l'isomorphisme $\begin{aligned} \phi : L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) &\to M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \mathrm{mat}(f, \mathfrak{B}_p, \mathfrak{B}_n) \end{aligned}$ est l'isomorphisme canonique de $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ vers $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

D) Dimension

Théorème :

$M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n \times p$, une base naturelle de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ étant la famille des $E_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.

Démonstration :

Repose sur le fait que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$, $A = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$.

Conséquence :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Alors $L(E,F)$ est de dimension $n \times p$.

Démonstration : $L(E,F)$ est isomorphe à $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

V Produit matriciel

A) Définition

Etude :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension m, muni d'une base $\mathfrak{B}_G = (g_1, g_2, \dots g_m)$.

Soit $\psi : E \to G$ linéaire.

Soit $\varphi : G \to F$ linéaire.

Alors $\varphi \circ \psi$ est linéaire de E dans F.

Soit $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_E) = (a_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

Soit $B = \mathrm{mat}(\psi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_G) = (b_{i,j}) \in M_{m,p}(\mathbb{K})$

Soit $C = \mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) = (c_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(e_j) = \varphi(\psi(e_j)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} b_{k,j} g_k\right) &= \sum_{k=1}^{m} b_{k,j} \varphi(g_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} b_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} f_i\right) \\
&= \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ k \in [\![1,m]\!]}} a_{i,k} b_{k,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} f_i\right)
\end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$

Donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$

Définition :

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$. On note $A \times B$ la matrice C, élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, définie par $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension m, muni d'une base $\mathfrak{B}_G$.

Soit $\psi \in L(E, G)$, $\varphi \in L(G, F)$. Alors :

$$\mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_F) \times \mathrm{mat}(\psi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_G)$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 22 & 26 \end{pmatrix}$$

B) Composantes de l'image d'un vecteur

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E=(e_1,e_2,...e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F=(f_1,f_2,...f_n)$.

Soit $\varphi\in L(E,F)$, $A=\text{mat}(\varphi,\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F)$

Soit $u\in E$, $X\in M_{p,1}(\mathbb{K})$ la colonne des composantes de u dans $\mathfrak{B}_E$.

Soit $v\in F$, $Y\in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne des composantes de v dans $\mathfrak{B}_F$.

On a l'équivalence : $v=\varphi(u)\Leftrightarrow Y=A\times X$

Démonstration :

Notons $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

On a : $u=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$. Donc $\varphi(u)=\sum_{j=1}^{p}x_j\varphi(e_j)=\sum_{j=1}^{p}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}f_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p}x_ja_{i,j}\right)}_{\substack{i-\text{ème composante}\\\text{de }\varphi(u)\text{ dans la base}\\(f_1,f_2,...f_n)}}f_i$

Ainsi :

$$\begin{aligned}v=\varphi(u)&\Leftrightarrow v\text{ et }\varphi(u)\text{ ont mêmes composantes dans }\mathfrak{B}_F\\&\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}x_j\\&\Leftrightarrow Y=A\times X\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\dots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\dots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\dots&a_{n,p}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1,j}x_j\\\sum_{j=1}^{p}a_{2,j}x_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^{p}a_{n,j}x_j\end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit $\varphi\in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathfrak{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$

Notons $\mathfrak{B}_2=(e_1,e_2)$; $\varphi(e_1)=(1;2)$ $\varphi(e_2)=(3;4)$

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x,y)=(x',y')$

Avec $A\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix}$

C) Propriétés du produit

Proposition :

Pour tous $A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ B, B' \in M_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in M_{q,r}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

(1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$

(2) $(A + A') \times B = A \times B + A' \times B$

(3) $A \times (B + B') = A \times B + A \times B'$

(4) $(\lambda A) \times B = \lambda.(A \times B) = A \times (\lambda.B)$

(5) $A \times I_p = A$ et $I_p \times B = B$

Où $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

Démonstration :

En passant par les applications linéaires, par exemple pour (2) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit G un $\mathbb{K}$-ev de dimension q, muni d'une base $\mathfrak{B}_G$.

Soient $\varphi, \varphi' \in L(E,F)$ de matrices A, A' dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Soit $\psi \in L(G,E)$ de matrice B dans les bases $\mathfrak{B}_G$ et $\mathfrak{B}_E$.

Alors :

$$\begin{aligned} (A + A') \times B &= \mathrm{mat}\big((\varphi + \varphi') \circ \psi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_F\big) \\ &= \mathrm{mat}\big(\varphi \circ \psi + \varphi' \circ \psi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_F\big) \\ &= \mathrm{mat}\big(\varphi \circ \psi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_F\big) + \mathrm{mat}\big(\varphi' \circ \psi, \mathfrak{B}_G, \mathfrak{B}_F\big) \\ &= A \times B + A' \times B \end{aligned}$$

(On procède de la même manière pour les autres formules)

La démonstration directe sans passer pas les applications linéaires est pénible.

Remarque : I_p s'appelle la matrice unité d'ordre p.

Attention : il n'y a pas commutativité en général

- $A \times B$ peut être défini mais pas $B \times A$

Exemple : A de type (n, p), B de type (p, q) avec $q \neq n$

- $A \times B$ et $B \times A$ peuvent être définies mais pas de même type

Exemple : A de type (n, p), B de type (p, n) avec $p \neq n$

- $A \times B$ et $B \times A$ peuvent être définies, de même type mais différentes.

Exemple : A de type (n, n), B de type (n, n) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -15 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas intégrité non plus (voir exemple ci-dessus)

VI La $\mathbb{K}$-algèbre $M_n(\mathbb{K})$

A) Rappel

- $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Une $\mathbb{K}$-algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition interne +, × et d'une loi à opérateurs dans $\mathbb{K}$ tels que :
  - $(A,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
  - × est associative, distributive sur + et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tous, $a,b \in A$, $(\lambda a)\times b = \lambda.(a\times b) = a\times(\lambda.b)$
  - il existe un neutre 1_A pour ×

(exemples : $\mathbb{K}$, $\mathfrak{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$)

B) Théorème

- $(M_n(\mathbb{K}),+,\times,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathfrak{B}_E$, alors l'application $\begin{array}{l}\phi_{\mathfrak{B}_E} : L(E) \to M_n(\mathbb{K}) \\ \qquad \varphi \mapsto \operatorname{mat}(\varphi,\mathfrak{B}_E)\end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.

($(L(E),+,\circ,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre)

Démonstration :

- On sait que $(M_n(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev (de dimension n^2). De plus, selon le paragraphe précédent, × est une loi de composition interne sur $M_n(\mathbb{K})$, associative, distributive sur +, admet comme élément neutre I_n, et « les scalaires sortent des produits ».
- On sait déjà que $\phi_{\mathfrak{B}_E}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev. De plus, pour tous $\varphi,\psi \in L(E)$:
  $\phi_{\mathfrak{B}_E}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{mat}(\varphi\circ\psi,\mathfrak{B}_E) = \operatorname{mat}(\varphi,\mathfrak{B}_E)\times\operatorname{mat}(\psi,\mathfrak{B}_E) = \phi_{\mathfrak{B}_E}(\varphi)\times\phi_{\mathfrak{B}_E}(\psi)$, et
  $\phi_{\mathfrak{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B}_E) = I_n$

Remarque : si on note $\mathfrak{B}'_E$ une autre base de E, alors l'application $\begin{array}{l}L(E) \to M_n(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \operatorname{mat}(\varphi,\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}'_E)\end{array}$ est toujours un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev mais plus de $\mathbb{K}$-algèbre

(car $\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}'_E) \neq I_n$)

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B} = [(1,0),(0,1)]$ et $\mathfrak{B}' = [(1,2),(3,1)]$

$$\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B},\mathfrak{B}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B}',\mathfrak{B}') = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B}',\mathfrak{B}) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad \operatorname{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathfrak{B},\mathfrak{B}') = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

C) Conséquences : règles de calcul

- Règles habituelles de l'anneau $(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$
  du $\mathbb{K}$-ev $(M_n(\mathbb{K}),+,.)$
  « Les scalaires sortent des produits »

(C'est-à-dire les règles habituewlles d'une $\mathbb{K}$-algèbre)

- Notation habituelle dans un anneau :

Pour $A\in M_n(\mathbb{K})$, $\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k\in \mathbb{N}, A^{k+1} = A^k A \end{cases}$

- Et (toujours dans l'anneau), si $A,B\in M_n(\mathbb{K})$ sont deux éléments qui commutent, alors :

$$\forall m\in \mathbb{N}, (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}$$

et $\forall m\in \mathbb{N}^*, A^m - B^m = (A-B)\times(A^{m-1} + A^{m-2}B + ... + B^{m-1})$

Exemple :

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A^k .

Première méthode : chercher une récurrence en calculant les premières valeurs, puis la monter et donner le résultat.

Autre méthode, plus simple : On a en effet :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

On a : $B^0 = I_3 \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0$

Donc, comme I_3 et B commutent (I_3 commute avec tout le monde), on a :

$$A^k = (3I_3 + B)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (3I_3)^{k-p} B^p = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (3)^{k-p} B^p$$

$$(\text{pour } k\geq 2) = C_k^0 3^{k-0} B^0 + C_k^1 3^{k-1} B + C_k^2 3^{k-2} B^2$$

$$= 3^k I_3 + k3^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} B^2$$

Donc $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 2k3^{k-1} & k3^{k-1} + 2k(k-1)3^{k-2} \\ 0 & 3^k & 2k3^{k-1} \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$

VII Transposition

A) Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, disons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

La transposée de A est la matrice ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], a'_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

B) Propriétés

Pour tous $A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

${}^t({}^t(A)) = A$

${}^t(A + A') = {}^tA + {}^tA'$

${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Démonstration : pour les trois premiers, c'est immédiat. Pour le quatrième :
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$, $AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}}$,

${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$, ${}^tB = (b'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}}$, ${}^tB\,{}^tA = (c'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq n}}$

Pour tous $i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

Donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

C) Matrices symétriques, antisymétriques

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

A est symétrique $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = a_{j,i} \Leftrightarrow {}^tA = A$

A est antisymétrique $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = -a_{j,i} \Leftrightarrow {}^tA = -A$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, } \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique}$$

Proposition :

Les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$ forment deux sous-espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$, de dimensions $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$:

$$S_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,}_{\frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots}_{n}\right)$$

Et cette famille est évidemment libre est génératrice

De même, $\dim A_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (même famille que $S_n(\mathbb{K})$ en enlevant les n derniers et en remplaçant le 1 « du haut » par -1 dans les autres)

Donc $\dim A_n(\mathbb{K}) + \dim S_n(\mathbb{K}) = n^2$

De plus, si $M \in A_n(\mathbb{K}) \cap S_n(\mathbb{K})$, alors évidemment $M = 0_{M_n(\mathbb{K})}$

Donc $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe, et $A_n(\mathbb{K}) \oplus S_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$

VIII Matrices inversibles

A) Définitions – rappels

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

A est inversible $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ AB = BA = I_n$

(C'est la définition générale de l'inversibilité pour × dans un anneau)

Proposition :

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors il existe un et un seul $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Cet élément s'appelle l'inverse de A et est noté A^{-1}. (la démonstration a été faite dans le cas général pour un anneau)

Définition : l'ensemble des éléments inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. Il forme un groupe pour la loi ×. (idem, voir cours sur les anneaux)

Plus précisément :

- $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par × :

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$
- $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

Remarque : si $AB = BA$, alors A et B sont carrées de même type. Le fait d'avoir choisi $M_n(\mathbb{K})$ pour la définition d'inversibilité n'est donc pas restrictif pour $GL_n(\mathbb{K})$.

B) Théorème essentiel

Théorème :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit E' un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_{E'}$.

Soit $\varphi \in L(E,E')$ de matrice A dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_{E'}$.

Alors A est inversible si et seulement si φ est bijective. Si c'est le cas, A^{-1} est la matrice de φ^{-1} dans les bases $\mathfrak{B}_{E'}$ et $\mathfrak{B}_E$.

Démonstration :

- Supposons A inversible : on peut introduire A^{-1} et l'application linéaire $\psi : E' \rightarrow E$ de matrice A^{-1} dans les bases $\mathfrak{B}_{E'}$ et $\mathfrak{B}_E$. Alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{E'}$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}(\varphi \circ \psi, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_{E'}) &= \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_{E'}) \times \mathrm{mat}(\psi, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_E)\\ &= A \times A^{-1} = I_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}(\psi \circ \varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_E) &= \mathrm{mat}(\psi, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_E) \times \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_{E'})\\ &= A^{-1} \times A = I_n\end{aligned}$$

Donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$

- Supposons φ bijective. On introduit φ^{-1} et $B = \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_E)$. Alors :

$$\begin{aligned}A \times B &= \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_{E'}) \times \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_E)\\ &= \mathrm{mat}(\varphi \circ \varphi^{-1}, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_{E'})\\ &= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_{E'}, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_{E'})\\ &= I_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B \times A &= \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathfrak{B}_{E'}, \mathfrak{B}_E) \times \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_{E'})\\ &= \mathrm{mat}(\varphi^{-1} \circ \varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_E)\\ &= \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_E)\\ &= I_n\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$

Cas particulier : Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}$.

Soit $\varphi \in L(E)$, $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B})$

Alors A est inversible si et seulement si φ est bijective, et dans ce cas $A^{-1} = \mathrm{mat}(\varphi^{-1}, \mathfrak{B})$

Conséquence :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}$.

Alors $\begin{aligned}\phi_{\mathfrak{B}} : GL(E) &\rightarrow GL_n(\mathbb{K})\\ \varphi &\mapsto \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B})\end{aligned}$ est un isomorphisme de groupe.

C) Exemples

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. A est-elle inversible, si oui que vaut A^{-1} ?

1$^{\text{ère}}$ méthode, exclue :

Soit $B=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$AB=BA=I_n \Leftrightarrow \{$système de 8 équations à 4 inconnues

2$^{\text{ème}}$ méthode :

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathfrak{B}_2$. Alors, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \varphi(x,y)=(x-y,2x+y)$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$\varphi(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=a\\ 2x+y=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{3}\\ y=\dfrac{b-2a}{3}\end{cases}$$

Donc φ est bijective et φ^{-1} a pour matrice $\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}_2$.

Donc $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Autre exemple :

Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Soit $\varphi\in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice A dans la base canonique $\mathfrak{B}_2=(\vec{i},\vec{j})$

Alors $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}(\varphi(\vec{i}),\varphi(\vec{j}))=\operatorname{Vect}((2,1),(4,2))=\operatorname{Vect}((2,1))$. Donc $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 1. Donc φ n'est pas de rang 2, donc φ n'est pas bijective, donc A n'est pas inversible.

D) Diverses caractérisations

Ici, $A\in M_n(\mathbb{K})$

1) Avec les endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}$.
Soit $\varphi\in L(E)$ de matrice A dans la base $\mathfrak{B}$.

$$\boxed{\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \varphi \text{ est bijective}\\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ est injective}\\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ est surjective}\end{aligned}}$$

2) Avec les colonnes

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \text{Ses colonnes forment une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \underset{\text{de dimension } n}{\text{Car } M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ est}} \begin{cases} \Leftrightarrow \text{Ses colonnes forment une famille libre} \\ \Leftrightarrow \text{Ses colonnes forment une famille génératrice de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \end{cases} \end{array}}$$

Démonstration de la première équivalence :

Soit ϕ l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ de matrice A dans la base naturelle de $M_{n,1}(\mathbb{K})$: $\left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Alors :

A est inversible $\Leftrightarrow$ ϕ est bijective

$\Leftrightarrow [\phi(E_1), \phi(E_2), \dots \phi(E_n)]$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Or, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\phi(E_j)$ n'est autre que la *j*-ème colonne de A.

Généralisation :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note v_j le vecteur de E dont les composantes dans $\mathfrak{B}$ sont données par la *j*-ème colonne de A.

Alors :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow [v_1, v_2, \dots v_n] \text{ est une base de } E}$$

La démonstration est la même en prenant $\phi \in L(E)$ de matrice A dans la base $\mathfrak{B}$ (puisque $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $v_j = \phi(e_j)$)

Cas particulier : si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathfrak{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les v_j sont appelés les vecteurs colonnes (c'est-à-dire les colonnes vues comme n-uplets)

3) Avec les systèmes

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{A est inversible} \Leftrightarrow \text{pour tout } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ le système } (S) : AX = B, \\ \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est la colonne des inconnues, a une unique solution.} \end{array}}$$

En effet : (*S*) traduit l'assertion « ϕ est bijectif, où ϕ est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de matrice A dans une base $\mathfrak{B}$ »

En effet : Si $\phi \in L(E)$, $\text{mat}(\phi, \mathfrak{B}) = A$, $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, ... e_n)$, alors :

A inversible $\Leftrightarrow \phi$ est bijective

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in E, \exists! \vec{x} \in E, \phi(\vec{x}) = \vec{b} \\ &\Leftrightarrow \forall (b_1, b_2, ... b_n) \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, x_2, ... x_n) \in \mathbb{K}^n, \phi(\vec{x}) = \vec{b} \\ &\Leftrightarrow \forall (b_1, b_2, ... b_n) \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, x_2, ... x_n) \in \mathbb{K}^n, AX = B \end{aligned}$$

Définition :

Un système $AX = B$ où :

$$\begin{cases} A \in GL_n(\mathbb{K}) \\ B \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ est la colonne des inconnues} \end{cases}$$

est appelé un système de Cramer. Il admet l'unique solution $X = A^{-1}B$

4) Inversibilité à droite ou à gauche seulement

Théorème :

$$\boxed{\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n \\ &\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n \end{aligned}}$$

Et dans ces cas là $B = A^{-1}$

Démonstration : déjà, les implications de gauche à droite sont évidentes.

$1^{\text{ère}}$ équivalence : Supposons qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}$.

Soit $\varphi \in L(E)$ de matrice A dans la base $\mathfrak{B}$.

Soit $\psi \in L(E)$ de matrice B dans la base $\mathfrak{B}$.

Alors $\varphi \circ \psi = \text{Id}_E$

Donc φ est surjective : tout élément v de E s'écrit $\varphi(\psi(v))$. Donc φ est bijective. Donc A est inversible. Et on a : $AB = I_n \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$.

$2^{\text{ème}}$ équivalence : on introduit les mêmes éléments.

$\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$. Donc φ est injective :

$\varphi(x') = \varphi(x) \Rightarrow \psi(\varphi(x')) = \psi(\varphi(x)) \Rightarrow x' = x$

Donc φ est bijective. Donc A est inversible…

5) Transposition

Proposition :

$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow {}^tA \text{ est inversible}}$

Et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration :

Supposons A inversible : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Alors :

$^t(AA^{-1})={}^t(A^{-1}A)={}^tI_n$; $^t(A^{-1})^t(A)={}^t(A)^t(A^{-1})=I_n$

Donc ^tA est inversible, d'inverse $^t(A^{-1})$.

Réciproquement, si ^tA est inversible, alors $^t(^tA)$ est inversible, c'est-à-dire que A est inversible.

Conséquence :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Ses lignes forment une base de $M_{1,n}(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow$ Ses lignes forment une famille libre

$\Leftrightarrow$ Ses lignes forment une famille génératrice de $M_{1,n}(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow$ la famille de ses vecteurs lignes ($\in \mathbb{K}^n$!!) est...

(Les vecteurs lignes de A sont les vecteurs colonnes de ^tA)

E) Exemples importants

1) Les matrices diagonales

On note $\text{Diag}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. (attention, ce n'est pas une notation standard !)

Alors $\text{Diag}_n(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ (et même commutative)

Proposition :

Soit $A\in \text{Diag}_n(\mathbb{K})$:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors A est inversible si et seulement si $\forall i\in [\![1,n]\!], \lambda_i \neq 0$, et dans ce cas :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Démonstration :

- Si un des λ_i est nul, la colonne C_i est nulle, donc la famille des colonnes de A n'est pas libre. Donc A n'est pas inversible.
- Si aucun des λ_i, on introduit la matrice proposée (on la nomme B), et alors $AB=BA=I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1}=B$

2) Les matrices triangulaires supérieures

On note $TS_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ où $i>j\Rightarrow a_{i,j}=0$. (la notation n'est pas standard non plus)

Alors $TS_n(\mathbb{K})$ est une sous algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ (mais non commutative)

Proposition :

Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\in TS_n(\mathbb{K})$

Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration :

- Si les $a_{i,i}$ sont tous non nuls :

$$A=\begin{pmatrix} * & \_ & \_ & \_ \\ 0 & * & \_ & \_ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \_ \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$ (* désigne un scalaire non nul)

Alors la famille de ses colonnes $(C_1,C_2...C_n)$ est libre :

Si $\lambda_1C_1+\lambda_2C_2+...+\lambda_nC_n=0$, alors, avec le dernier coefficient, $\lambda_na_{n,n}=0$. Donc $\lambda_n=0$ (car $a_{n,n}\neq 0$), et ainsi de suite…

- Si l'un des $a_{i,i}$ est nul :

$C_1,C_2...C_i$ sont i éléments d'un ensemble de dimension $i-1$, à savoir l'ensemble des colonnes du type $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_{i-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (qui est $\text{Vect}(E_1,E_2,...E_{i-1})$, où $(E_1,E_2,...E_n)$ est la base naturelle de $M_{n,1}(\mathbb{K})$)

Donc $(C_1,C_2...C_i)$ est liée. Donc A n'est pas inversible.

D'où l'équivalence.

Remarque : on peut montrer que si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors l'inverse de cette matrice est aussi triangulaire supérieure.

3) Matrice triangulaire inférieure

On a le même résultat que pour les matrices triangulaires supérieures, avec la même démonstration (ou en remarquant que A est triangulaire supérieure si et seulement si ${}^tA$ est triangulaire inférieure…)

Conséquence : Un système (*S*) carré (c'est-à-dire du type $A\times\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ est la colonne des inconnues) qui est triangulaire (c'est-à-dire que *A* est triangulaire) sans 0 sur la diagonale est de Cramer (c'est-à-dire qu'il admet une et une seule solution)

Exemple :

$$\begin{cases}\lambda_1 x_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = b_1\\ \qquad \lambda_2 x_2 + \dots\dots\dots = b_2\\ \qquad\qquad \ddots\\ \qquad\qquad\quad \lambda_n x_n = b_n\end{cases}$$

- Le système admet une et une seule solution lorsque les coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- Si l'un des λ_i est nul, le système n'a pas une et une seule solution.

En effet : supposons l'un des λ_i nul. On note $k=\min\{i\in[\![1,n]\!], \lambda_i=0\}$

- Si $k=n$ (c'est-à-dire $\lambda_n=0$ et $\forall i<n, \lambda_i\neq 0$)

Alors :

- Si $b_n\neq 0$, le système est incompatible.
- Si $b_n=0$, alors on voit qu'on peut fixer x_n quelconque et obtenir une solution $(x_1,x_2...x_n)$ à (*S*) en résolvant le système (*S*') composé des $n-1$ premières équations et considéré comme d'inconnues $x_1,x_2...x_{n-1}$ ((*S*') a une unique solution puisque triangulaire sans 0 sur la diagonale). Donc (*S*) a une infinité de solutions (avec 1 degré de liberté)

- Sinon, soit (*S*'') le système « sous » (strictement) l'équation n°*k*, en tant que d'inconnues $x_{k+1},x_{k+2}...x_n$.
  - Si (*S*'') est incompatible, alors (*S*) l'est aussi.
  - Si (*S*'') est compatible :
    - Si aucune des solutions de (*S*'') ne satisfait la *k*-ième ligne, alors (*S*) est incompatible.
    - Sinon, l'une au moins, $(x_{k+1},x_{k+2}...x_n)$ par exemple, des solutions de (*S*'') satisfait la *k*-ième ligne : on peut alors fixer arbitrairement x_k et obtenir une solution $(x_1,x_2,...x_k,x_{k+1}...x_n)$ en résolvant le système (*S*''') au-dessus (strictement) de la *k*-ième ligne, qui est de Cramer en tant que d'inconnues $x_1,x_2,...x_k$. Donc (*S*) a une infinité de solutions (avec au moins un degré de liberté)

Autre argument :

$(S) : AX = B$, avec $A \in M_n(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On va voir plus généralement que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors soit (*S*) n'a pas de solution, soit il en a une infinité (pour $\mathbb{K}$ infini seulement)

En effet :

- Si (*S*) n'a pas de solution, alors il n'a pas de solution… !
- Sinon, il admet une solution X_0. Montrons alors qu'il en a d'autres.

A n'est pas inversible. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à *A*. Donc φ n'est pas injectif. Donc $\ker\varphi \neq \{0\}$. Donc l'équation $AX = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ a des solutions autres que 0. Alors les $X_0 + \lambda U$, où U est une solution non nulle de $AX = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont des solutions de (*S*).

En effet : $A \times (X_0 + \lambda U) = A \times X_0 + \lambda AU = B + 0 = B$

IX Changement de base

A) Changement de base : matrice de passage, composantes d'un vecteur

E est ici un $\mathbb{K}$-ev de dimension *n*.

Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2 ... e_n)$ une base de *E*. (« ancienne »)

Soit $\mathfrak{B}' = (e'_1, e'_2 ... e'_n)$ une autre base de *E*. (« nouvelle »)

On suppose qu'on connaît les composantes des e'_j dans la base 𝔅. (d'où le nom d'ancienne et de nouvelle). Alors la matrice qui donne, par colonne, les composantes des vecteurs de 𝔅' dans la base 𝔅 s'appelle la matrice de passage de 𝔅 à 𝔅'.

Ainsi :

$P =$ matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$.

$=$ la matrice des $(a_{i,j})$ de sorte que $\forall j \in [\![1, n]\!], e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

notée $\text{mat}(\mathfrak{B}', \mathfrak{B})$ (matrice de la <u>famille</u> 𝔅' dans la <u>base</u> 𝔅)

Proposition : $P = \text{mat}(\text{Id}_E, \mathfrak{B}', \mathfrak{B})$ (attention, la base de départ est 𝔅')

Conséquence : si *P* est la matrice de passage de 𝔅 à 𝔅', alors *P* est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de 𝔅' à 𝔅.

En effet : $\text{Id}_E \in GL(E)$. Donc $\text{mat}(\text{Id}_E, \mathfrak{B}', \mathfrak{B})$ est inversible, d'inverse $\text{mat}(\text{Id}_E^{-1}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}') = \text{mat}(\text{Id}_E, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ qui est la matrice de passage de 𝔅' à 𝔅.

Remarque : si 𝔅 est une base de *E* et 𝔉 une famille de *n* vecteurs de *E*, alors 𝔉 est une base de *E* si et seulement si la matrice qui donne par colonne les composantes des vecteurs de 𝔉 dans la base 𝔅 est inversible.

Théorème :

Soit $\mathfrak{B}$ une base de E, $\mathfrak{B}'$ une autre base de E.

Soit P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$.

Soit $u \in E$, X la colonne de ses composantes dans $\mathfrak{B}$,

X' celle de ses composantes dans $\mathfrak{B}'$.

Alors $\boxed{X = PX'}$ (on obtient les anciennes en fonction des nouvelles)

Démonstration :

$u = u$ donc $u = \mathrm{Id}_E(u)$ c'est-à-dire $X = PX'$ (la base de départ est $\underline{\mathfrak{B}'}$ pour Id_E !)

Autre démonstration :

On note $P = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. On a :

$$u = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j \right) e_i$$

et $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j$. Donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Soit C la courbe d'équation :

$(E): 2x^2 + 5y^2 - 2xy = 9$ dans $\mathfrak{B}$ (C'est-à-dire que C est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes (x, y) dans $\mathfrak{B}$ vérifient (E))

Soit $\vec{I} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$ alors $\mathfrak{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$. On cherche l'équation de C dans $\mathfrak{B}'$.

Matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

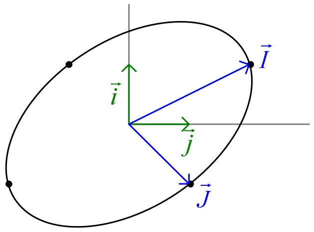
Soit $u \in \mathbb{R}^2$, de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}'$.

Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in C &\Leftrightarrow 2x^2 + 5y^2 - 2xy = 9 \\ &\Leftrightarrow 2(2x'+y')^2 + 5(x'-y')^2 - 2(2x'+y')(x'-y') = 9 \\ &\Leftrightarrow 8x'^2 + 8x'y' + 2y'^2 + 5x'^2 - 10x'y' + 5y'^2 - 4x'^2 + 2y'^2 + 2x'y' = 9 \\ &\Leftrightarrow 9x'^2 + 9y'^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = 1 \end{aligned}$$

Aspect :



B) Les formules de changement de base pour une application linéaire

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, et $\mathfrak{B}_E$, $\mathfrak{B}'_E$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathfrak{B}_E$ à $\mathfrak{B}'_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathfrak{B}_F$, $\mathfrak{B}'_F$ deux bases de F. Soit Q la matrice de passage de $\mathfrak{B}_F$ à $\mathfrak{B}'_F$.

Soit $\varphi \in L(E,F)$, soit $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$, $A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}'_F)$.

Alors $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

Démonstration :

$\varphi = \mathrm{Id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_E$

Donc $\mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}'_F) = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_F, \mathfrak{B}_F, \mathfrak{B}'_F) \times \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F) \times \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}_E)$

$$A' = Q^{-1}AP$$

Autre démonstration (sans introduction des notations) :

$Y = AX$, $Y' = A'X'$

$$\begin{cases} X = PX' \\ Y = QY' \end{cases}$$

Donc $QY' = APX'$. Donc $Y' = Q^{-1}APX'$. Or $Y' = A'X'$. Donc $A' = Q^{-1}AP$

Cas particulier :

Soient $\varphi \in L(E)$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$.

Soient $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B})$, $A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}')$

Alors $A' = P^{-1}AP$.

X Matrices équivalentes et rang

A) Rang d'une matrice

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\mathrm{rg}(A) \underset{\text{déf}}{=}$ le rang de la famille de ses colonnes.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit $\varphi \in L(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Soit $(v_1, v_2, ... v_p)$ une famille de vecteurs de F dont les composantes dans $\mathfrak{B}_F$ sont les colonnes de A.

Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(v_1, v_2, ... v_p) = \mathrm{rg}(\varphi)$

Démonstration :

On a l'isomorphisme ϕ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ dans F qui envoie la base naturelle $(E_1, E_2, ... E_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sur $\mathfrak{B}_F$.

C'est-à-dire : $\phi : M_{n,1}(\mathbb{K}) \to F$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

Alors les v_j ne sont autres que les $\phi(C_j)$ (où $C_1, C_2, ... C_p$ sont les colonnes de A)

Or, ϕ conserve le rang (c'est un isomorphisme)

Donc $\mathrm{rg}(A) \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{rg}(C_1, C_2, ... C_p) = \mathrm{rg}(v_1, v_2, ... v_p)$

Or, les v_j sont les $\varphi(e_j)$, et on sait que $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), ... \varphi(e_p))$

Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(v_1, v_2, ... v_p) = \mathrm{rg}(\varphi)$

Conséquences :

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $r = \mathrm{rg}(A)$, alors $r \leq n$ (rang d'une famille de vecteurs dans un espace de dimension n) et $r \leq p$ (rang de p vecteurs)

A est inversible si et seulement si $r = n = p$

A est nulle si et seulement si $r = 0$

B) Matrice équivalente

Définition :

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que B est équivalente à A lorsqu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$

(remarque : le $^{-1}$ n'est que décoratif : si Q est $GL_n(\mathbb{K})$, $Q' = Q^{-1}$ y est aussi)

Proposition :

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit $\varphi \in L(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Alors B est équivalente à A si et seulement si il existe une base $\mathfrak{B}'_E$ de E et $\mathfrak{B}'_F$ de F telles que B soit la matrice de φ dans les bases $\mathfrak{B}'_E$ et $\mathfrak{B}'_F$.

En résumé, une matrice B est équivalente à A si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Démonstration :

Si on trouve $\mathfrak{B}'_E$ et $\mathfrak{B}'_F$ telles que $B=\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B}'_E,\mathfrak{B}'_F)$, alors $B=Q^{-1}AP$ où Q est la matrice de passage de $\mathfrak{B}_F$ à $\mathfrak{B}'_F$ et P la matrice de passage de $\mathfrak{B}_E$ à $\mathfrak{B}'_E$.

Inversement : si $B=Q^{-1}AP$, on peut introduire une base $\mathfrak{B}'_E$ de E telle que P soit la matrice de passage de $\mathfrak{B}_E$ à $\mathfrak{B}'_E$, et une base $\mathfrak{B}'_F$ de F telle que Q soit la matrice de passage de $\mathfrak{B}_F$ à $\mathfrak{B}'_F$. Ainsi, $B=\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B}'_E,\mathfrak{B}'_F)$.

Proposition :

La relation « être équivalente à » sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire réflexive, transitive et symétrique :

Réflexive : $A=I_n^{-1}AI_n$

Symétrique : Si $B=Q^{-1}AP$, alors $A=QBP^{-1}=(Q^{-1})^{-1}B(P^{-1})$

Transitive : Si $B=Q^{-1}AP$ et $C=R^{-1}BS$, alors :

$$C=R^{-1}BS=R^{-1}(Q^{-1}AP)S=(R^{-1}Q^{-1})A(PS)=(QR)^{-1}A(PS)$$

C) Théorème

Soient $A,B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

A et B sont équivalentes $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)$

Démonstration :

(1) Si A et B sont équivalentes :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit $\varphi\in L(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Donc il existe une base $\mathfrak{B}'_E$ de E et $\mathfrak{B}'_F$ de F telles que B soit la matrice de φ dans les bases $\mathfrak{B}'_E$ et $\mathfrak{B}'_F$.

C'est-à-dire : $A=\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B}_E,\mathfrak{B}_F)$ et $B=\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B}'_E,\mathfrak{B}'_F)$

Donc $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(\varphi)=\mathrm{rg}(B)$

(2) Supposons que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=r$

Lemme : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $r=\mathrm{rg}(A)$

On va montrer que A est équivalente à :

$$J_{n,p,r}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & 0 & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}}_{p}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}r\\ \\ \\ \\ \end{array}\Bigg\}n$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{r}$$

C'est-à-dire $J_{n,p,r} = (\gamma_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ où $\begin{cases} \gamma_{i,i} = 1 \text{ si } i \leq r \\ \gamma_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ ou } (i = j \text{ et } i > r) \end{cases}$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F$.

Soit $\varphi \in L(E,F)$ de matrice A dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$.

Alors $\mathrm{rg}(\varphi) = r$. Donc $\dim(\ker\varphi) = p - r$. Soit $(u_{r+1},...u_p)$ une base de $\ker\varphi$.

Soit G un supplémentaire de $\ker\varphi$ dans E.

Donc $\dim(G) = r$. Soit $(u_1,...u_r)$ une base de G.

Alors $\mathfrak{B}'_E = (u_1,...u_r, u_{r+1},...u_p)$ est une base de E.

Soient $v_1,...v_r$ les images par φ de $u_1,...u_r$.

Alors $(v_1,...v_r)$ est libre. En effet :

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r = 0 &\Rightarrow \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r \in \ker\varphi \cap G \\ &\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,r]\!], \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

On complète alors cette famille en une base de F : $\mathfrak{B}'_F = (v_1,...v_n)$

Ainsi, par construction : $J_{n,p,r} = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}'_F)$

Donc A est équivalente à $J_{n,p,r}$

D'où, pour la démonstration du théorème :

A et B sont toutes les deux de rang r, donc équivalentes à $J_{n,p,r}$. Donc A et B sont équivalentes.

Théorème :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$:

Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors, comme $J_{n,p,r}$ est de rang r, A est équivalente à $J_{n,p,r}$. Il existe donc $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = Q^{-1} J_{n,p,r} P$

Donc ${}^tA = {}^tP\,{}^tJ_{n,p,r}\,{}^t(Q^{-1})$. Or, ${}^tP \in GL_p(\mathbb{K})$, ${}^t(Q^{-1}) = ({}^tQ)^{-1}$ et ${}^tQ \in GL_n(\mathbb{K})$ et ${}^tJ_{n,p,r} = J_{p,n,r}$ (qui est de rang r)

Donc ${}^tA$ est équivalente à une matrice de rang r. donc $\mathrm{rg}({}^tA) = r$

Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Ainsi, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes.

Recherche pratique du rang :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Quel est le rang de A ?

Remarque : on a vu que, étant donnés $(v_1,\dots v_n)$ vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E, les modifications du type

- $v_i \leftarrow \lambda.v_i$ avec $\lambda \neq 0$
- $v_i \leftarrow v_i + \alpha.v_j$ avec $i \neq j$
- $v_i \leftrightarrow v_j$

ne modifient pas $\mathrm{Vect}(v_1,\dots v_n)$ et par conséquent le rang. On va utiliser cette remarque sachant que le rang d'une matrice est celui de ses colonnes, mais aussi celui de ses lignes.

Donc :

$$\mathrm{rg}(A) \underset{\substack{\uparrow\\ L_4\leftarrow L_4-4L_5\\ L_3\leftarrow L_3-3L_5\\ L_2\leftarrow L_2-2L_5\\ L_1\leftarrow L_1-L_5}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftrightarrow L_4}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ L_1\leftarrow L_1-2L_4}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ L_3\leftrightarrow L_1\\ L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_1\leftarrow \frac{1}{3}L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

XI Transformations élémentaires

A) Sur les colonnes

On note C_p l'ensemble des matrices à p colonnes. Une transformation élémentaire T_C sur les colonnes d'une matrice à p colonnes est une application $\begin{array}{rl} T_C : C_p & \to C_p \\ A & \mapsto A' \end{array}$ où A' est déduite de A par l'une des opérations suivantes :

* $c_i \leftarrow \lambda c_i$ avec $\lambda \neq 0$

* $c_i \leftarrow c_i + \alpha c_j$ avec $i \neq j$

* $c_i \leftrightarrow c_j$

Théorème :

Soit T_C une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice à p colonnes. Alors il existe une et une seule matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in C_p, T_C(A) = A \times P$

Démonstration :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, muni d'une base $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2, \dots e_p)$.

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, muni d'une base $\mathfrak{B}_F = (f_1, f_2, \dots f_n)$.

Soit $\varphi \in L(E,F)$ tel que $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F)$

Soit $A' = T_C(A)$

- Si T_C est la transformation $c_i \leftarrow \lambda c_i$ avec $\lambda \neq 0$.

On voit alors que $A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}_F)$

Où $\mathfrak{B}'_E = (e_1, e_2, \dots \lambda e_i \dots e_p)$

Selon les formules de changement de base, $A' = I_n^{-1}AP = AP$, où P est la matrice de passage de $\mathfrak{B}_E$ à $\mathfrak{B}'_E$, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = I_p + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

- Si T_C est la transformation $c_i \leftarrow c_i + \alpha c_j$ avec $i \neq j$

Alors, de même, $A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}_F)$ avec $\mathfrak{B}'_E = (e_1, e_2, \dots e_i + \alpha . e_j \dots e_p)$

$$A' = I_n^{-1}AP = AP \text{ où } P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \underset{i}{\uparrow} & & \end{array} \end{array} = I_p + \alpha . E_{j,i}$$

- Si T_C est la transformation $c_i \leftrightarrow c_j$

$A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathfrak{B}'_E, \mathfrak{B}_F)$ avec $\mathfrak{B}'_E = (e_1, e_2, \dots \underset{i}{e_j} \dots \underset{j}{e_i} \dots e_p)$

$$A' = I_n^{-1}AP = AP \text{ où } P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \underset{i}{\uparrow} & & \underset{j}{\uparrow} & \end{array} \end{array} = I_p - E_{j,j} - E_{i,i} + E_{j,i} + E_{i,j}$$

D'où l'existence

Unicité : Si P convient, on a nécessairement : $T_C(I_p) = I_p P = P$. Donc P est l'image de l'identité.

B) Transformation élémentaire sur les lignes

Soit L_n l'ensemble des matrices à n lignes. Une transformation élémentaire T_L sur les lignes d'une matrice à n lignes est une application $T_L : \begin{array}{rcl} L_n & \to & L_n \\ A & \mapsto & A' \end{array}$ où A' est déduite de A par l'une des transformations suivantes :

* $l_i \leftarrow \lambda l_i$ avec $\lambda \neq 0$

* $l_i \leftarrow l_i + \alpha l_j$ avec $i \neq j$

* $l_i \leftrightarrow l_j$

Théorème :

Soit T_L une transformation élémentaire sur les lignes des matrices à n lignes. Alors il existe une et une seule matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in L_n, T_L(A) = Q \times A$

Démonstration :

On peut refaire la même démonstration que précédemment (attention, c'est $\mathfrak{B}_F$ qui sera alors changé), ou alors :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A' = T_L(A)$. Alors il est évident que ${}^tA'$ est obtenue à partir de ${}^tA$ par une transformation élémentaire sur les colonnes (correspondant à T_L). Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tA' = ({}^tA) \times P$. Donc $A' = \underbrace{{}^tP}_{\in GL_n(\mathbb{K})} \times A$

Remarque : Si $\forall A \in L_n, T_L(A) = Q \times A$, alors $Q = T_L(I_n)$

C) Intérêt de ces théorèmes

(1) On retrouve le fait qu'une transformation élémentaire sur les lignes/colonnes d'une matrice conserve son rang. En effet, une matrice A sera changée, par succession de transformations, en $A' = \underbrace{Q_l ... Q_1}_{\in GL_n(\mathbb{K})} A \underbrace{P_1 ... P_k}_{\in GL_p(\mathbb{K})}$ donc A' est équivalente à A, donc de même rang.

(2) On voit ce qui se passe quand on fait des transformations élémentaires sur les lignes d'un système :

Soit $(S): AX = B$ (A : « matrice du système », B : « matrice du 2$^{\text{nd}}$ membre »)

Avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\text{Alors } (S): \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Faire une transformation élémentaire sur les lignes, c'est simplement écrire :

$AX = B \Leftrightarrow A'X = B'$ où A' et B' sont déduites de A et B par une même transformation T_L sur les lignes. Autrement dit, c'est écrire $AX = B \Leftrightarrow QAX = QB$ où $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

Transformation sur les colonnes d'un système : déconseillée. Exemple :

$$(S): \begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x - y \quad = b \\ 5x \quad = c \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (S): A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (S'): \begin{cases} z + y + 2x = a \\ -y + 2x = b \\ 5x = c \end{cases} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (S'): A'\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

XII Retour à la méthode du pivot

A) Cas des matrices inversibles

Proposition :

Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes qui conduit à I_n

Exemple 1 :

$$A=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&2\\3&6&0\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\longrightarrow} A_1=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-4\\3&-6&-9\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_3\leftarrow L_3-2L_2}}{\longrightarrow} A_2=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-4\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

On voit ici que A car $\operatorname{rg}(A)(=\operatorname{rg}(A_1))=\operatorname{rg}(A_2)=3$. On continue :

$$A_2=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-4\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftarrow L_2-4L_3\\ L_1\leftarrow L_1-L_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2\\ L_3\leftarrow -L_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_1\leftarrow L_1-4L_2}}{\longrightarrow} I_3$$

Exemple 2 :

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&6&7\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_2\leftrightarrow L_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ L_3\leftarrow -L_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_1\leftarrow L_1-4L_3\\ L_2\leftarrow L_2-3L_3}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ L_1\leftarrow L_1-3L_2\\ L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1}}{\longrightarrow} I_3$$

Démonstration : par récurrence :

- Pour $n=1$, ok.
- Soit $n\geq 2$. Supposons que pour toute matrice $A\in GL_{n-1}(\mathbb{K})$, il existe une succession de transformations élémentaires sur les lignes qui conduit à I_{n-1}.

Soit alors $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}\in GL_n(\mathbb{K})$. (On note L_i ses lignes)

Alors l'un des $a_{i,1}$ est non nul (car $A\in GL_n(\mathbb{K})$). Un éventuel échange de lignes ramène au cas $a_{1,1}\neq 0$.

Puis les transformations $L_i\leftarrow L_i-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$ pour $i\in[\![2,n]\!]$ amènent à :

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&\overline{}\\0&\boxed{\quad B\quad}\\\vdots&\end{pmatrix}$$

Alors B est inversible : ses lignes forment une famille libre car sinon on aurait $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i l_i = 0$ avec $(\lambda_2, \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots 0)$ (où l_i est la (i-1)-ème ligne de B), et on aurait ainsi $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

Les transformations sur les lignes de B reviennent aux mêmes transformations sur les L_i ($i \geq 2$), et amènent par hypothèse de récurrence à :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \rule{3em}{0.4pt} \\ 0 & \boxed{\;I_{n-1}\;} \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

Ensuite, les transformations $L_1 \leftarrow L_1 - a_{1,j} L_j$ pour $j \geq 2$ puis la transformation $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{1,1}} L_1$ amènent à I_n

Application : nouvelle présentation pour calculer l'inverse d'une matrice A inversible.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

1$^{\text{ère}}$ méthode : point de vue des système. On cherche à résoudre le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a les équivalences :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} B \underset{\substack{\uparrow \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3} L_2 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & \frac{-7}{3} \\ 2 & -3 & \frac{4}{3} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} B$$

Donc $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 & 18 & -7 \\ 6 & -9 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Autre présentation :

Soient $A, M \in M_3(\mathbb{K})$ ($A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$)

On a les équivalences :

$$AM = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 & 18 & -7 \\ 6 & -9 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a trouvé un inverse à droite, donc un inverse de A.

B) Cas d'une matrice quelconque

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2}]{} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{que des 0 ; on fait un échange de colonne}}}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[C_3 \leftrightarrow C_6]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \leftrightarrow C_5]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_5]{} A' = \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On voit ici que la matrice A est de rang 4 (puisqu'elle est équivalente à A'). On peut maintenant faire des transformations élémentaires pour se ramener à $J_{5,6,4}$.

Généralisation, théorème :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang *r*. Alors :

(1) Une succession de transformations élémentaires sur les lignes et,éventuellement, d'échange de colonnes, conduit à une matrice du type :

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} * & \_ & \_ \\ 0 & \ddots & \_ \\ \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array}}_{r}\middle|\begin{array}{cccc} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right)}_{p}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\}r\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n \quad = G$$

(A adapter quand $r = 0$: $A = 0$)

(2) Des transformations élémentaires sur les colonnes conduisent alors à $J_{n,p,r}$

On retrouve ainsi le fait que *A* est équivalente à $J_{n,p,r}$: $J_{n,p,r} = \underbrace{Q_m \dots Q_1}_{\in GL_n(\mathbb{K})} A \underbrace{P_1 \dots P_k}_{\in GL_p(\mathbb{K})}$

Remarque : une matrice du type de *G* s'appelle une réduite de Gauss. Une telle matrice est évidemment de rang *r*. Par conséquent, si, partant de *A* de rang inconnu, on arrive à *G*, on trouve alors le rang de *A*.

Démonstration rapide :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour la première colonne de *A*, si elle est nulle :

- Soit toutes les autres colonnes de *A* sont nulles, et alors $A = 0$.
- Soit une colonne, C_j, n'est pas nulle : on fait alors $C_1 \leftrightarrow C_j$

On peut supposer maintenant $C_1 \neq 0$.

Si $a_{1,1} = 0$, on cherche *i* tel que $a_{i,1} \neq 0$ (car $C_1 \neq 0$), et on fait $L_1 \leftrightarrow L_i$

On peut supposer maintenant $a_{1,1} \neq 0$.

On fait ensuite les transformations $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ (pour $i \geq 2$), ce qui amène à :

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & \text{———} \\ 0 & \boxed{A'} \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

Puis on recommence avec A', jusqu'à ce qu'on arrive à

$$\begin{pmatrix} * & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & \ddots & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \vdots & & * & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \vdots & & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boxed{0} & & \\ 0 & \dots & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

XIII Synthèse et compléments sur les systèmes

A) Définition

Un système linéaire de *n* équations, *p* inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est :

$$(S):\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,p}x_p=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,p}x_p=b_2\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,p}x_p=b_n\end{cases}$$

Où la matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée la matrice du système, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ la colonne des inconnues et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ la colonne du second membre.

Résoudre (*S*), c'est donner l'ensemble S des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des *p*-uplets $(x_1,\ldots x_p)\in\mathbb{K}^p$ tels que les égalités de (*S*) soient satisfaites.

B) Interprétation

<u>(*S*) peut traduire une égalité vectorielle</u> du type $\sum_{j=1}^{p}x_i\vec{v}_j=\vec{w}$ où les $\vec{v}_j$ sont les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ (dans une base $\mathfrak{B}_F$ d'un espace vectoriel *F* de dimension *n*, par exemple $M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec sa base naturelle)

On voit alors que :

- (*S*) admet au moins une solution si et seulement si $\vec{w}\in\mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_p)$
- (*S*) admet au plus une solution si et seulement si $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_p)$ est libre.

En effet (premier point évident) :

- Si $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_p)$ est libre :
  - si il n'y a pas de solution, on a 0 solutions
  - si il y en a une, disons $(x_1,x_2,\ldots x_p)$. Soit $(x'_1,x'_2,\ldots x'_p)$ une autre solution. Montrons que $(x_1,x_2,\ldots x_p)=(x'_1,x'_2,\ldots x'_p)$. On a $\sum_{j=1}^{p}x_i\vec{v}_j=\sum_{j=1}^{p}x'_i\vec{v}_j=\vec{w}$, soit $\sum_{j=1}^{p}(x_i-x'_i)\vec{v}_j=0$. Donc $\forall k\in[\![1,p]\!], x_k=x'_k$
- Si $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_p)$ est liée, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_p)\neq(0,0,\ldots0)$ tel que $\sum_{j=1}^{p}\lambda_i\vec{v}_j=0$. Donc si $(x_1,x_2,\ldots x_p)$ est solution de (*S*), alors $(x_1+\lambda_1,x_2+\lambda_2,\ldots x_p+\lambda_p)$ en est aussi solution.

Remarque : si $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_p)$ est une base de *F*, ($n = p$), alors (*S*) admet une unique solution quel que soit $\vec{w}$

(*S*) peut traduire une égalité du type $\varphi(\vec{u}) = \vec{w}$, où φ est une application linéaire d'un espace *E* de dimension *p* vers un espace *F* de dimension *n* et dont la matrice dans les bases $\mathfrak{B}_E$ et $\mathfrak{B}_F$ données est *A* et où $\vec{w}$ est un élément de *F* de composantes $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}_F$ et où $\vec{u}$ est un vecteur (inconnu) de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}_E$ (remarque : si $\mathfrak{B}_E = (e_1, e_2 ... e_p)$, les $\vec{v}_j$ sont les $\varphi(\vec{e}_j)$)

- (*S*) admet au moins une solution si et seulement si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$.
- (*S*) admet au plus une solution si et seulement si φ est injective (même démonstration)
- Si φ est bijective (alors $n = p$), (*S*) a une et une seule solution, quel que soit le second membre.
- Si φ n'est pas bijective, le comportement de (*S*) dépend du second membre :
  - Si $\vec{w} \notin \operatorname{Im}\varphi$, alors (*S*) n'a pas de solution
  - Si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$, alors (*S*) a au moins une solution. Plus précisément :
    - Si φ est injective, une seule solution.
    - Sinon, une infinité (pour $\mathbb{K}$ infini), et ces solutions sont les $\{\vec{u}_0 + \vec{n}, \vec{n} \in \ker\varphi\}$, où $\vec{u}_0$ est une solution fixée de (*S*). En effet : si $\vec{u}_0$ est solution, alors : $\vec{u}$ solution $\Leftrightarrow \varphi(\vec{u}_0) = \varphi(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{u}_0 - \vec{u} \in \ker\varphi$.

Cas particulier : $n = p$ (φ est injective $\Leftrightarrow$ φ est surjective). Si φ n'est pas bijective, alors :

- Si $\vec{w} \notin \operatorname{Im}\varphi$, alors (*S*) n'a pas de solution
- Si $\vec{w} \in \operatorname{Im}\varphi$, alors (*S*) a une infinité de solutions.

(*S*) peut traduire :

$$\begin{cases} \varphi_1(u) = b_1 \\ \varphi_2(u) = b_2 \\ \quad\vdots \\ \varphi_n(u) = b_n \end{cases}$$

Où les φ_i sont *n* formes linéaires sur un espace vectoriel *E* de dimension *p* :

$$\varphi_i : \begin{array}{c} E \to K \\ u \text{ de composantes} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \end{array}$$

Dans le cas particulier d'un système homogène (c'est-à-dire que la colonne du second membre est nulle), le système traduit : $u \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ où H_i est l'hyperplan $\ker\varphi_i$.

Remarque : dans tout les cas, l'ensemble des solutions de $(S): AX = B$ est l'ensemble des $X_0 + U, U \in S_H$ où X_0 est une solution de (S) et S_H l'ensemble des solutions de $(H) : AX = 0$, homogène associé à (*S*).

C) Résolution

Après méthode du pivot (transformation sur les lignes et, éventuellement, échange d'inconnues), on est ramené à :

$$(S):\ \begin{matrix} r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ n-r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|cccc} * & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \ddots & - & - & - & - & - \\ \vdots & \ddots & * & - & - & - & - \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{p-r}$$

On voit déjà que (*S*) est compatible si et seulement si $\forall i \in [\![r+1, n]\!], b_i = 0$.

Démonstration :

- Si $\exists i \in [\![r+1, n]\!], b_i \neq 0$, alors (*S*) est incompatible
- Si $\forall i \in [\![r+1, n]\!], b_i = 0$, le système (*S*) équivaut alors au système (*S*') :

$$(S):\ r\left\{\left(\begin{matrix} * & - & - & - & - & - & - \\ & \ddots & - & - & - & - & - \\ 0 & & * & - & - & - & - \end{matrix}\right)\right.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{p-r}$$

Or, en tant que d'inconnues $x_1, x_2, \dots x_r$, ayant fixé les autres, le système est un système triangulaire supérieur sans 0 sur la diagonale :

$$r\left(\underbrace{\begin{matrix} * & - & - \\ & \ddots & - \\ 0 & & * \end{matrix}}_{r}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \sum\limits_{j=r+1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ b_r - \sum\limits_{j=r+1}^{p} a_{r,j} x_j \end{pmatrix}$$

Le système a des solutions, obtenues « en fixant arbitrairement $p - r$ inconnues ».

Ainsi :

Soit (*S*) à *n* équations, *p* inconnues, de rang *r*.

Alors :

- Il y a $n - r$ conditions de compatibilité
- Lorsqu'elles sont satisfaites, le système admet des solutions avec $p - r$ degrés de liberté.

Cas particuliers :

- Si $r = n$, le système est toujours compatible (0 conditions de compatibilité)
- Si $r = p$ et que le système est compatible, il y a une unique solution.

- Si $r = p = n$, le système a une et une seule solution.
- Si (S) est homogène, il est toujours compatible (au moins la solution nulle) et l'ensemble de ses solution est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p - r$.

D) Compléments

1) Polynôme de matrices

Soit $A \in M_m(\mathbb{K})$.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, disons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ ($A^0 = I_m$).

Alors l'application $\begin{array}{l}\phi : \mathbb{K}[X] \to M_m(\mathbb{K}) \\ \quad P \mapsto P(A)\end{array}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, c'est-à-dire que pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$(P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A)$

$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$

$(1_{\mathbb{K}[X]})(A) = I_m$

(Vérifications simples, sauf pour la multiplication où il faut faire attention)

Proposition :

Toute matrice A admet un polynôme annulateur de A non nul et de degré $\leq m^2$ (un polynôme annulateur est un polynôme tel que $P(A) = 0$).

En effet : $A^0, A^1, \ldots A^{m^2}$ sont $m^2 + 1$ vecteurs de $M_m(\mathbb{K})$. Donc la famille $(A^k)_{k \in [\![0, m^2]\!]}$ est liée. Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{m^2}) \neq (0,0,\ldots 0)$ tel que $\sum_{k=0}^{m^2} \lambda_k A^k = 0$.

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{m^2} \lambda_k X^k$ est donc non nul et vérifie $P(A) = 0$.

(On a montré en même temps que ϕ n'est pas injective, puisque $\ker \phi \neq \{0\}$).

Proposition :

Il existe $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0\} = \{MQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

M est unique à une constante multiplicative près.

En effet :

On pose M un polynôme de degré minimal (mais non nul) annulateur de A.

Soit alors N un autre polynôme annulateur.

La division euclidienne de N par M donne :

$N = MQ + R$ avec $\deg R < \deg M$

Donc $\underbrace{N(A)}_{=0} = \underbrace{M(A)}_{=0} \times Q(A) + R(A)$. Donc $R(A) = 0$. Donc $R = 0$ car sinon M n'est pas de degré minimal. Donc M divise N.

2) Matrices semblables

Soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables (ou que B est semblable à A) lorsqu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B=P^{-1}AP$

On peut montrer aisément que « être semblable à » est une relation d'équivalence. Elle est plus fine que la relation « être équivalent à » sur $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que « être semblable à » $\Rightarrow$ « être équivalent à ».

Mais la réciproque est fausse :

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont équivalentes (car de même rang), mais non semblables : si on trouve P tel que $A=P^{-1}IP$, alors $A=P^{-1}P=I$

Ainsi, B est semblable à A si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans une base différente.

Plus précisément :

Etant donné E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathfrak{B}$,

et $\varphi\in L(E)$ tel que $A=\text{mat}(\varphi,\mathfrak{B})$

Alors B est semblable à A $\Leftrightarrow$ il existe une autre base $\mathfrak{B}$' de E telle que $B=\text{mat}(\varphi,\mathfrak{B}')$.

(La démonstration est la même que pour l'équivalence)

Une matrice semblable à une matrice diagonale est une matrice diagonalisable (attention, toutes ne le sont pas)

Exemple :

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Montrons que A n'est pas diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 muni d'une base $\mathfrak{B}=(e_1,e_2)$

Soit $\varphi\in L(E)$ tel que $A=\text{mat}(\varphi,\mathfrak{B})$

Peut-on trouver $\mathfrak{B}$' telle que $\text{mat}(\varphi,\mathfrak{B}')$ soit diagonale ?

Supposons que $\mathfrak{B}$' existe, disons $\mathfrak{B}'=(e'_1,e'_2)$

Alors il existe $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que $\varphi(e'_1)=\lambda_1e'_1$ et $\varphi(e'_2)=\lambda_2e'_2$. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ la colonne des composantes de e'_1 dans $\mathfrak{B}$.

Alors $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases}x+y=\lambda_1x\\ y=\lambda_1y\end{cases}$

Si $\lambda_1\neq1$, alors $x=y=0$, ce qui est impossible car e'_1 est un vecteur d'une base.

Donc $\lambda_1=1$

De même, $\lambda_2=1$

Donc $\varphi=\text{Id}_E$, ce qui est contradictoire car $A\neq I_2$. Donc A n'est pas diagonalisable.

3) Trace

Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\in M_n(\mathbb{K})$

Alors $\mathrm{Tr}(A)\underset{\text{déf}}{=}\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}$

Proposition :

L'application $\begin{aligned}M_n(\mathbb{K})&\to\mathbb{K}\\A&\mapsto\mathrm{Tr}(A)\end{aligned}$ est une forme linéaire (évident)

Proposition :

Pour tout $A,B\in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$

Démonstration :

Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, $C=AB=(c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, $D=BA=(d_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$

On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(C)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}\right)=\sum_{k=1}^{n}d_{k,k}=\mathrm{Tr}(D)=\mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

Conséquence :

Si A et B sont semblables, alors elles ont même trace (réciproque fausse) :

$\mathrm{Tr}(B)=\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{Tr}(P^{-1}(AP))=\mathrm{Tr}(APP^{-1})=\mathrm{Tr}(A)$

Contre-exemple pour la réciproque :

$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=2$ mais $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ n'est pas semblable à $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Conséquence : on peut définir la trace d'un endomorphisme :

$\mathrm{Tr}(\varphi)$ est la trace de n'importe quelle matrice A telle que $A=\mathrm{mat}(\varphi,\mathfrak{B})$.