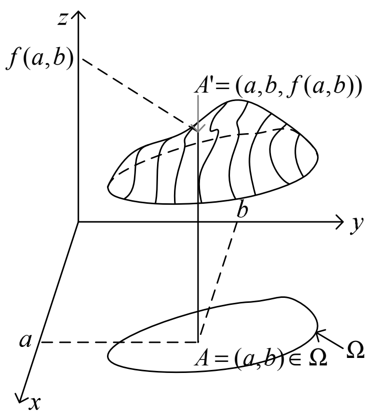
Chapitre 14 : Eléments de calcul différentiel

- On va s'attacher ici au cas des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. (On peut adapter les résultats à d'autres cas si nécessaire)
- Les éléments de $\mathbb{R}^2$ seront vus parfois comme points ($A=(a,b)\in\mathbb{R}^2$) ou d'autres fois comme vecteurs ($\vec{u}=(h,k)\in\mathbb{R}^2$)
- $\| \;\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$.
- Visualisation :

Si $f:\begin{array}{l}\Omega\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto f(x,y)\end{array}$, on peut visualiser la situation en se représentant l'ensemble S des $(x,y,f(x,y)),(x,y)\in\Omega$, qui est une surface de $\mathbb{R}^3$: c'est la nappe d'équation $z=f(x,y),(x,y)\in\Omega$.



S est à f ce qu'une courbe est à une fonction d'une variable dans $\mathbb{R}$.

I Dérivées partielles

A) Dérivées (éventuelles) partielles premières par rapport à chaque variable

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, soit $A=(a,b)\in\Omega$.

On pose $\Omega_{A,1}=\{x\in\mathbb{R},(x,b)\in\Omega\}$, et $\varphi_{A,1}:\begin{array}{l}\Omega_{A,1}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x,b)\end{array}$

Si $\varphi_{A,1}$ est dérivable en a, on dit que f admet une dérivée partielle première en A par rapport à la première variable, qui n'est autre que $\varphi_{A,1}'(a)$, qu'on note :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases}D_1(f)(A)\\ D_1(f)(a,b)\end{cases}.$$

De même, sous réserve d'existence :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} D_2(f)(A) \\ D_2(f)(a,b) \end{cases} \text{ est la dérivée en } b \text{ de l'application } \varphi_{A,2} : y \mapsto f(a,y),$$

laquelle application est définie sur $\Omega_{A,2} = \{y \in \mathbb{R}, (a,y) \in \Omega\}$.

Remarque :

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\Omega_{A,1}$ et $\Omega_{A,2}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\Omega_{A,1}$ est un voisinage de *a*, $\Omega_{A,2}$ un voisinage de *b*.

La notion de dérivabilité ne dépendant que de $\varphi_{A,1}$ (ou $\varphi_{A,2}$) au voisinage de *a* (ou de *b*), la notion de dérivée partielle de *f* en *A* est elle aussi locale.

Exemples :

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y \end{array}$

Alors *f* admet des dérivées partielles par rapport à *x* et *y* en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 + 1$.

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert (complémentaire d'un singleton), c'est un voisinage de (x_0, y_0). L'étude des dérivées partielles de *f* en (x_0, y_0) ne dépend que de *f* sur ce voisinage, et sur ce voisinage on a $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

D'où on tire l'existence des dérivées partielles premières, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0(x_0^2 + y_0^2) - x_0 y_0 (2x_0)}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - y_0 x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 - x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

Etude en $(0,0)$:

L'application partielle $x \mapsto f(x,0)$ est nulle, donc dérivable et de dérivée nulle en 0. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Attention, *f* n'est pas pour autant continue en $(0,0)$.

B) Définitions

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont définies en tout $(x,y)\in\Omega$, on note :

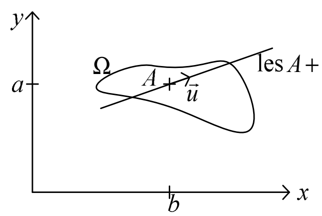
$$\frac{\partial f}{\partial x}:\begin{array}{l}\Omega\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\end{array} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}:\begin{array}{l}\Omega\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{array}.$$

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur Ω, on dit que *f* est de classe C^1.

C) Dérivées partielles premières selon un vecteur

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

Soit $\vec{u}=(h,k)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.



Soit $A\in\Omega$, et $D=\{t\in\mathbb{R}, A+t\vec{u}\in\Omega\}$.

Si la fonction $\psi:\begin{array}{l}D\to\mathbb{R}\\ t\mapsto f(A+t\vec{u})\end{array}$ est dérivable en 0, on dit que *f* admet une dérivée partielle première en *A* selon le vecteur $\vec{u}$ qui n'est autre que $\psi'(0)$. On la note $D_{A,\vec{u}}(f)$.

Remarque :

- Ici encore, la notion est locale…
- L'éventuelle dérivée partielle première en *A* selon $\vec{i}=(1,0)$ correspond à l'éventuelle dérivée partielle première en *A* selon la première variable.

Ainsi, sous réserve d'existence : $D_{A,\vec{i}}(f)=D_1(f)(A)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$

Et de même $D_{A,\vec{j}}(f)(A)=D_2(f)(A)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$

En effet, sous réserve d'existence, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ est la dérivée en *a* de $x\mapsto f(x,b)$ et $D_{A,\vec{i}}(f)(A)$ la dérivée en 0 de $t\mapsto f((a,b)+t(1,0))=f(a+t,b)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Existe-t-il une dérivée partielle première en $(0,0)$ selon le vecteur $\vec{u}=(1,1)$?

$f(O+t\vec{u})=f(t,t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\text{ si } t\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, donc *f* n'est pas dérivable selon $\vec{u}$.

II Développement limité à l'ordre 1 pour une fonction de classe C^1.

A) Le théorème

Théorème :

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $A=(a,b)\in\Omega$.

Alors il existe une fonction ε, définie sur l'ensemble $V=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^2 A+\vec{u}\in\Omega\}$ telle que ε tend vers 0 en $(0,0)$ et pour tout $\vec{u}\in V$, $f(A+\vec{u})=f(A)+h\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)+\|\vec{u}\|\varepsilon(\vec{u})$, où on a noté $\vec{u}=(h,k)$. Cette expression s'appelle le DL de *f* à l'ordre 1 en *A*.

Ou encore : $\forall(h,k)\in V, f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$ où $\lim\limits_{(h,k)\mapsto(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$.

Démonstration (hors programme) :

On pose, pour tout $\vec{u}\in V$, $\varepsilon(\vec{u})=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\left(f(A+\vec{u})-f(A)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$ si $\vec{u}\neq\vec{0}$, et $\varepsilon(\vec{u})=0$ sinon.

Alors ε vérifie bien l'expression ; reste à montrer que ε tend vers 0 en $(0,0)$.

Comme Ω est ouvert, il existe $\mu>0$ tel que $B_\infty(A,\mu)\subset\Omega$, où on a noté $B_\infty(,)$ une boule ouverte pour $\|\ \|_\infty$. Posons $W=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^2, A+\vec{u}\in B_\infty(A,\mu)\}$. (Alors déjà $W\subset V$)

Alors pour tout $\vec{u}=(h,k)$ de W et tout $(t,\theta)\in[0,1]\times[0,1]$, $A+(t.h,\theta.k)\in B_\infty(A,\mu)$.

En effet, soit $\vec{u}=(h,k)\in W$, et soit $(t,\theta)\in[0,1]\times[0,1]$.

Alors $\|(t.h,\theta.k)\|_\infty=\max(|t.h|,|\theta.k|)=\max(t.|h|,\theta.|k|)\leq\max(|h|,|k|)=\|\vec{u}\|_\infty$.

Or, $\vec{u}\in W$. Donc, si on note $B=A+\vec{u}$, on a $\|\overrightarrow{AB}\|_\infty<\mu$. Donc $\|(t.h,\theta.k)\|_\infty\leq\|\overrightarrow{AB}\|<\mu$.

Donc $A+(t.h,\theta.k)\in B_\infty(A,\mu)$.

Maintenant :

Soit $\vec{u}\in W$, on note $\vec{u}=(h,k)$:

$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)+f(a+h,b)-f(a,b)$

($(a+h,b)$ est bien dans Ω, comme on vient de le voir, avec $(t,\theta)=(1,0)$)

On note $\psi:y\mapsto f(a+h,y)$ (donc ψ est une fonction réelle d'une variable réelle, c'est la deuxième application partielle associée à f en $(a+h,b+k)$), définie et dérivable sur $[b,b+k]$.

Selon le théorème des accroissements finis appliqué à ψ entre b et $b+k$, il existe $\theta\in]0,1[$ tel que $\psi(b+k)-\psi(b)=k\psi'(b+\theta.k)$, c'est-à-dire :

$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta.k)$$

De même, il existe $t\in]0,1[$ tel que $f(a+h,b)-f(a,b)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+t.h,b)$

Donc :

$$\forall\vec{u}\in W,\exists(t,\theta)\in]0,1[^2, f(a+h,b+k)-f(a,b)=k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta.k)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a+t.h,b)$$

Or, $k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta.k)=k(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\alpha(h,k))$ où $\lim\limits_{(0,0)}\alpha=0$ car $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$, et de même, $h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+t.h,b)=h(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\beta(h,k))$ où $\lim\limits_{(0,0)}\beta=0$.

Donc $f(a+h,b+k)=f(a,b)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)+h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+h.\beta(h,k)+k.\alpha(h,k)$

Et pour tout $\vec{u}=(h,k)\in W\setminus\{(0,0)\}$:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{h.\beta(h,k)+k.\alpha(h,k)}{\|(h,k)\|_\infty}=\underbrace{\frac{h}{\max(|h|,|k|)}}_{\in[-1,1]}\beta(h,k)+\underbrace{\frac{k}{\max(|h|,|k|)}}_{\in[-1,1]}\alpha(h,k)\xrightarrow[(0,0)]{}0$$

Donc ε tend vers 0 en $(0,0)$, d'où le résultat.

B) Conséquences

(1) Si f est de classe C^1 sur Ω, alors elle est continue sur Ω.

En effet, pour tout $A=(a,b)\in\Omega$, on a :

$$\forall(h,k)\in V, f(a+h,b+k)=f(a,b)+\underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)}_{\to 0}$$

Donc $f(a+h,b+k)\xrightarrow[(h,k)\mapsto(0,0)]{}f(a,b)$, donc f est continue en A.

(2) Si f est de classe C^1, alors pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et tout $A\in\Omega$, $D_{A,\vec{u}}(f)$ est définie, et l'application $A\mapsto D_{A,\vec{u}}(f)$ est continue.

En effet :

Si f est de classe C^1, alors, pour tout $A=(a,b)\in\Omega$, on a :

$$\forall(h,k)\in V, f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k).$$

Soit alors $\vec{u}=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $A+t.\vec{u}\in\Omega$, c'est-à-dire tel que $t.\vec{u}\in V$, on a :

$$f(A+t.\vec{u})=f(A)+t.\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(A)+t.\beta\frac{\partial f}{\partial y}(A)+|t|\|\vec{u}\|\varepsilon(t.\vec{u})$$

Donc $t\mapsto f(A+t.\vec{u})$ est dérivable en 0, de dérivée $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$

(puisque $\dfrac{f(A+t.\vec{u})-f(A)}{t-0}=\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)+\underbrace{\tfrac{|t|}{t}\|\vec{u}\|\varepsilon(t.\vec{u})}_{\to 0}$)

C) Divers

Soit f de classe C^1 sur Ω.

On vient de voir que pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et tout $A\in\Omega$, $D_{A,\vec{u}}(f)$ existe et vaut $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ lorsque $\vec{u}=(\alpha,\beta)$.

Pour A fixé dans Ω, l'application $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \vec{u}=(\alpha,\beta)\mapsto \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, on la note df_A, différentielle de *f* en *A*. Ainsi, $df_A \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

On introduit alors le vecteur $\vec{n}\in\mathbb{R}^2$ tel que cette forme linéaire soit $\vec{u}\mapsto\vec{u}\cdot\vec{n}$ (pour $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne naturelle)

Ce vecteur est appelé $\overrightarrow{\text{grad}}_A f$, gradient de *f* en *A*.

Ainsi : $\forall \vec{u}=(h,k)\in\mathbb{R}^2, df_A(\vec{u})=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=\underbrace{D_{A,\vec{u}}(f)}_{\text{si } \vec{u}\neq(0,0)}=(\overrightarrow{\text{grad}}_A f)\cdot\vec{u}$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}_A f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(A),\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$.

On note $df_A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)dy$.

C'est-à-dire que dx et dy sont les formes linéaires $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(h,k)\mapsto h\end{array}$ et $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(h,k)\mapsto k\end{array}$.

On peut considérer l'application $\begin{array}{c}\Omega\to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\\A\mapsto df_A\end{array}$.

Cette application est notée df, et s'appelle la différentielle de *f*.

Ainsi, $df\in\mathfrak{F}(\Omega,L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$, et on peut noter $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Récapitulatif :

$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy\in\mathfrak{F}(\Omega,L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$, différentielle de *f*.

$df_A=\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)dy\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, différentielle de *f* en *A*.

$df_A(\vec{u})=\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)k\in\mathbb{R}$

Le DL à l'ordre 1 en *A* s'écrit alors :

$f(A+\vec{u})=f(A)+\underbrace{df_A(\vec{u})}_{(\overrightarrow{\text{grad}}_A f)\cdot\vec{u}}+\|\vec{u}\|\varepsilon(\vec{u})$ où $\varepsilon(\vec{u})\xrightarrow[\vec{u}\mapsto(0,0)]{}0$

Ainsi, $df_A(\vec{u})$ est une approximation linéaire de la différence $f(A+\vec{u})-f(A)$

III Opérations sur les fonctions de classe C^1.

A) Sommes, produits…

Proposition :

Soient $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors les fonctions $\lambda.f, f+g, fg$ sont de classe C^1 sur Ω, et :

$\dfrac{\partial(\lambda.f)}{\partial x}=\lambda.\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x}=f\dfrac{\partial g}{\partial x}+g\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Idem pour $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Démonstration : immédiat

Par exemple, pour fg :

Soit $(x_0,y_0)\in\Omega$. Les fonctions $\begin{cases} x\mapsto f(x,y_0) \\ x\mapsto g(x,y_0)\end{cases}$ sont dérivables en x_0, de dérivées $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}$. Donc $x\mapsto f(x,y_0)\times g(x,y_0)$ est dérivable en x_0, et sa dérivée en x_0 est :

$$f(x_0,y_0)\times\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)+g(x_0,y_0)\times\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Donc $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x}$ est définie en tout point (x_0,y_0) de Ω, et $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x}=f\dfrac{\partial g}{\partial x}+g\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Or, f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, g et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sont continues, donc $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x}$ est continue sur Ω.

De même pour $\dfrac{\partial(fg)}{\partial y}$, donc fg est de classe C^1.

Proposition :

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1.

Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soient u, v deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

On suppose que $\forall t\in D,(u(t),v(t))\in\Omega$.

Alors la fonction $\begin{aligned} F:D&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f(u(t),v(t))\end{aligned}$ est de classe C^1, et :

$$\forall t\in D, F'(t)=u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))+v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t)).$$

Démonstration :

Soit $t_0\in D$. On étudie $\dfrac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}$ pour $h\neq 0$ tel que $t_0+h\in D$. On a :

$$\begin{aligned} F(t_0+h)-F(t_0) &= f(u(t_0+h),v(t_0+h))-f(u(t_0),v(t_0)) \\ &= \underbrace{(u(t_0+h)-u(t_0))}_{H}.\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0),v(t_0)) \\ &\quad +\underbrace{(v(t_0+h)-v(t_0))}_{K}.\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0),v(t_0))+\|(H,K)\|\varepsilon(H,K)\end{aligned}$$

Où $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)}\varepsilon(x,y)=0$

$$\begin{aligned} &= (h.u'(t_0)+h.\alpha(h))\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0),v(t_0))+(h.v'(t_0) \\ &\quad +h.\beta(h))\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0),v(t_0))+\|(H,K)\|\varepsilon(H,K)\end{aligned}$$

Où $\alpha,\beta\xrightarrow[h\mapsto 0]{}0$.

Donc :

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}=(u'(t_0)+\alpha(h))\frac{\partial f}{\partial x}(u(t_0),v(t_0))+(v'(t_0)+\beta(h))\frac{\partial f}{\partial y}(u(t_0),v(t_0))$$

$$+\underbrace{\frac{|h|}{h}\underbrace{\left\|(u'(t_0)+\alpha(h),v'(t_0)+\beta(h))\right\|}_{\to(u'(t_0),v'(t_0))}}_{\text{borné}}\varepsilon(H,K)$$

Et $\varepsilon(H,K)\xrightarrow[h\mapsto 0]{}0$

car $H=u(t_0+h)-u(t_0)\xrightarrow[h\mapsto 0]{}0$, $K=v(t_0+h)-v(t_0)\xrightarrow[h\mapsto 0]{}0$ et d'après le théorème de composition de limites.

Donc F est dérivable en t_0, et on a bien la formule voulue, qui montre en plus que F' est continue (car *u*, *v*, *u'*, *v'*, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ le sont…), donc que *F* est de classe C^1.

Proposition :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soient *u*, *v* deux fonctions de *U* dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.

Soit $f:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}\\(X,Y)\mapsto f(X,Y)\end{array}$ de classe C^1.

On suppose que $\forall(x,y)\in U,(u(x,y),v(x,y))\in\Omega$.

On peut donc considérer $F:\begin{array}{c}U\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(u(x,y),v(x,y))\end{array}$.

Alors *F* est de classe C^1 sur *U*, et, pour tout $(x,y)\in U$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial f}{\partial X}(u(x,y),v(x,y))+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial f}{\partial Y}(u(x,y),v(x,y))$$

De même, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\times\frac{\partial f}{\partial X}(u(x,y),v(x,y))+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\times\frac{\partial f}{\partial Y}(u(x,y),v(x,y))$.

Démonstration :

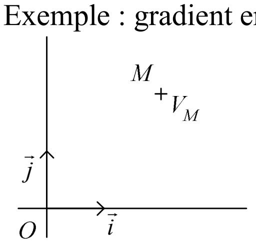
Soit $(x_0,y_0)\in D$. Alors $x\mapsto F(x,y_0)$, c'est-à-dire $x\mapsto f(u(x,y_0),v(x,y_0))$, est du type traité dans la proposition précédente.

Cette fonction est donc dérivable en x_0, de dérivée :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial X}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial Y}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$$

D'où la première formule, et de même la deuxième et ainsi la classe de *F*.

Exemple : gradient en coordonnées polaires.



On peut introduire la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ est la valeur (en Volt) du potentiel au point *M* de coordonnées cartésiennes (x,y).

On peut aussi introduire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$, $F(\rho,\theta)$ est la valeur (en Volts) du potentiel au point M de coordonnées polaires (ρ,θ).

Ainsi, pour tout $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$, $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

On a $\overrightarrow{\text{grad}}_M V=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y).\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).\vec{j}$ où $M(x,y)$.

On a, pour tout $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)=-\rho\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\rho\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) & (2)\end{cases}$$

Donc :

$$\rho\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)\quad(\rho\cos\theta(1)-\sin\theta(2))$$

Et

$$\rho\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)+\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)\quad(\rho\sin\theta(1)-\cos\theta(2))$$

Pour $M\neq O$, de coordonnées polaires (ρ,θ) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}_M V&=\left[\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right].\vec{i}+\left[\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right].\vec{j}\\&=\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta)\vec{u}(\theta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta)\vec{v}(\theta)\end{aligned}$$

Avec $\vec{u}(\theta)=\cos\theta.\vec{i}+\sin\theta.\vec{j}$, $\vec{v}(\theta)=\vec{u}(\frac{\pi}{2}-\theta)$.

IV Généralisations

On a vu le cas des $\begin{cases}f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\end{cases}$

On peut aisément adapter au cas $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, et même plus généralement à $f:\Omega\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$.

On a vu aussi le cas des $f:\begin{array}{l}D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\\ t\mapsto(f_1(t),f_2(t)\dots f_n(t))\end{array}$, où « tout va bien » composantes par composantes (sauf pour le théorème des accroissements finis, et donc la démonstration du théorème pour les développements limités – qui est quand même vrai, mais admis pour l'instant)

On peut donc parler des fonctions $f:\Omega\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ où « tout va bien » sur les composantes de l'arrivée.

Cas particulier : Champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$:

C'est une fonction $F:\begin{array}{c}\Omega\to\mathbb{R}^3\\ (x,y,z)\mapsto(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))\end{array}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$

F est de classe C^1 si et seulement si X, Y, Z le sont, et :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\left(\frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

On a alors le théorème : Toute composée bien définie de fonctions de classes C^1 est de classe C^1, et formules à adapter…

Exemple :

Si $G(r,\theta,z) = F(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, alors :

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r,\theta,z) = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + 0\times\frac{\partial F}{\partial z}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r,\theta,z) = -r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(r,\theta,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

De même, si $H(r,\theta,\varphi) = F(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = {} & \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ & + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ & + \cos\theta\frac{\partial F}{\partial z}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) = {} & r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ & + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ & - r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial z}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) = {} & -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial x}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ & + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial F}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\end{aligned}$$

V Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie au voisinage de (x_0, y_0), et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est dérivable par rapport à x (1ère variable) en ce point, la dérivée $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0, y_0)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0)$.
- De même, sous réserve d'existence, $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)(\partial x)}(x_0, y_0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x_0, y_0)$,
- Et $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)(\partial y)}(x_0, y_0) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x_0, y_0)$

- Et $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Généralisation récurrente :

Soit $p \geq 2$.

Sous réserve d'existence, les dérivées p-ièmes de f en (x_0, y_0) sont les deux dérivées premières de chacune des dérivées $(p-1)$-ièmes de f en (x_0, y_0).

Définition :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si les quatre dérivées partielles secondes de f sont définies et continues sur Ω, on dit que f est de classe C^2.

Plus généralement, si les 2^k dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur Ω, on dit que f est de classe C^k.

Proposition :

Pour $k \geq 1$, si f est de classe C^k, alors f est de classe C^{k-1} (où C^0 signifie « f est continue »)

En effet, si f est de classe C^k, alors les dérivées partielles $(k-1)$-ièmes de f ont leurs dérivées partielles premières continues (puisque ce sont les dérivées partielles k-ièmes de f), et sont donc de classe C^1. Donc ces dérivées partielles $(k-1)$-ièmes sont continues, donc f est de classe C^{k-1}.

Théorème de Schwarz (admis) :

- Si f est de classe C^2 sur Ω, alors $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)(\partial y)} = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)(\partial x)}$.
- Plus généralement, si f est de classe C^k sur Ω, alors les dérivées partielles d'ordre k ne dépendent que du nombre de dérivations par rapport à chaque variable.

On peut élargir aisément les définitions aux fonctions de Ω, ouvert de $\mathbb{R}^p$, dans $\mathbb{R}^n$, où le théorème de Schwarz reste encore vrai.

Et de plus les opérations sur les fonctions de classe C^k sont toujours valables…

Remarque :

On n'a besoin que de la composition :

Par exemple, si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, on a :

$F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y)) \end{array}$ est de classe C^1, et $S : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto u+v \end{array}$ est de classe C^1, donc $S \circ F$ est de classe C^1, et on a $S \circ F = f + g$.

VI Extremums

Théorème :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. Soit $A = (a, b) \in \Omega$.

Si f présente un extremum (local) en A, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

La réciproque reste ici encore fausse (exemple : configuration en col, ou $(x, y) \mapsto xy$)

Démonstration :

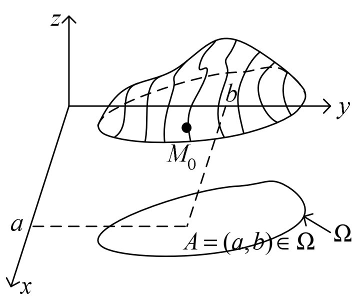
Supposons que f présente un maximum local en A. Il existe alors un voisinage V de A contenu dans Ω (prendre au pire $\Omega \cap V$) tel que $\forall \underbrace{M}_{(x,y)} \in V, \underbrace{f(M)}_{f(x,y)} \leq \underbrace{f(A)}_{f(a,b)}$.

On introduit $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset V$.

Alors $x \mapsto f(x,b)$ présente un maximum local en a, et est dérivable sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. La dérivée de cette fonction est donc nulle en a, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$.

Et, de même, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$.

VII Notion de plan tangent à une surface d'équation $z = f(x,y)$.



Soit $f:\Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, notons S la surface d'équation $z = f(x,y)$.

Soit $A=(a,b)\in\Omega$, $M_0=(a,b,f(a,b))\in S$.

On sait que, pour tout $(x,y)\in\Omega$, on a :

$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\|(x-a,y-b)\|\varepsilon(x-a,y-b)$$

où $\varepsilon \underset{(a,b)}{\longrightarrow} 0$.

Par définition, le plan tangent en M_0 à S est le plan d'équation :

$$z=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

C'est la plan qui approxime le mieux la surface au voisinage du point considéré.

Considérons les deux courbes C_1 et C_2 tracées sur S de la manière suivante :

$C_1=\{(x,b,f(x,b)), x\in\Omega_{A,1}\}$ et $C_2=\{(a,y,f(a,y)), y\in\Omega_{A,2}\}$

Où $\Omega_{A,1}=\{x\in\mathbb{R},(x,b)\in\Omega\}$ et $\Omega_{A,2}=\{y\in\mathbb{R},(a,y)\in\Omega\}$.

C_1 est naturellement paramétrée par $M\left|\begin{array}{l} x=t \\ y=b \\ z=f(t,b) \end{array}\right.$.

Vitesse : $\vec{v}_1(t)\left|\begin{array}{l}x=1\\y=0\\z=\frac{\partial f}{\partial x}(t,b)\end{array}\right.$. Et, au point considéré, $\vec{v}_1(a)\left|\begin{array}{l}x=1\\y=0\\z=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\end{array}\right.$.

De même, sur C_2, $\vec{v}_2(b)\left|\begin{array}{l}x=0\\y=1\\z=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{array}\right.$

Alors $(\vec{v}_1(a),\vec{v}_2(b))$ forme une base de la direction du plan tangent en M_0, c'est-à-dire du plan vectoriel d'équation $z=x\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

VIII Courbes de $\mathbb{R}^2$.

On se place ici dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

A) Diverses situations

- En coordonnées cartésiennes :
- $y=f(x)$ (résolue en y) (1)
- $x=f(y)$ (résolue en x) (2)
- $F(x,y)=0$ où $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (non résolue) (3)
- Paramétrique : $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}, t\in\ldots$ (4)
- En coordonnées polaires :
- $\rho=f(\theta)$ (1b)
- $\theta=f(\rho)$ (2b)
- $F(\rho,\theta)=0$ (3b)
- Paramétrique : $\begin{cases}\rho=r(t)\\\theta=\alpha(t)\end{cases}, t\in\ldots$ (4b)
- Passage d'une situation à une autre :

Passage de (1) à (3) / (2) à (3) : évident. (idem avec b)
Passage de (1) à (4) / (2) à (4) : évident. (idem avec b)
Passage de (4b) à (4) : $\begin{cases}x=r(t)\cos(\alpha(t))\\y=r(t)\sin(\alpha(t))\end{cases}$

Pour le passage de (3) à (1) ou (2), on n'a pas de méthode systématique, mais on a un théorème.

B) Théorème des fonctions implicites

Théorème (admis) :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $F:\Omega\to\mathbb{R}$, de classe C^1.

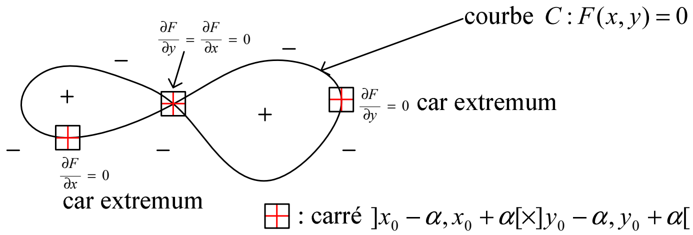
On suppose qu'il existe $(x_0,y_0)\in\Omega$ tel que $F(x_0,y_0)=0$.

Si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, alors l'équation $F(x,y)=0$ définit localement y comme fonction de x, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$, il existe un unique $y\in]y_0-\alpha,y_0+\alpha[$ tel que $F(x,y)=0$.

Et de plus, si on note $\varphi:\begin{array}{l}]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \text{l'unique } y\in]y_0-\alpha,y_0+\alpha[\text{ tel que } F(x,y)=0\end{array}$, alors φ est de classe C^1 au voisinage de x_0, et $\varphi'(x_0)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

On adapte le théorème pour $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$

Visualisation :



Justification que $\varphi'(x_0)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$:

On a, pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\times]y_0-\alpha,y_0+\alpha[$, $F(x,\varphi(x))=0$

Donc, en dérivant : $1\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,\underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0})+\varphi'(x_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0})=0$.

Application :

Tangente à $C:F(x,y)=0$ en un point (x_0,y_0) où $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sont non tous deux nuls. Supposons par exemple $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Ainsi, localement, la courbe se résout en $C:y=\varphi(x)$.

La tangente en (x_0,y_0) a alors pour équation $(y-y_0)=(x-x_0)\varphi'(x_0)$

C'est-à-dire $(x-x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

Ainsi, si $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}F\neq\vec{0}$, alors la tangente à C en (x_0,y_0) existe et est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}F$.

C) Passage local de représentation paramétrique à résolu en x ou y.

Soit C le support d'un arc paramétré $\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \end{cases}, t\in I$ où α,β sont de classe C^1 au moins, et on suppose l'arc régulier (c'est-à-dire que $\vec{v}(t)\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\ \beta'(t)\end{pmatrix}$ ne s'annule pas)

Soit $t_0\in I$ (qu'on suppose ouvert). Si par exemple $\alpha'(t_0)\neq 0$, alors il existe un voisinage V_0 de t_0 tel que le support de l'arc paramétré restreint à V_0, c'est-à-dire l'arc $\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \end{cases}, t\in V_0$, admette une équation du type $y=f(x)$.

Démonstration :

α est de classe C^1, et $\alpha'(t_0)\neq 0$. Il existe donc un voisinage $V=]t_0-\lambda,t_0+\lambda[$ de t_0 tel que $\forall t\in V, \alpha'(t)\neq 0$. Donc α est strictement monotone, et réalise donc une bijection sur un intervalle W dont la réciproque est de même classe que α. Donc l'arc restreint à V admet le paramétrage $\begin{cases} x=\alpha(\alpha^{-1}(u)) \\ y=\beta(\alpha^{-1}(u)) \end{cases}, u\in W$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=u \\ y=f(u) \end{cases}, u\in W$ où $f=\beta\circ\alpha^{-1}$.

D) De paramétré en cartésiennes à paramétré en polaires

Soit $C:\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \end{cases}, t\in I$ où α,β sont de classe C^k $(k\geq 1)$

On suppose que C ne passe pas par O.

Alors C admet une représentation paramétrique en coordonnées polaires du type $\begin{cases} \rho=r(t) \\ \theta=\lambda(t) \end{cases}, t\in I$, r et λ étant de classe C^k.

En effet, pour tout $t\in I$:

$$\overrightarrow{OM}(t)=\alpha(t).\vec{i}+\beta(t).\vec{j}=\underbrace{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}_{r(t)}\underbrace{\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}.\vec{i}+\frac{\beta(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\beta^2(t)}}.\vec{j}\right)}_{\substack{=\cos(\lambda(t)).\vec{i}+\sin(\lambda(t)).\vec{j} \text{ où } \lambda \text{ est de} \\ \text{classe } C^k \text{ selon le théorème de relèvement}}}$$

(C'est possible car $(\alpha(t),\beta(t))\neq(0,0)$)

IX Surfaces de $\mathbb{R}^3$.

A) Diverses représentations (en coordonnées cartésiennes)

- Equations du type $z=f(x,y)$, $y=f(x,z)$ ou $x=f(y,z)$ (résolues)
- Equations non résolues : $F(x,y,z)=0$

Exemple :

Plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Sphère $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

- Paramétrage de surface :

$$\begin{cases} x=\alpha(t,s) \\ y=\beta(t,s) \\ z=\gamma(t,s) \end{cases},\ (t,s) \text{ décrivant un domaine } \mathfrak{D} \text{ de } \mathbb{R}^2,\ \alpha,\beta,\gamma \text{ de classe } C^k, k\geq 1$$

avec $\begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial\beta}{\partial t} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial t} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial s} \\ \frac{\partial\beta}{\partial s} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial s} \end{pmatrix}$ indépendants (sinon on n'obtient pas une surface)

B) Passage local de représentation $F(x,y,z)=0$ à une équation résolue

(Et donc passage ensuite à une représentation paramétrique)

Théorème des fonctions implicites :

Soit F de classe $C^k, k\geq 1$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ tel que $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Si $\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)\neq 0$, alors, au voisinage de M_0, l'équation $F(x,y,z)=0$ définit z comme fonction de x et y, cette fonction φ est de classe C^k et on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

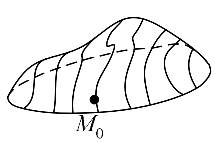
(Même justification pour les dérivées que pour $\mathbb{R}^2$)

C) Plan tangent à une surface

- Soit $S:\begin{cases} x=\alpha(t,s) \\ y=\beta(t,s),(t,s)\in\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2. \\ z=\gamma(t,s) \end{cases}$

La fonction $\vec{P}:\ \begin{matrix}\Omega\to\mathbb{R}^3 \\ (u,v)\mapsto(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))\end{matrix}$ est de classe C^k, avec $k\geq 1$ et $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial v}(u,v)$ sont indépendants.

Soit $M_0\in S$ de paramètre (u_0,v_0).



Courbes tracées sur S passant par M_0 :

$$C_1:\begin{cases} x=\alpha(u,v_0) \\ y=\beta(u,v_0),u\in\Omega_{M_0,1} \\ z=\gamma(u,v_0) \end{cases}$$ passe par le point M_0 au paramètre $u=u_0$.

$C_2 : \begin{cases} x = \alpha(u_0, v) \\ y = \beta(u_0, v), v \in \Omega_{M_0,2} \\ z = \gamma(u_0, v) \end{cases}$ passe par M_0 au point de paramètre $v = v_0$.

Les deux vecteurs $\vec{v}_1(u_0) \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$ et $\vec{v}_2(v_0) \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$ sont donc indépendants. Le plan tangent à S en M_0 est le plan passant par M_0 et de direction $(\vec{v}_1(u_0), \vec{v}_2(v_0))$ (et de vecteur normal $\vec{v}_1(u_0) \wedge \vec{v}_2(v_0)$, c'est-à-dire $\frac{\partial\vec{P}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial\vec{P}}{\partial v}(u_0, v_0)$)

Remarque :

Les autres courbes tracées sur la surface sont les courbes de la forme $C : \begin{cases} x = \alpha(u(t), v(t)) \\ y = \beta(u(t), v(t)) \\ z = \gamma(u(t), v(t)) \end{cases}$, où $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe suffisante.

$$\vec{v}(t) \begin{vmatrix} u'(t)\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ u'(t)\dfrac{\partial\beta}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\dfrac{\partial\beta}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ u'(t)\dfrac{\partial\gamma}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\dfrac{\partial\gamma}{\partial v}(u(t), v(t)) \end{vmatrix}$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, on suppose que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Ainsi, $\vec{v}(t_0) = u'(t_0)\vec{v}_1(u_0) + v'(t_0)\vec{v}_2(v_0)$, donc $\vec{v}(t_0)$ est dans la direction du plan tangent à M_0.

- Cas où $S : F(x, y, z) = 0$.

Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. On suppose que $\overrightarrow{\text{grad}}_{M_0} F \neq \vec{0}$, c'est-à-dire que l'une des dérivées partielles n'est pas nulle.

Donc selon le théorème des fonctions implicites, on a localement une paramétrisation de S : $\begin{cases} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \\ z = \gamma(u, v) \end{cases}$, passant en M_0, disons au point de paramètre (u_0, v_0).

On a donc un plan tangent de direction $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ où $\vec{v}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\beta}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$.

Or, on a $F(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = 0$.

$$\text{Donc } \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) + \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$$
$$+ \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v)\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) = 0$$

Et $\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial F}{\partial x}(\alpha(u,v),\beta(u,v),\ \gamma(u,v))+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial F}{\partial y}(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))=0$$

Donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0}F$, et son indépendants.

Ainsi, le plan tangent à S en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est le plan passant par M_0 orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0}F$, c'est-à-dire d'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z-z_0)=0$$

Ou encore $dF_{M_0}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$.

Ainsi, par exemple :

Si $S:2x^2+5z^2+3y^2-3=0$, et si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point de S.

Equation du plan tangent à S en M_0 :

$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+5z^2-3$

$dF_{(x,y,z)}=6x.dx+6y.dy+10z.dz$

(On vérifie en effet immédiatement que l'application $F\mapsto dF$ est linéaire)

L'équation du plan tangent est donc $5x_0.(x-x_0)+6y_0.(y-y_0)+10z_0.(z-z_0)=0$.