Chapitre 15 : Espace vectoriel euclidien

I Définition et notations

Un espace vectoriel euclidien $\underset{\text{déf}}{=}$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension $n \geq 2$, le produit scalaire est noté φ. Pour $x, y \in E$, on note aussi :

- $x \cdot y$ pour $\varphi(x, y)$ (parfois on rencontre aussi $(x \mid \mathrm{y})$)
- x^2 pour $\varphi(x, x)$
- $\|x\|$ pour $\sqrt{\varphi(x, x)}$ (ainsi, $x \mapsto \|x\|$ est la norme associée au produit scalaire φ, on l'appelle la norme euclidienne)
- $x \perp y$ pour $\varphi(x, y) = 0$

Exemple : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique : on parle de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est muni naturellement d'une structure euclidienne, obtenue par restriction.

II Bases orthonormales

A) Généralités

Définition, proposition :

Une base orthonormale (ou orthonormée) $\underset{\text{déf}}{=}$ une famille orthonormale de vecteurs de E qui en forme une base = une famille orthonormale de n vecteurs de E (car une famille orthonormale est libre.

Théorème (Schmidt) :

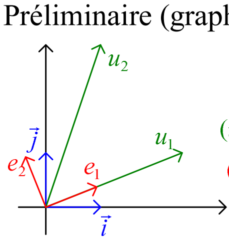
Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une base quelconque de E.

Alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, e_2, \dots e_n)$ telle que :

- $\forall p \in [\![1, n]\!], \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots u_p)$
- $\forall p \in [\![1, n]\!], e_p \cdot u_p > 0$

On dit que $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est la base orthonormale s'appuyant sur la base $(u_1, u_2, \dots u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Préliminaire (graphique) :



$(\vec{i}, \vec{j})$: base orthonormée

(u_1, u_2) : base quelconque

(e_1, e_2) : base orthonormée qui s'appuie dessus

Démonstration :

On montre par récurrence sur p que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, « on a une et une seule manière de construire e_p ».

- Il est évident qu'il y a une seule façon de construire e_1 de sorte que :

• $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(u_1)$ (cela impose que $e_1 = \lambda u_1$, avec $\lambda \neq 0$ car $e_1 \neq 0, u_1 \neq 0$)

• $\|e_1\| = 1$ (cela impose alors que $|\lambda|\|u_1\| = 1$, ainsi $e_1 = \pm|\lambda|u_1$)

• $e_1 \cdot u_1 > 0$, donc $e_1 = +|\lambda|u_1$.

Ainsi, $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Réciproquement, ce vecteur convient bien

- Soit $p \in [\![1,n-1]\!]$. Supposons $(e_1, e_2, ...e_p)$ construit.

Montrons qu'il y a un et un seul choix de sorte que :

• $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ...e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, ...u_{p+1})$ (1)

• e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1 \leq i \leq p$ (2)

• $\|e_{p+1}\| = 1$ (3)

• $e_{p+1} \cdot u_{p+1} > 0$ (4)

(1) impose que e_{p+1} soit combinaison linéaire des $u_i, 1 \leq i \leq p+1$

$= \lambda u_{p+1} + \underbrace{\text{combinaison linéaire des } u_i, 1 \leq i \leq p}_{\text{combinaison linéaire des } e_i, 1 \leq i \leq p}$

et $\lambda \neq 0$ car sinon $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ...e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, ...u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, ...u_{p+1})$ et u_{p+1} serait alors combinaison linéaire des $u_i, 1 \leq i \leq p$.

Donc $e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right)$.

Et inversement, si $e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right)$, alors on a bien (1).

(2) impose que pour $j \in [\![1,p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = 0$.

Or, pour $j \in [\![1,p]\!], e_j \cdot e_{p+1} = \lambda\left(u_{p+1} \cdot e_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \cdot e_j\right) = \lambda(u_{p+1}.e_j + \alpha_j)$ car on a $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$, 1 sinon, par hypothèse de récurrence.

Ainsi, $\forall j \in [\![1,n]\!], \alpha_j = -u_{p+1} \cdot e_j$

Inversement, si cette condition est vérifiée, on a bien (2).

(3) impose que $\|e_{p+1}\| = 1$, c'est-à-dire que $1 = |\lambda|\left\|u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right\|$.

Donc $\lambda = \pm \dfrac{1}{\left\|u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right\|}$

($u_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \neq 0$ car sinon $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ...e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, ...u_p)$)

Inversement, si on a cette valeur de λ, on a bien (3).

(4) impose le choix de +, car $e_{p+1}\cdot e_{p+1}=\lambda\left(u_{p+1}\cdot e_{p+1}+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_i\cdot e_{p+1}\right)$.

Or, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_i\cdot e_{p+1}=0$ car e_{p+1} est orthogonal aux $e_i, 1\leq i\leq p$.

Donc $\underbrace{e_{p+1}\cdot e_{p+1}}_{=1}=\lambda\underbrace{u_{p+1}\cdot e_{p+1}}_{>0}$ donc $\lambda>0$.

Inversement, si $\lambda>0$, on a bien (4).

Ce qui achève la récurrence.

Conséquences :

(1) Dans un espace vectoriel euclidien, il existe au moins une base orthonormale

(2) Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

En effet :

Soit $(e_1,e_2,...e_p)$ une famille orthonormale. Comme elle est libre, on peut la compléter en une base $(e_1,e_2,...e_p,e_{p+1},...e_n)$ de *E*. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on obtient alors une base orthonormale $(e'_1,e'_2,...e'_n)$. Mais, d'après le théorème de Schmidt appliqué dans $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...e_n)$, on a $(e_1,...e_p)=(e'_1,...e'_p)$.

B) Produit scalaire et base orthonormale

Soit $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base orthonormale de *E*.

Soit $x\in E$, de composantes $(x_1,x_2,...x_n)$ dans $\mathfrak{B}$, notons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

Soit $y\in E$, de composantes $(y_1,y_2,...y_n)$ dans $\mathfrak{B}$, notons $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

On identifie ici $\mathbb{R}$ et $M_{1,1}(\mathbb{R})$ pour ne pas charger les notations :

$$x\cdot y=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j e_j\right)=\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}x_i e_i\cdot y_j e_j=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=({}^tX)Y$$

Ainsi, $\boxed{x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i=({}^tX)Y}$.

Et, en particulier : $\boxed{x^2=x\cdot x=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=({}^tX)X}$

Ainsi, l'application $\phi_{\mathfrak{B}}:\begin{array}{c}\mathbb{R}^n\to E\\(x_1,x_2,...x_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\end{array}$, qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev, est aussi un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev euclidien *, $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique. (* C'est-à-dire que pour tout $u,v\in\mathbb{R}^n,\phi_{\mathfrak{B}}(u)\cdot\phi_{\mathfrak{B}}(v)=u\cdot v$, en plus des règles pour un $\mathbb{R}$-ev).

Remarque :

Inversement, soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $\mathfrak{B}=(u_1,u_2,...u_n)$ une base de E.

Alors il existe un et un seul produit scalaire tel que $\mathfrak{B}$ soit orthonormale dans le $\mathbb{R}$-ev euclidien E muni de ce produit scalaire.

En effet, c'est l'application φ définie par :

Pour tout $x,y\in E$, de composantes $(x_1,x_2,...x_n)$ et $(y_1,y_2,...y_n)$ dans $\mathfrak{B}$,

$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Exemple :

$\mathbb{R}^2$, muni de la base $[\underbrace{(1,2)}_{u_1},\underbrace{(1,1)}_{u_2}]$. On note $(\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Alors $x=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}=x_1(2u_2-u_1)+x_2(u_1-u_2)=(x_2-x_1)u_1+(2x_1-x_2)u_2$.

Ainsi, $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire naturel, mais (u_1,u_2) n'en est pas une pour ce produit scalaire ; en revanche, c'en est une pour le produit scalaire φ : $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2))\mapsto(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(2x_1-x_2)(2y_1-y_2)\\ 2x_2y_2+5x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1\end{array}$.

III Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projecteurs et symétries orthogonaux

A) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel (rappel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

On définit $F^{\perp}=\{x\in E,\forall y\in F,x\cdot y=0\}$.

Alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, et $E=F\oplus F^{\perp}$.

Démonstration :

Déjà, c'est un sous-espace vectoriel de E (vu dans le chapitre précédent).

- Si $F=\{0\}$, alors $F^{\perp}=E$, et on a bien $E=F\oplus F^{\perp}$.
- Si $F\neq\{0\}$. On note p la dimension de F ; ainsi, $1\leq p\leq n$.

Soit $(e_1,e_2,...e_p)$ une base orthonormale de F.

On la complète en une base orthonormale $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ de E. Soit alors $x\in E$, de composantes $(x_1,x_2,...x_n)$ dans $\mathfrak{B}$.

On a alors les équivalences :

$$x\in F^{\perp}\Leftrightarrow\forall y\in F,\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\cdot y=0$$

$$\Leftrightarrow\forall y_1,y_2,...y_p\in\mathbb{R},\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}y_ie_i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\forall j\in[\![1,p]\!],\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)\cdot e_j=0\Leftrightarrow\forall j\in[\![1,p]\!],x_j=0$$

L'avant-dernière équivalence se justifie dans un sens en prenant, pour $j\in[\![1,p]\!]$ $y_j=1$ et $\forall i\in[\![1,p]\!]\setminus\{j\}, y_i=0$, et dans l'autre sens par linéarité de la deuxième variable.

Donc $F^\perp=\text{Vect}(e_{p+1},e_{p+2},...e_n)$, donc $F^\perp$ est bien supplémentaire de *F* dans *E*.

Conséquence :

Dans un espace euclidien, $(F^\perp)^\perp=F$.

En effet, on a déjà vu que $F\subset(F^\perp)^\perp$. De plus, en notant $p=\dim F$, on a : $\dim(F^\perp)=n-p$, donc $\dim((F^\perp)^\perp)=n-(n-p)=p=\dim F$. D'où l'égalité.

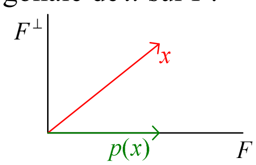
B) Projecteur orthogonal

Définition :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*.

Le projecteur orthogonal sur *F* $\underset{\text{déf}}{=}$ le projecteur sur *F* selon $F^\perp$.

Pour $x\in E$, *p* le projecteur orthogonal sur *F*, alors $p(x)$ est appelée la projection orthogonale de *x* sur *F*.



Ainsi, $p(x)$ est l'unique élément de *F* tel que *x* s'écrive :

$x=p(x)+u$, où $u\in F^\perp$. (car $E=F\oplus F^\perp$, et $x\in E, p(x)\in F$)

Autrement dit, $p(x)$ est l'unique élément de *F* tel que $x-p(x)\in F^\perp$. Ainsi, pour $y\in E$, $y=p(x)\Leftrightarrow\begin{cases}y\in F\\ x-y\in F^\perp\end{cases}$.

C) Distance d'un élément à un sous-espace vectoriel

Définition :

Soit *A* une partie non vide *E* et soit $x\in E$. Alors la distance de *x* à *A*, notée $d(x,A)$, est : $d(x,A)\underset{\text{déf}}{=}\inf_{y\in A}d(x,y)$.

La borne inférieure existe bien, car $\{d(x,y),y\in A\}$ est non vide (car *A* est non vide), et minorée (par 0).

(Définition : frontière = adhérence d'une partie, privée de l'intérieur)

Théorème :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*, soit *p* le projecteur orthogonal sur *F*.

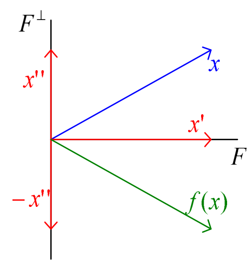
Soit $x_0\in E$.

Alors $p(x_0)$ est l'unique élément de *F* tel que $d(x_0,F)=\|x_0-p(x_0)\|$. Autrement dit, la distance de x_0 est atteinte, en un et un seul point, qui n'est autre que $p(x_0)$.

Démonstration :
Soit $y \in F$.
Alors $\|y-x_0\|^2 = \|y-p(x_0)+p(x_0)-x_0\|^2$.
Or, $y-p(x_0) \in F$ car $y \in F, p(x_0) \in F$; et $p(x_0)-x_0 \in F^\perp$ par définition de p.
Donc $y-p(x_0) \perp p(x_0)-x_0$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :
$$\|y-x_0\|^2 = \|y-p(x_0)+p(x_0)-x_0\|^2 = \|y-p(x_0)\|^2 + \|p(x_0)-x_0\|^2$$
D'où $\|y-x_0\| \geq \|p(x_0)-x_0\|$, et il n'y a égalité que si $y = p(x_0)$ (car sinon $\|y-x_0\|^2 - \|p(x_0)-x_0\|^2 = \|y-p(x_0)\|^2 \neq 0$)

D) Symétries orthogonales

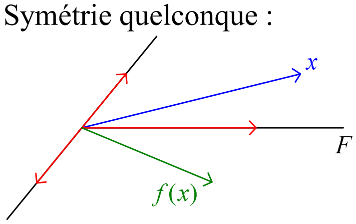
Ce sont les symétries par rapport à un sous-espace vectoriel F, selon $F^\perp$.
Autrement dit :
La symétrie orthogonale par rapport à $F \underset{\text{déf}}{=}$ l'application $\begin{array}{rl} f: E = F \oplus F^\perp & \to E \\ x = x'+x'' & \mapsto x'-x'' \end{array}$.



Remarque : $f(x) = 2p(x) - x$, où p est la projection orthogonale sur F.

Proposition :
Soit f une symétrie sur E. On a l'équivalence :
f est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow \forall x \in \|f(x)\| = \|x\|$.

Symétrie quelconque :



Démonstration :
Soit f une symétrie par rapport à F selon G. (où G est tel que $E = F \oplus G$).
Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$, et $f(x) = x_F - x_G$.
Donc $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$ et $\|f(x)\|^2 = \|x_F\|^2 - 2x_F \cdot x_G + \|x_G\|^2$.
Ainsi :

- Si $G = F^\perp$, alors $x_F \cdot x_G$ vaudra toujours 0. Donc $\forall x \in \|f(x)\| = \|x\|$
- Si $G \neq F^\perp$, on peut trouver $x' \in F, x'' \in G$ tel que $x' \cdot x'' \neq 0$. Alors, en prenant $x = x' + x''$ $(\in E)$, on aura trouvé x tel que $\|f(x)\| \neq \|x\|$. D'où l'équivalence.

IV Formes linéaires et hyperplans

A) Formes linéaires

Théorème :

Les formes linéaires sur E sont exactement les applications du type : $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a \cdot x \end{array}$, où $a \in \mathbb{R}$. Plus précisément :

(1) Les applications du type $x \mapsto a \cdot x$ sont linéaires, et

(2) Si $h \in E^*$, alors il existe un et un seul élément a de E tel que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$. (on retrouve ainsi le fait que $\dim(E^*) = \dim(E)$)

Démonstration :

Le premier point résulte de la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable. Pour le deuxième :

Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $h \in E^*$.

Il existe alors $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$ de composantes $(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans $\mathfrak{B}$, $h(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a \cdot x$, avec $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ (on introduit en fait $(a_1\ a_2 \dots a_n)$, matrice de h dans les bases $\mathfrak{B}$ et (1)). D'où l'existence.

Unicité :

Si il existe $a, a' \in E$ tels que $\forall x \in E, h(x) = a \cdot x$ et $h(x) = a' \cdot x$, alors $\forall x \in E, (a - a') \cdot x = 0$ (linéarité par rapport à la première variable).

Donc $a - a' \in E^\perp = \{0\}$, d'où $a = a'$.

B) Hyperplans

Soit H un hyperplan de E. Alors H est le noyau d'une forme linéaire sur E, h, non nulle (attention, il n'y a pas unicité !).

Or, il existe $\vec{n} \in E$ tel que $\forall x \in E, h(x) = \vec{n} \cdot x$.

Ainsi, $H = \ker h = \{x \in E, h(x) = 0\} = \{x \in E, \vec{n} \cdot x = 0\} = [\mathrm{Vect}(\vec{n})]^\perp$.

Donc $\vec{n}$ dirige la droite vectorielle $N = H^\perp$. On dit que N est la normale à H : $N = H^\perp$, ou encore $N^\perp = H$, et que $\vec{n}$ est un vecteur normal à H.

Remarque :

Si $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base orthonormale de E,

Si H a pour équation $H : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ dans $\mathfrak{B}$, alors le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{B}$ est normal à H. En effet, l'équation "dit" : $x \in H \Leftrightarrow \vec{n} \cdot x = 0$.

C) Projection orthogonale sur un hyperplan

On considère un hyperplan H, un vecteur $\vec{n}$ normal à H et p le projecteur orthogonal sur H.

Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{x'}_{\in H} + \underbrace{x''}_{\in H^\perp}$, et $\begin{cases} x' = p(x) \\ x'' = \lambda \vec{n}, \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Donc $\boxed{x = p(x) + \lambda.\vec{n}}$

Ainsi, $x \cdot \vec{n} = \underbrace{p(x) \cdot \vec{n}}_{=0 \text{ car } p(x) \in H} + \lambda \|\vec{n}\|^2$

D'où $\lambda = \dfrac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$, et, par conséquent :

$p(x) = x - x'' = x - \lambda.\vec{n}$

Soit $\boxed{p(x) = x - \left(\dfrac{x \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right).\vec{n}}$

Conséquence :

Pour tout $x \in E$, $\boxed{d(x, H) = \|x - p(x)\| = \dfrac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \dfrac{|x \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$.

D) Réflexion

Une réflexion $\underset{\text{déf}}{=}$ une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition :

Etant donnés deux vecteurs x, x' de E, distincts et de même norme, il existe une et une seule réflexion qui les échange.

Démonstration :

Existence :

Soit H l'hyperplan tel qu'un vecteur normal soit $x - x'$, et soit f la réflexion d'hyperplan H. On note enfin p la projection orthogonale sur H.

$$\text{Alors } f(x) = 2p(x) - x = 2\left(x - \frac{x \cdot (x - x')}{\|x - x'\|^2}(x - x')\right) - x$$

$$= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{\|x\|^2 - 2x \cdot x' + \|x'\|^2}(x - x') - x$$

$$= -2\frac{\|x\|^2 - x \cdot x'}{2\|x\|^2 - 2x \cdot x'}(x - x') - x$$

$$= -(x - x') - x = x'$$

Et, de même, $f(x') = x$.

Unicité :

Supposons qu'il existe deux réflexions f, g d'hyperplans F, G telles que :

$f(x) = x'\,;\, f(x') = x \quad ; \quad g(x) = x'\,;\, g(x') = x$

On a alors :

Déjà, $x-x'$ est normal à F. En effet :

Pour tout $y\in F$, on a déjà :

$$\|f(x-y)\|=\|x-y\|$$
$$=\|f(x)-f(y)\|=\|x'-y\|$$

D'où $\|x-y\|=\|x'-y\|$.

De plus, pour tout $y\in F$:

$$(x-x')\cdot y=x'\cdot y-x\cdot y=\tfrac{1}{2}\left(\|x'\|^2+\|y\|^2-\|x'-y\|^2\right)-\tfrac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$
$$=0 \text{ car } \|x'\|=\|x\| \text{ et } \|x'-y\|=\|x-y\|$$

Donc $F^{\perp}=\mathrm{Vect}(x-x')$.

De même, $G^{\perp}=\mathrm{Vect}(x-x')$

Donc $F^{\perp}=G^{\perp}$, d'où $F=G$.

V Automorphismes orthogonaux

A) Définition, théorème

Soit $f\in L(E)$.

f est un automorphisme orthogonal $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ f "conserve le produit scalaire"(1) :

$\forall x,y\in E, f(x)\cdot f(y)=x\cdot y$

$\Leftrightarrow$ f "conserve la norme"(2) :

$\forall x\in E, \|f(x)\|=\|x\|$

$\Leftrightarrow$ f "conserve les bases orthonormales"(3) :

Pour toute base orthonormale $(e_1,e_2,\dots e_n)$

$(f(e_1),f(e_2),\dots f(e_n))$ est orthonormale

$\Leftrightarrow$ f "conserve une base orthonormale"(4) :

Il existe une base orthonormale $(e_1,e_2,\dots e_n)$

telle que $(f(e_1),f(e_2),\dots f(e_n))$ est orthonormale

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : évident ; si (1), alors $f(x)^2=x^2$

(2) $\Rightarrow$ (1) : supposons (2).

Soient $x,y\in E$. Alors :

$$f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$$
$$=x\cdot y$$

$(1) \Rightarrow (3)$: supposons (1).

Soit $(e_1, e_2, ... e_n)$ une base orthonormale.

Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{i;j}$

$(3) \Rightarrow (4)$: il en existe puisque l'ensemble des bases orthonormales n'est pas vide.

$(4) \Rightarrow (1)$: supposons (4).

Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, ... e_n)$ une base orthonormale telle que $\mathfrak{B}' = (f(e_1), f(e_2), ... f(e_n))$ soit aussi orthonormale.

Soient alors $x, y \in E$, de composantes $(x_1, x_2, ... x_n)$ et $(y_1, y_2, ... y_n)$ dans $\mathfrak{B}$.

Alors $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Et $f(x) \cdot f(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ car $\mathfrak{B}$' est aussi orthonormale, et les composantes de $f(x)$ et $f(y)$ dans $\mathfrak{B}$' sont $(x_1, x_2, ... x_n)$ et $(y_1, y_2, ... y_n)$ puisque *f* est linéaire (rappel : pour une application linéaire, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$)

Remarque :

Si une application f est un automorphisme orthogonal, alors c'est aussi un automorphisme.

En effet : si *f* est un automorphisme orthogonal, alors :

$f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc $\ker f = \{0\}$. Donc *f* est injective, donc bijective (puisque *E* est de dimension finie)

Définition, proposition :

On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de *E*. Alors $O(E)$ constitue un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ des automorphismes de *E*. On l'appelle le groupe orthogonal de *E*. Les éléments de $O(E)$ sont aussi appelés des isométries vectorielles.

Démonstration :

- $\mathrm{Id}_E \in O(E)$
- Si $f, g \in O(E)$, alors $f \circ g \in O(E)$ et $f^{-1} \in O(E)$:

$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$, et $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\| = \|x\|$.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont des éléments de $O(E)$

B) Matrices orthogonales

Théorème :

Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale de *E*. Soit $f \in L(E)$, et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \mathrm{mat}(f, \mathfrak{B})$.

Alors :

$f \in O(E) \Leftrightarrow$ les colonnes de *A* forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire naturel $\Leftrightarrow A^t A = I_n \Leftrightarrow$ *A* est inversible et $A^{-1} = {}^t A$

Démonstration :

$f\in O(E) \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2),\dots f(e_n))$ est orthonormée

$\Leftrightarrow \forall i,j\in [\![1,n]\!], f(e_i)\cdot f(e_j)=\delta_{i,j}$

$\Leftrightarrow \forall i,j\in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j}$

$\Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$...

et $\forall i,j\in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j} \Leftrightarrow {}^tAA=I_n$

$\Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1}={}^tA$

$\Leftrightarrow A{}^tA=I_n$

D'où le résultat.

Définition, proposition :

- Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$

A est orthogonale $\underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} {}^tAA=I_n \Leftrightarrow$ A est inversible et $A^{-1}={}^tA$

- L'ensemble des matrices carrées et orthogonales, noté O_n (ou $O(n)$, ou $O_n(\mathbb{R})$), forme un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$

- Si $\mathfrak{B}$ est une base orthonormale de E, si f est une application linéaire de E dans E, et si $A=\mathrm{mat}(f,\mathfrak{B})$, alors $f\in O(E)\Leftrightarrow A\in O_n$

- $\mathfrak{B}$ étant une base orthonormale de E, l'application $\phi:\begin{array}{l} O(E)\to O_n \\ f\mapsto \mathrm{mat}(f,\mathfrak{B})\end{array}$ est un isomorphisme du groupe $(O(E),\circ)$ dans $(O_n,\times)$

En effet :

Déjà, ϕ est correctement définie, puisque pour $f\in O(E)$, $\mathrm{mat}(f,\mathfrak{B})$ est bien orthogonale.

- $\phi(f\circ g)=\mathrm{mat}(f\circ g,\mathfrak{B})=\mathrm{mat}(f,\mathfrak{B})\times\mathrm{mat}(g,\mathfrak{B})=\phi(f)\times\phi(g)$
- $\phi(\mathrm{Id}_E)=I_n$
- C'est surjectif d'après le tiret précédent : pour $A\in O_n$, on trouve $f\in O(E)$.
- C'est aussi injectif : $\ker\phi=\{\mathrm{Id}\}$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O_n$$

C) Déterminant d'un automorphisme orthogonal

Proposition :

Si $f\in O(E)$, alors $\det f=\pm 1$

Si $A\in O_n$, alors $\det A=\pm 1$

Démonstration :

Si $A \in O_n$, on a alors :

${}^tAA = I_n$, donc $\det({}^tAA) = 1$, soit $\det({}^tA) \times \det(A) = 1$, d'où $\det(A)^2 = 1$

Si $f \in O(E)$: soit $A = \text{mat}(f, \mathfrak{B})$, où $\mathfrak{B}$ est une base orthonormale.

Alors $\det f = \det A = \pm 1$ car A est orthogonale.

Définition, proposition :

On note $SO(E)$ l'ensemble des éléments $f \in O(E)$ tels que $\det f = 1$

On note SO_n l'ensemble des $A \in O_n$ tels que $\det(A) = 1$.

Alors $SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial de *E*. Et SO_n est un sous-groupe de $(O_n, \times)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial d'ordre *n* (attention, SO_n n'est pas pour autant de cardinal *n* !)

Ces deux groupe sont isomorphes ; plus précisément, si $\mathfrak{B}$ désigne une base orthonormale de *E*, l'application $\begin{array}{c} O(E) \rightarrow O_n \\ f \mapsto \text{mat}(f, \mathfrak{B}) \end{array}$ définit, par restriction, un isomorphisme de $SO(E)$ vers SO_n.

(Remarque : $O(E) \setminus SO(E)$ n'est pas un sous-groupe, puisque si $\det f = -1$ et $\det g = -1$, alors $\det f \circ g = 1$!)

Exemple :

Soit *f* une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel quelconque *F* de *E*. (on note *p* la dimension de *F*).

Alors $f \in O(E)$ (puisque *f* conserve la norme)

On considère la matrice de *f* dans une base adaptée (le "début" dans *F*, le "reste" dans $F^\perp$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det f = (-1)^{n-p}$

Vocabulaire :

Un élément de $SO(E)$ est un automorphisme orthogonal direct / une isométrie vectorielle directe. (et indirect(e) pour les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$)

Ainsi :

- Les réflexions sont toujours indirectes ($n - p = 1$)
- Les symétries orthogonales par rapport à une droite (appelées aussi retournements) sont indirectes en dimension 2, directes en dimension 3.

Autre vocabulaire :

Les éléments de $SO(E)$ s'appellent aussi des rotations.

VI Orientation et changement de base

A) Orientation d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n.

Orienter E, c'est choisir une base $\mathfrak{B}$ de E, décréter qu'elle est directe, et convenir qu'étant donnée une base $\mathfrak{B}'$ de E :

$\mathfrak{B}'$ est directe $\Leftrightarrow \det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}' > 0$

$\mathfrak{B}'$ est indirecte $\Leftrightarrow \det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}' < 0$

Ainsi, étant données deux bases $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ de E, $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ sont de même sens (c'est-à-dire toutes les deux (in)directes) si et seulement si $\det_{\mathfrak{B}'} \mathfrak{B}'' > 0$

En effet : $\det_{\mathfrak{B}'} \mathfrak{B}'' = \det_{\mathfrak{B}'} \mathfrak{B} \times \det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}'' = (\det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}')^{-1} \times \det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}''$, qui est positif si et seulement si les deux déterminants on même signe.

Exemples :

- En dimension 2 :

Si $(\vec{i},\vec{j})$ est directe, alors $(\vec{j},\vec{i})$ est indirecte, $(-\vec{j},\vec{i})$ est directe, $(-\vec{i},-\vec{j})$ aussi.

(Les déterminants sont « multipliés par -1 » lorsqu'on échange deux vecteurs)

- En dimension 3 :

Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe, alors $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ est directe, $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ est indirecte, et $(\vec{j},\vec{i},-\vec{k})$ directe.

On considère dorénavant E orienté.

Proposition :

Si $(u_1,u_2,...u_p)$ est une famille orthonormale de E, avec $p<n$, on peut la compléter en une base orthonormée directe de E.

Démonstration :

On sait construire $(u_1,u_2,...u_n)$ base orthonormale. Ainsi, soit $(u_1,u_2,...u_n)$, soit $(u_1,u_2,...-u_n)$ sera directe.

B) Changement de base orthonormale

Proposition :

Soit $\mathfrak{B}=(e_1,e_2,...e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $\mathfrak{B}'=(e'_1,e'_2,...e'_n)$ une autre base de E, et P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$.

Alors $\mathfrak{B}'$ est orthonormale $\Leftrightarrow$ P est orthogonale.

Plus précisément :

$\mathfrak{B}'$ est orthonormale de même sens que $\mathfrak{B} \Leftrightarrow P\in SO_n$

$\mathfrak{B}'$ est orthonormale de sens contraire à $\mathfrak{B} \Leftrightarrow P\in O_n \setminus SO_n$.

Démonstration :

P donne les composantes de $\mathfrak{B}'$ dans $\mathfrak{B}$, qui est orthonormale.

Donc, pour tout $i,j\in [\![1,n]\!], e'_i \cdot e'_j = C_i \cdot C_j$ (produit scalaire naturel des colonnes de P), et donc $\mathfrak{B}'$ est orthonormale si et seulement si les colonnes de P forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. (Par ailleurs, $\det_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}' = \det P$, d'où le sens…)

Ainsi, si $\mathfrak{B}$ est une base orthonormée directe et si $\mathfrak{B}'$ est une autre base, P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$, alors $\mathfrak{B}'$ est une base orthonormée directe si et seulement si $P \in SO_n$

C) Automorphismes orthogonaux et orientation

Proposition :

Soit $f \in L(E)$, soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base orthonormale de E.

On sait déjà que $f \in O(E) \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale.

On a, plus précisément :

$f \in SO(E) \Leftrightarrow (f(e_1), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de même sens que $\mathfrak{B}$.

$f \in O(E) \setminus SO(E) \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$ est une base orthonormale de sens opposé à $\mathfrak{B}$.

Démonstration :

Si $\mathfrak{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n))$, alors $\det_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}') = \det f$.

D) Déterminant en base orthonormée directe

Proposition, définition :

Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormée directe de E.

Soit $(u_1, u_2, \dots u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\det_{\mathfrak{B}}(u_1, u_2, \dots u_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe $\mathfrak{B}$, et s'appelle le produit mixte de $u_1, u_2, \dots u_n$, qu'on note $\det(u_1, u_2, \dots u_n)$ ou $[u_1, u_2, \dots u_n]$.

Démonstration :

Si $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ sont deux bases orthonormées directes :

$$\det_{\mathfrak{B}'}(u_1, u_2, \dots u_n) = \underbrace{\det_{\mathfrak{B}'} \mathfrak{B}}_{\substack{=1 \text{ car } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \\ \text{sont deux bases} \\ \text{orthonormales} \\ \text{de même sens}}} \times \det_{\mathfrak{B}}(u_1, u_2, \dots u_n)$$