

Chapitre 2 : Suites réelles

I Définition

A) Généralités

Soit E un ensemble.

Soit K un intervalle de \mathbb{N} (du type $\llbracket n_0, n_1 \rrbracket$, $n_0 \leq n_1$ ou $\{n \in \mathbb{N}, n > n_0\}$) non vide.

Une suite d'éléments de E indexée par K est une application $u : K \rightarrow E$.
 $k \mapsto u_k$

L'ensemble des suites d'éléments de E indexées par K est noté E^K (c'est aussi $\mathfrak{F}(K, E)$)

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de suites à valeurs réelles, ou suites réelles. Si $E = \mathbb{C}$, on parle alors de suites complexes.

Pour $u \in E^K$, l'ensemble des valeurs de la suite est $\{u_k, k \in K\}$. On dit qu'une suite est infinie si elle est indexée par un ensemble infini. u_k est le terme de rang k .

On s'intéresse dans ce chapitre à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

B) Opérations sur les suites réelles

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u + v$ désigne la suite réelle w définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n$$

• $u \times v$ désigne la suite réelle h définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, h_n = u_n \times v_n$$

• $\lambda \cdot u$ désigne la suite réelle u' définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = \lambda \cdot u_n$$

"." : loi de composition à opérateur externe : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 $(\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$

• $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ désigne la suite réelle dont tous les termes sont nuls : $\forall n \in \mathbb{N}, 0_n = 0$. (de même, $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ ou 1 si il n'y a pas d'ambiguïté.)

Remarque :

Il n'y a pas intégrité, c'est-à-dire :

$$\text{non}(\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u \times v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \text{ ou } v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}))$$

Par exemple :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $u \times v = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, mais $u \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ et $v \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

C) Divers modes de définition de suites

- Définition explicite ; donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, de u_n en fonction de n (de façon plus ou moins complexe, avec éventuellement des sommes ou des conditions...)
- Définition récurrente :

- récurrence « simple » : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que :

$$\begin{cases} u_0 = \dots \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(Problème de définition éventuelle, dépend de f . On peut résoudre ce problème par récurrence)

- récurrence « double » :

$$\begin{cases} u_0 = \dots & u_1 = \dots \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

- Définition implicite. Par exemple : « pour $n \geq 2$, u_n est la solution réelle positive de l'équation $x^n = x + 1$ ».

On peut aussi imaginer d'autres modes de définitions de suites, plus complexes...

D) Suite croissante, décroissante...

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition, proposition :

$$\begin{aligned} \bullet (u_n) \text{ est croissante} &\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq u_{n+1}) \end{aligned}$$

Démonstration :

- Supposons que $\forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \leq n+1$, on a bien $u_n \leq u_{n+1}$
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n \leq u_{n+1})$. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Si $n = p$, on a $u_n \leq u_p$. Si $n < p$, alors $u_n \leq u_{n+1} \leq \dots \leq u_p$ (idem si $n > p$)

$$\begin{aligned} \bullet (u_n) \text{ est strictement croissante} &\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n < p \Rightarrow u_n < u_p) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n < u_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (u_n) \text{ est décroissante} &\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n \leq p \Rightarrow u_n \geq u_p) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n \geq u_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (u_n) \text{ est strictement décroissante} &\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n, p \in \mathbb{N}, (n < p \Rightarrow u_n > u_p) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n > u_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (u_n) \text{ est constante} &\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante et } (u_n) \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

E) Suite majorée, minorée...

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- u est majorée $\Leftrightarrow \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré
 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- u est minorée $\Leftrightarrow \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré
 $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- u est bornée $\Leftrightarrow \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné
 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
 $\Leftrightarrow u$ est majorée et minorée

F) Propriétés « à partir d'un certain rang »

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exemple : u est croissante à partir du rang 4 si et seulement si $\forall n \geq 4, (u_n \leq u_{n+1})$.

On définit de même pour les autres propriétés.

Une suite constante à partir d'un certain rang est dite stationnaire.

G) Suite extraite

Définition :

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que v est extraite de u lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple :

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Alors les suites suivantes en sont extraites :

- La suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constante et égale à 1.
- La suite $w = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constante égale à -1.
- La suite $h = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à 0 associe 0 et à $n \in \mathbb{N}^*$ associe le n -ième nombre premier est stationnaire à partir du rang 2.
- La suite $v' = (u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à la suite u .

II Suites convergentes

A) Définition

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente lorsqu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

Remarque :

$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

« Aussi petit que soit ε strictement positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ ».

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l, l' \in \mathbb{R}$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et l' , alors $l = l'$.

Démonstration : par l'absurde.

Supposons $l \neq l'$, par exemple $l < l'$.

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{l' - l}{2}$ (ce qui est possible car $\frac{l' - l}{2} > 0$)

Alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$

$$\text{et } \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', l' - \varepsilon < u_n < l' + \varepsilon$$

Si on prend $n \geq \max(N, N')$, on aura alors :

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \text{ et } l' - \varepsilon < u_n < l' + \varepsilon$$

Donc $l' - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$; $l' - \varepsilon < l + \varepsilon$; $2\varepsilon > l' - l$. Contradiction avec le choix de ε

Conséquence :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, l'unique réel l tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$ est appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On note $l = \lim(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim u$, ou $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (attention aux notations : dans les deux premières égalités, on a des suites en argument, dans la troisième, on a un terme).

Pour dire « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge », on peut dire aussi « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite réelle ».

Exemples de base :

- Soit a un réel. La suite constante égale à a converge vers a .

En effet : Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\forall n \geq 0, |u_n - a| < \varepsilon$ puisque $|u_n - a| = 0$. On a donc trouvé N (à savoir 0) tel que $\forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \varepsilon$

- La suite $\left\{ \begin{array}{l} \text{de terme général } u_n = \frac{1}{n} \ (n \geq 1) \\ u = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ n \mapsto \frac{1}{n} \end{array} \right\}$ converge vers 0.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ or, } |u_n| = \frac{1}{n} \text{ donc } |u_n| < \varepsilon. \text{ Donc la suite converge vers 0.}$$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \Leftrightarrow u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

En effet :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

$$u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |(u_n - l) - 0| < \varepsilon$$

$$|u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| |u_n - l| - 0 \right| < \varepsilon$$

Exemple :

La suite $n \mapsto 2 - \frac{1}{n}$ converge vers 2.

B) Convergence et suite bornée

Théorème :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Démonstration :

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons l sa limite.

Selon la définition de la convergence vers l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < 3$. Donc $\forall n \geq N$, $|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| < 3 + |l|$.

Ainsi, en posant $M = \max(|l| + 3, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|)$, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Contraposée :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors elle ne converge pas (elle diverge).

Attention, la réciproque est fautive :

$u : n \mapsto (-1)^n$ est bornée, mais ne converge pas.

En effet :

Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l .

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors il n'existe aucun N tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

En effet, supposons qu'il en existe.

Alors $|u_N - l| < \varepsilon$ et $|u_{N+1} - l| < \varepsilon$.

Donc $|u_{N+1} - u_N| = |u_{N+1} - l - (u_N - l)| \leq |u_{N+1} - l| + |u_N - l| < 2\varepsilon \leq 1$.

Contradiction car $|u_{N+1} - u_N| = 2$.

C) « La notion de limite ne dépend pas des premiers termes »

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont égales à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature (convergente ou divergente), et si elles convergent, c'est vers la même limite.

Démonstration :

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n = v_n$. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l :

Soit $\varepsilon > 0$. On peut introduire $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', |u_n - l| < \varepsilon$.

Alors, si on pose $P = \max(N, N')$, on a $\forall n \geq P, |v_n - l| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, \forall n \geq P, |v_n - l| < \varepsilon$. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Etant donnés les rôles symétriques joués par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a donc l'équivalence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; donc, par contraposée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge $\Leftrightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

D) Convergence et suite extraite

Lemme :

Soit φ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geq k$

Démonstration par récurrence :

$\varphi(0) \geq 0$ car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(k) \geq k$.

Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k) \geq k$; $\varphi(k+1) > k$; $\varphi(k+1) \geq k+1$.

Théorème :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite converge vers l .

Démonstration :

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Alors pour tout $k \geq N$, on a $\varphi(k) \geq k \geq N$, donc $|u_{\varphi(k)} - l| < \varepsilon$.

Ainsi, on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |v_k - l| < \varepsilon$

Application :

Généralement pour la contraposée.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim(u_{2n}) = 1 \\ \lim(u_{2n+1}) = -1 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge.}$$

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim(u_{2n}) = 0 \\ \lim(u_{4n+3}) = -1 \\ \lim(u_{4n+1}) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge.}$$

Proposition :

Si $(u_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$

Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K, |u_{2k} - l| < \varepsilon$

Soit $K' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq K', |u_{2k+1} - l| < \varepsilon$.

Alors $\forall n \geq \max(2K, 2K'+1), |u_n - l| < \varepsilon$.

En effet : soit $n \geq \max(2K, 2K'+1)$.

Si n est pair, n s'écrit sous la forme $n = 2k$, et comme $n \geq 2K$, on a $k \geq K$, donc $|u_{2k} - l| < \varepsilon$, soit, comme $n = 2k$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Il en est de même si n est impair.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$

III Convergence et inégalités

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et si I est un intervalle ouvert contenant l , alors il existe un rang à partir duquel les termes sont dans I .

Démonstration :

Il est clair que si I est ouvert, et si $l \in I$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset I$. Soit alors un tel $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\forall n \geq N, u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset I$

Théorème (passage à la limite dans une inégalité) :

Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l, l' respectivement, et si il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.

Démonstration par l'absurde :

Avec les hypothèses du théorème, supposons que $l > l'$.

Soit alors ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{l-l'}{2}$. Ainsi, $l'+\varepsilon < l-\varepsilon$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$

Et aussi $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', l'-\varepsilon < v_n < l'+\varepsilon$

Alors, pour $n \geq \max(N, N', n_0)$:

$v_n < l'+\varepsilon < l-\varepsilon < u_n$. Contradiction, car $u_n \leq v_n$.

Remarque :

Les inégalités strictes ne se conservent pas par passage à la limite.

Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{n}$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$

Cas particulier :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite, et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$, alors $\lim(u_n) \leq a$

Théorème (des gendarmes) :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$, et si il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.

Et aussi $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$

Alors, pour $n \geq \max(N, N', n_0)$, on a $l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon$

On a donc trouvé M tel que $\forall n \geq M, l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M, |v_n - l| < \varepsilon$

Cas particulier :

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, et si $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Plus généralement, si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, et si $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

IV Convergence et opérations sur les suites

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \left| |u_n| - |l| \right| \leq |u_n - l|$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

(Attention, la réciproque est fautive, sauf si $l = 0$)

Proposition :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $l' \in \mathbb{R}$, alors :

- $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$
- $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λl
- $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \times l'$

Démonstration :

- Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon/2$ (car $\varepsilon/2 > 0$)

Et $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', |v_n - l'| < \varepsilon/2$.

Alors, pour $n \geq \max(N, N')$, $|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M, |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$.

Donc $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.

- 1^{er} cas : $\lambda \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon/|\lambda|$ (car $\varepsilon/|\lambda| > 0$)

Alors, pour tout $n \geq N$, on a : $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| |u_n - l| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$

2^{ème} cas : $\lambda = 0$: trivial, la suite nulle converge vers 0.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle est donc bornée.

On introduit alors $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n - l' l| = |u_n (v_n - l') + l' (u_n - l)| \leq |u_n| |v_n - l'| + |l'| |u_n - l| \leq \underbrace{M |v_n - l'|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|l'| |u_n - l|}_{\rightarrow 0}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l' l$.

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, alors $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$.

En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M |v_n|$ (voir démonstration précédente)

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain

rang et converge vers $\frac{1}{l}$.

Démonstration :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Donc $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|l| > 0$.

Soit alors α tel que $0 < \alpha < |l|$. Il existe donc $P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq P, |u_n| > \alpha$.

Donc $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie au moins à partir de P .

Montrons que $\lim \left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{l}$

Pour tout $n \geq P$, on a : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{1}{|u_n| |l|} |u_n - l| \leq \frac{1}{\alpha |l|} |u_n - l|$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{l}$.

Proposition (démontrée plus tard) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I . Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$.

Si f est une fonction continue définie sur I , alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l)$

V Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

On prolonge la loi + et la relation \leq sur $\overline{\mathbb{R}}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-\infty) + x = -\infty, \quad (+\infty) + x = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty, \quad +\infty + (+\infty) = +\infty$$

(Prolongation partielle)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < +\infty, \quad -\infty < x$$

$$-\infty < +\infty$$

(Prolongation totale)

Remarque :

$\overline{\mathbb{R}}$ admet un maximum ($+\infty$) et un minimum ($-\infty$).

Définition :

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq A$

« étant donné n'importe quel réel, il y a un rang à partir duquel on le dépasse »

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors elle n'en a qu'une.

Démonstration :

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $l' < l$

1^{er} cas : $l, l' \in \mathbb{R}$, déjà vu.

2^{ème} cas : $l' = -\infty, l \in \mathbb{R}$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in]l'-1, l'+1[$

Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $A < l'-1$.

Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', u_n \leq A$

Contradiction lorsque $n \geq \max(N, N')$

Autres cas ($l' \in \mathbb{R}, l = +\infty$ ou $l' = -\infty, l = +\infty$) : procéder de même que pour le 2^{ème} cas.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ a une limite dans } \overline{\mathbb{R}} \begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l \in \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \pm\infty \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite dans } \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge} \end{cases}$$

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \pm\infty$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$

(même démonstration que pour l)

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite tend aussi vers l .

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
(prendre $A > 0$ dans la définition)

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l' \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.

Théorème :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty$, et si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty$

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \pm\infty$, alors $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \pm\infty$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \mp\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$

Démonstration :

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, M \leq v_n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, M + u_n \leq v_n + u_n$

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \geq A - M$

Alors $\forall n \geq N, u_n + v_n \geq A$

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ et si il existe $a > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, $v_n \geq a$, alors $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$

La démonstration est identique à celle de la proposition précédente.

Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir de ce rang et tend vers $+\infty$.

VI Suite arithmétique – géométrique

A) Suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Si $r = 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \text{cte}$

Si $r > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

Si $r < 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

B) Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Si $q = 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 1.

Si $q = 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, étude de la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ ($u_0 = 1$)

- Si $q > 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante
- Si $q < 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Démonstration :

$$\text{Pour les deux premiers : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \underbrace{q^n}_{>0} \underbrace{(q-1)}_{\substack{>0 \text{ si } q > 1 \\ <0 \text{ si } 0 < q < 1}}$$

$$\text{Pour le troisième : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \underbrace{q^n}_{\substack{\text{signe} \\ \text{alterné}}} \underbrace{(q-1)}_{\text{signe constant}}$$

Pour les limites :

- Si $q > 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- Si $-1 < q < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
- Si $q \leq -1$, pas de limite.

En effet : pour $q > 1$, $q^n = (1 + (q-1))^n = 1 + n(q-1) + \dots \geq 1 + n(q-1)$ et $1 + n(q-1)$ tend vers $+\infty$, donc q^n tend vers $+\infty$.

$$\text{Pour } |q| < 1 \text{ et } q \neq 0, \left| \frac{1}{u_n} \right| = \left(\frac{1}{|q|} \right)^n \rightarrow +\infty. \text{ Donc } (|u_n|) \rightarrow 0, \text{ soit } (u_n) \rightarrow 0.$$

VII Comparaison de suites

A) Suite négligeable devant une autre

Définition :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ lorsqu'il existe une suite ε qui tend vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.

On note alors $u \ll v$

Exemple :

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \text{ puisque } \forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$$

Définition équivalente dans un cas courant :

Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors on a l'équivalence :

$$u \ll v \Leftrightarrow \frac{u}{v} \text{ tend vers } 0.$$

Ou encore :

$$u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration : si v ne s'annule pas à partir du rang q .

Supposons que $u \ll v$. Il existe alors $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, u_n = \varepsilon_n v_n$.

$$\text{Alors } \forall n \geq \max(p, q), \frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors, $\forall n \geq q, u_n = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\rightarrow 0} v_n$. Donc $u \ll v$

Proposition :

La relation \ll définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est transitive, compatible avec la multiplication, mais pas avec l'addition.

En effet :

- Si $u \ll v$ et $v \ll w$, alors $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang, et $v_n = \varepsilon'_n w_n$ à partir d'un certain rang. Alors, à partir du plus grand des deux rangs, $u_n = \underbrace{\varepsilon_n \varepsilon'_n}_{\rightarrow 0} w_n$. Donc $u \ll w$.
- Si $u \ll v$ et $u' \ll v'$, alors $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang, et $u'_n = \varepsilon'_n v'_n$ à partir d'un certain rang. Donc $u_n u'_n = \underbrace{\varepsilon_n \varepsilon'_n}_{\rightarrow 0} v_n v'_n$. Donc $uu' \ll vv'$
- Contre-exemple pour l'addition :

$$\frac{1}{n^2} \ll_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}; \frac{1}{n^3} \ll_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n}, \text{ mais } \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \not\ll_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} : \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow 1$$

Cependant, si $u \ll v$ et $u' \ll v$, alors $u + u' \ll v$.

En effet :

$$u_n = \varepsilon_n v_n, u'_n = \varepsilon'_n v_n \text{ à partir d'un certain rang, donc } u_n + u'_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) v_n \dots$$

B) Comparaisons classiques

Pour les suites qui tendent vers $+\infty$:

- $\ln n \ll n$
 $n \rightarrow +\infty$

Plus généralement, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \ln^\alpha n \ll n^\beta$ (exemple : $(\ln n)^{10^9} \ll \sqrt{n}$)
 $n \rightarrow +\infty$

En effet :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta} \ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \underbrace{\left(\frac{\ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha}_{\rightarrow 0}$$

- $n^\alpha \ll n^\beta$ lorsque $0 < \alpha < \beta$

- $n \ll a^n$ lorsque $a > 1$

Démonstration :

$$a = 1 + b, \text{ où } b > 0$$

$$a^n = (1+b)^n \geq \binom{n}{p} b^p \text{ si } n \geq p.$$

$$\text{Soit } a^n \geq \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2. \text{ Donc } \frac{a^n}{n} \rightarrow +\infty, \text{ soit } \frac{n}{a^n} \rightarrow 0$$

Plus généralement, $\forall \alpha > 0, \forall a > 1, n^\alpha \ll a^n$

En effet :

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}} \right)^\alpha = \left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \right)^\alpha. \text{ Or, } a^{1/\alpha} > 1. \text{ Donc } \frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \rightarrow 0. \text{ Comme } \alpha > 0,$$

on a bien $\left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \right)^\alpha \rightarrow 0$

- $a^n \ll b^n$ si $1 < a < b$

- $\forall a > 1, a^n \ll n!$

En effet :

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \times a \times \dots \times a}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^p \times \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n-p}}{1 \times 2 \times \dots \times p \times \underbrace{(p+1) \times \dots \times n}_{n-p \text{ termes } > 1}} \leq \frac{a^p}{p!} \left(\frac{a}{p} \right)^{n-p}$$

$$\text{Si on prend } p > a, \text{ on a, pour tout } n \geq p : 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \underbrace{\frac{a^p}{p!}}_{\text{cte}} \left(\frac{a}{p} \right)^{-p} \times \underbrace{\left(\frac{a}{p} \right)^n}_{\rightarrow 0}$$

$$\text{Donc } \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$$

- $n! \ll n^n$

$$\text{En effet : } 0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{2 \times \dots \times n}{n \times \dots \times n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

Notation :

Pour dire qu'une suite u est négligeable devant une autre suite v , on note :

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ (« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ égale une suite négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ »)

Ainsi, $o(v_n)$ désigne une suite négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

C) Suites équivalentes

Définition :

u équivaut à v ($u \sim v$)

u_n est équivalente à v_n en $+\infty$ ($u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$) } \Leftrightarrow il existe une suite $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui

tend vers 1 telle que $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang.

Définition simplifiée :

Si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$

Exemple :

$$n^2 + n \sim n^2$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Autre définition :

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Démonstration :

- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang, où $h_n \rightarrow 1$. Mais $h_n = 1 + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \rightarrow 0$. D'où $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n = v_n + o(v_n)$.
- Inversement : identique.

Proposition :

La relation \sim est transitive, réflexive, antisymétrique.

Démonstration de la symétrie (les deux autres étant immédiats) :

Si $u \sim v$, alors $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang, où $h_n \rightarrow 1$. Mais alors

$$v_n = \frac{1}{h_n} u_n \text{ à partir d'un certain rang, et } \frac{1}{h_n} \rightarrow 1, \text{ donc } v \sim u.$$

Une relation transitive, réflexive, symétrique est une relation d'équivalence.

Une relation transitive, réflexive, antisymétrique est une relation d'ordre.

La relation \sim est compatible avec \times , mais pas avec $+$; la démonstration est la même que pour \ll .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sim -\frac{1}{n} \end{array} \right\} \text{ mais } \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \not\sim 0.$$

Remarque :

$u_n \sim 0 \Leftrightarrow u_n = h_n \times 0$ à partir d'un certain rang $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en 0.

Proposition :

- Si $u_n \sim v_n$, et si $u_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v_n \rightarrow l$

En effet, $v_n = \underbrace{h_n}_{\rightarrow 1} \underbrace{u_n}_{\rightarrow l}$ à partir d'un certain rang.

- La réciproque est fautive, sauf si $l \in \mathbb{R}^*$

Démonstration :

Si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim l$. Par transitivité, si $v_n \rightarrow l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim v_n$.

Contre-exemples si $l = 0, \pm\infty$: $n^2 \not\sim n$, $\frac{1}{n^2} \not\sim \frac{1}{n}$.

Divers vrai/faux classiques :

- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$ (compatibilité avec \times) \rightarrow vrai
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ ($u_n = h_n v_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{h_n} \frac{1}{v_n}$) \rightarrow vrai
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (si défini) \rightarrow vrai.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n \sim v_n^n$ est fautive en général ($1 + \frac{1}{n} \sim 1$, et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$)
- Si $u_n \sim v_n$, alors $f(u_n) \sim f(v_n)$ est fautive en général.

D) Equivalents usuels

Si $u_n \rightarrow 0$, alors :

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ (α indépendant de n)

E) Suite dominée par une autre

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite bornée $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = k_n v_n$ à partir d'un certain rang.

Cela revient à dire :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$ il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $|u_n| \leq K|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$

Exemple :

- $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
 - $n \sin n \not\sim n$
 - $n \sin n \neq o(n)$
- } mais $n \sin n = O(n)$

VIII Théorèmes portant sur les suites monotones

A) Le théorème « de la limite monotone » (pour les suites)

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante.

- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée, c'est-à-dire que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée.

Cet ensemble est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . Il admet donc une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Montrons alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $l - \varepsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (puisque l est le plus petit majorant)

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l - \varepsilon$. Ainsi, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\forall n \geq N, l - \varepsilon < u_n \leq u_N \leq l (< l + \varepsilon)$.

D'où la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers l .

- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non majorée. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. A n'est pas un majorant de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Donc, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Théorème 2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors elle tend vers sa borne inférieure.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante.

(1) Appliquer le théorème précédent à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(2) Recopier la démonstration précédente en adaptant.

B) Suites adjacentes

Théorème :

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et si $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors elles convergent vers une même limite.

Vocabulaire :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes} \\ \text{déf} \\ (u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \end{array} \right.$

Démonstration :

Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adjacentes.

- Déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

En effet, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > v_p$, alors, pour tout $n \geq p$:

$v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante)

Soit $u_n - v_n \geq u_p - v_n$, et $v_n \leq v_p$ donc $u_p - v_n \geq u_p - v_p$.

C'est-à-dire : $\forall n \geq p, u_n - v_n \geq u_p - v_p$

D'où, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $0 \geq u_p - v_p$.

Ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé $u_p > v_p$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

- Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers $l \in \mathbb{R}$.

De même, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l' \in \mathbb{R}$.

Comme $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, et $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow l - l'$, on a donc $l - l' = 0$, c'est-à-dire $l = l'$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite.

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\text{Et } v_n = u_n + \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n!}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

- $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite e .

Montrons que $e > 2$ et que $e \notin \mathbb{Q}$.

- Déjà, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow e$, et $\forall n \geq 2, u_n \geq 2 + \frac{1}{2}$.

Donc en passant à la limite $e \geq 2 + \frac{1}{2} > 2$.

- Supposons que $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tendent vers e , on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n < e < v_n$.

C'est-à-dire, pour tout $n \geq 2$, $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$

Donc, pour $n = q$ (on peut s'arranger pour que $q \geq 2$ puisque la fraction n'est pas nécessairement irréductible) :

$$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a+1}{q!}, \text{ où } a \text{ est un entier naturel.}$$

C'est-à-dire $a < p(q-1)! < a+1$, ce qui est impossible car $p(q-1)! \in \mathbb{N}$.

Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

C) Théorème des « segments emboîtés »

Théorème :

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments emboîtés de \mathbb{R} . Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ n'est pas vide, et si, de plus, l'amplitude de S_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est un singleton.

Démonstration :

- Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_n < b_n \text{ et } S_n = [a_n, b_n])$$

- Comme les S_n sont emboîtés, on a $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \subset S_n$.

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par b_0), et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par a_0).

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\beta \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$. Donc $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset$

- Si de plus l'amplitude de S_n tend vers 0, alors $b_n - a_n \rightarrow 0$, donc $\alpha = \beta$

Donc $\{\alpha\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Mais on a aussi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \subset \{\alpha\}$. En effet :

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$. D'où, par passage à la limite, $\alpha \leq x \leq \beta$.

Donc, comme $\alpha = \beta$, $x \in \{\alpha\}$. D'où l'inclusion. Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{\alpha\}$.

D) Un exemple très important : les suites construites par dichotomie

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$(1) a_0 \leq b_0$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right) \\ \text{ou} \left(\frac{a_n + b_n}{2}, a_n \right) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, et convergent vers la même limite.

Démonstration :

- Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.

C'est vrai pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.

$$\text{Alors } a_0 \leq a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \leq b_0.$$

$$\text{Or, } (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right) \\ \text{ou} \left(\frac{a_n + b_n}{2}, a_n \right) \end{cases}.$$

Donc $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_0$, ou $a_0 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0$. Soit, dans les deux cas, $a_0 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_0$, ce qui achève la récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $a_n \leq b_n$.

$$\text{Donc } a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n. \text{ Or, } (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right) \\ \text{ou} \left(\frac{a_n + b_n}{2}, a_n \right) \end{cases}.$$

Donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, ce qui est valable pour tout n .

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Donc $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

IX Le théorème de Bolzano–Weierstrass

Théorème :

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On introduit alors $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$.

- On commence par construire deux suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que :
 - $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$ est infini.

Pour cela, on procède par dichotomie :

- On prend $a_0 = a$, $b_0 = b$. L'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini, puisque c'est \mathbb{N} .

- En supposant a_k et b_k de sorte que $a_k \leq b_k$ et que l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$ est infini, on construit a_{k+1} et b_{k+1} de la manière suivante :

○ Si l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right]$ est infini, on pose

$$a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

○ Sinon, l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right]$ est nécessairement

$$\text{infini, et on pose alors } a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \text{ et } b_{k+1} = b_k.$$

On a bien alors $a_{k+1} \leq b_{k+1}$, et l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ est infini.

La construction dichotomique de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ assure de plus que ces deux suites convergent vers la même limite.

• On construit une suite strictement croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$.

Pour cela, on fait la construction récurrente suivante :

- On prend $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [a_0, b_0]$: il en existe puisque l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ est infini.

- En supposant n_k construit : comme l'ensemble des entiers n tels que $u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ est infini, il contient nécessairement des entiers strictement plus grands que n_k ; on peut donc trouver $n_{k+1} > n_k$ tel que $u_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$

• Conclusion :

La suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (puisque $k \mapsto n_k$ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}), et elle converge :

En effet, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$. Or, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, donc $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aussi d'après le théorème des gendarmes.

X Compléments

Proposition :
Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Démonstration :
Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut introduire un rationnel r_n tel que $a < r_n < a + \frac{1}{n+1}$.

Donc la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Idées pour les suites définies par des relations de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

- Intérêt d'un « intervalle stable par f ».
- Intérêt du graphe de f .
- Intérêt des points fixes de f .
- Intérêt du signe de $f(x) - x$
- Intérêt de la croissance de f sur un intervalle stable contenant u_0 : la suite est monotone.
- Intérêt de la décroissance de f sur un intervalle contenant u_0 : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.
- Intérêt de majorations du type $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Développement décimal illimité propre d'un réel :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $D_n = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \right\}$

Proposition :

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors il existe un unique décimal $d_n \in D_n$ tel que $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$.

On l'appelle la valeur décimale approchée par défaut d'ordre n de x .

Démonstration :

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences :

$$\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a}{10^n} + 10^{-n} \Leftrightarrow a \leq 10^n x < a + 1 \Leftrightarrow a = [10^n x]$$

D'où l'existence et l'unicité de $d_n \in D_n$ tel que $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$, $d_n = \frac{1}{10^n} [10^n x]$.

Remarques :

- d_0 est la partie entière de x .

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x - 10^{-n} \leq d_n \leq x$, donc $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Proposition :

Avec les notations précédentes, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 10^n (d_n - d_{n-1})$.

Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = d_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déjà, α_n est un entier (puisque $10^n d_n$ et $10^{n-1} d_{n-1}$ le sont)

De plus, on a : $x - 10^{-n} < d_n \leq x$, et $x - 10^{-n+1} < d_{n-1} \leq x$.

Donc $-10^{-n} < d_n - d_{n-1} < -10^{-n+1}$, soit $-1 < \alpha_n < 10$, d'où $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

De plus, $d_n = d_0 + \sum_{k=1}^n (d_k - d_{k-1}) = d_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{10^k}$.

(On peut montrer de plus par l'absurde que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire à 9)