

Chapitre 8 : Cercles et sphères

I Le cercle dans le plan

\mathfrak{P} désigne ici un plan affine euclidien.

A) Définition

Soit Ω un point de \mathfrak{P} et R un réel positif.

Définition :

Le cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de \mathfrak{P} tels que $\Omega M = R$ (il est réduit à $\{\Omega\}$ lorsque $R = 0$)

On appelle diamètre d'un cercle tout segment joignant deux points de ce cercle et passant par son centre.

B) Cercle circonscrit à un triangle

Théorème :

Par trois points non alignés A, B et C de \mathfrak{P} passe un et un seul cercle.

Démonstration :

Les médiatrices \mathfrak{D}_{AB} et \mathfrak{D}_{BC} des segments $[A, B]$ et $[B, C]$ sont sécantes (elles ne sont pas parallèles car leurs vecteurs normaux \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont non colinéaires), et si Ω désigne leur point d'intersection, alors on a $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$, d'où $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ (donc Ω est aussi sur la troisième médiatrice).

Il est alors clair que le cercle de centre Ω et de rayon $R = \Omega A = \Omega B = \Omega C$ est un cercle qui passe par A, B, C et que c'est le seul (car le centre d'un cercle passant par A, B, C appartient aux trois médiatrices de $[A, B], [B, C], [C, A]$)

Remarque :

Le théorème équivaut à dire que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes, ce qui ressort de la démonstration.

C) Une caractérisation

Proposition :

Soient A, B deux points de \mathfrak{P} . L'ensemble des points M de \mathfrak{P} tels que \overrightarrow{MA} est orthogonal à \overrightarrow{MB} est un cercle de diamètre $[A, B]$.

Démonstration :

Soit I le milieu de $[A, B]$. Alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = IA$$

D) Equation cartésienne

Soit \mathfrak{R} un repère orthonormé du plan \mathfrak{P} .

Un point $M(x, y)$ appartient au cercle C de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R si et seulement si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Par conséquent, tout cercle admet dans un repère orthonormé une équation du type $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$. Inversement, une équation de ce type se met sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - k$, donc est l'équation, dans \mathfrak{R} , d'un cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 - k}$ si $a^2 + b^2 \geq k$, et de l'ensemble vide sinon.

E) Intersection d'un cercle et d'une droite

Soit C un cercle de centre Ω et de rayon R , et soit \mathfrak{D} une droite.

Soit H la projection de Ω sur \mathfrak{D} , notons $d = \Omega H$ (distance de Ω à \mathfrak{D})

Pour tout M de \mathfrak{D} , on a : $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d^2 + HM^2$

Donc $C \cap \mathfrak{D} = \{M \in \mathfrak{D}, \Omega M = R\} = \{M \in \mathfrak{D}, HM^2 = R^2 - d^2\}$

- Si $d > R$, $C \cap \mathfrak{D}$ est vide.
- Si $d = R$, $C \cap \mathfrak{D}$ est réduit à H .
- Si $d < R$, $C \cap \mathfrak{D}$ est formé des deux points de \mathfrak{D} qui sont situés à $\sqrt{R^2 - d^2}$ de H .

Dans le cas où $C \cap \mathfrak{D}$ est réduit à un point, on dit que \mathfrak{D} est tangente à C .

Remarque :

Si, dans un repère orthonormé, \mathfrak{D} a pour équation : $ux + vy + h = 0$ et C a pour équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$, alors $d = d(\Omega, \mathfrak{D}) = \frac{|ua + vb + h|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

F) Tangente

Soit C un cercle de centre Ω , et soit M_0 un point de C . Il résulte de ce qui précède que la tangente à C passant par M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale à $\overline{\Omega M_0}$.

Si, dans un repère orthonormé, C a pour équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0$, et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0) , une équation de cette tangente est alors $x(x_0 - a) + y(y_0 - b) = x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b)$.

II La sphère dans l'espace

\mathcal{E} désigne ici un espace affine euclidien de dimension 3.

A) Définition

Soit Ω un point de \mathcal{E} et R un réel positif.

Définition :

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que $\Omega M = R$ (elle est réduite à $\{\Omega\}$ lorsque $R = 0$)

On appelle diamètre d'une sphère tout segment joignant deux points de cette sphère et passant par son centre.

B) Sphère circonscrite à un tétraèdre

Théorème :

Par quatre points non coplanaires A, B, C et D de \mathcal{E} passe une et une seule sphère.

Démonstration :

Les plans médiateurs \mathfrak{P}_{AB} , \mathfrak{P}_{BC} et \mathfrak{P}_{CD} des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, D]$ sont sécants en un point Ω : en effet, les vecteurs normaux \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CD} forment une famille de rang 3 (puisque A, B, C et D ne sont pas coplanaires) donc le système formé des trois équations des plans (en repère orthonormé) est de Cramer. Si Ω désigne le point d'intersection de \mathfrak{P}_{AB} , \mathfrak{P}_{BC} et \mathfrak{P}_{CD} , alors on a $\Omega A = \Omega B$, $\Omega B = \Omega C$ et $\Omega C = \Omega D$, $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ (donc Ω est aussi sur les autres plans médiateurs).

Il est alors clair que la sphère de centre Ω et de rayon $R = \Omega A$ est une sphère qui passe par A, B, C et D et que c'est la seule (car le centre d'une sphère passant par A, B, C, D appartient à tous les plans médiateurs)

Remarque :

Le théorème équivaut à dire que les six plans médiateurs se rencontrent en un même point, ce qui ressort de la démonstration.

C) Une caractérisation

Proposition :

Soient A, B deux points de \mathcal{E} . L'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que \overrightarrow{MA} est orthogonal à \overrightarrow{MB} est une sphère de diamètre $[A, B]$.

Démonstration :

Soit I le milieu de $[A, B]$. Alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = IA$$

D) Equation cartésienne

Soit \mathfrak{R} un repère orthonormé de \mathcal{E} .

Un point $M(x, y, z)$ appartient au cercle C de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R si et seulement si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Par conséquent, toute sphère admet dans un repère orthonormé une équation du type $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$. Inversement, une équation de ce type se met sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - k$, donc est l'équation, dans \mathfrak{R} , d'une sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - k}$ si $a^2 + b^2 + c^2 \geq k$, et de l'ensemble vide sinon.

E) Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit S une sphère de centre Ω et de rayon R , et soit \mathfrak{P} un plan.

Soit H la projection de Ω sur \mathfrak{P} , notons $d = \Omega H$ (distance de Ω à \mathfrak{P})

Pour tout M de \mathfrak{P} , on a : $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d^2 + HM^2$

Donc $S \cap \mathfrak{P} = \{M \in \mathfrak{P}, \Omega M = R\} = \{M \in \mathfrak{P}, HM^2 = R^2 - d^2\}$

- Si $d > R$, $S \cap \mathfrak{P}$ est vide.
- Si $d = R$, $S \cap \mathfrak{P}$ est réduit à H .
- Si $d < R$, $S \cap \mathfrak{P}$ est le cercle, tracé sur \mathfrak{P} , de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Dans le cas où $S \cap \mathfrak{P}$ est réduit à un point, on dit que \mathfrak{P} est tangent à S .

Remarque :

Si, dans un repère orthonormé, \mathfrak{P} a pour équation : $ux + vy + wz + h = 0$ et S a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$, alors $d = d(\Omega, \mathfrak{P}) = \frac{|ua + vb + wc + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$

F) Tangente

Soit S une sphère de centre Ω , et soit M_0 un point de S . Il résulte de ce qui précède que le plan tangent à S passant par M_0 est le plan passant par M_0 et orthogonal à $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

Si, dans un repère orthonormé, la sphère S a pour équation :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$, et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) ,

une équation de cette tangente est alors :

$$x(x_0 - a) + y(y_0 - b) + z(z_0 - c) = x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b) + z_0(z_0 - c).$$

On peut généraliser ces notions de cercles et sphères à des espaces affines de dimensions quelconques, on parle alors d'hypersphères en dimension n .