Chapitre 4 : Rudiments de topologie (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

I Notion de boule ouverte, fermée

Dans $\mathbb{C}$: Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \varepsilon\}$.

Dans $\mathbb{R}$: Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre a et de rayon ε est l'ensemble $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < \varepsilon\}$.

On définit aussi la boule fermée de centre a et de rayon ε comme étant :

Dans $\mathbb{C}$: $\overline{B}(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leq \varepsilon\}$

Dans $\mathbb{R}$: $\overline{B}(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \varepsilon\}$

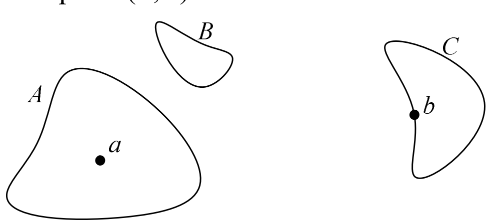
On étend la définition de boules : $\overline{B}(a,0) = \{a\}$ et $B(a,0) = \varnothing$.

II Notion de voisinage

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (au choix)

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que A est un voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$.



Sur le dessin :

A est un voisinage de a, B n'est pas un voisinage de a, mais $A \cup B$ en est un.

C n'est pas un voisinage de b : il faut qu'une boule ouverte soit incluse dans C.

Propriétés :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

On note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

- $V(a)$ est stable par extension, c'est-à-dire :

Si $V \in V(a)$, et si $V \subset W$, alors $W \in V(a)$

- $V(a)$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire :

Si $V \in V(a)$, et si $W \in V(a)$, alors $V \cap W \in V(a)$.

Plus généralement, si $V_1, V_2, \ldots V_n \in V(a)$, alors $V_1 \cap V_2 \cap \ldots V_n \in V(a)$.

Mais ce n'est pas valable pour une infinité : $\forall n\in\mathbb{N}^*, [0,1+\frac{1}{n}[$ est un voisinage de 1, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1+\frac{1}{n}[\notin V(1)$.

En effet :

Soient $V,W\in V(a)$.

Il existe alors $\varepsilon>0$ tel que $B(a,\varepsilon)\subset V$, et $\varepsilon'>0$ tel que $B(a,\varepsilon')\subset W$.

Alors, pour $\alpha=\min(\varepsilon,\varepsilon')$, on a $B(a,\alpha)\subset V\cap W$

- Séparabilité de voisinages

Soient $a,a'\in\mathbb{K}$, avec $a\neq a'$. Il existe alors $V\in V(a)$, $W\in V(a')$ tels que $V\cap W=\varnothing$.

Démonstration :

$|a'-a|>0$. On peut choisir ε tel que $0<\varepsilon<\dfrac{|a'-a|}{2}$

Alors $B(a,\varepsilon)\cap B(a',\varepsilon)=\varnothing$ et $B(a,\varepsilon)\in V(a)$, $B(a',\varepsilon)\in V(a')$. D'où l'existence.

III Les ouverts, les fermés

A) Les ouverts

Définition :

Soit $\Omega\subset\mathbb{K}$. On dit que Ω est ouvert lorsque Ω est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire lorsque $\forall a\in\Omega, \Omega\in V(a)$.

Exemples :

- Les boules ouvertes sont ouvertes.

Démonstration :

Pour $B(a,0)$, on a bien le résultat ($B(a,0)=\varnothing$!)

Soit Ω une boule ouverte de centre $a\in\mathbb{K}$ et de rayon $r>0$.

Montrons alors que Ω est ouvert.

Soit $x\in\Omega$.

Soit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<r-|a-x|$ (ce qui est possible car $|a-x|<r$)

Alors $B(x,\varepsilon)\subset\Omega$. En effet, pour tout $y\in B(x,\varepsilon)$, on a :

$|a-x|\leq|a-x|+\underbrace{|x-y|}_{<\varepsilon<r-|a-x|}<r$.

Donc $\Omega\in V(x)$. Donc Ω est voisinage de chacun de ses points.

- $\mathbb{K}$ est ouvert
- Exemples d'ouverts de $\mathbb{R}$:

$\varnothing,\mathbb{R},]a,b[$ avec $a<b$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ avec $a\in\mathbb{R}$,

$]a,b[\cup]c,d[$ où $a<b<c<d$.

Proposition :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

- Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts.

Montrons que $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est un ouvert.

Soit $a \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Alors il existe $j \in I$ tel que $a \in \Omega_j$. Donc Ω_j est voisinage de *a*.

Comme $\Omega_j \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in V(a)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est voisinage de tous ses points. C'est donc un ouvert.

- Soient Ω, Ω' deux ouverts.

Soit $a \in \Omega \cap \Omega'$.

Donc $\Omega \in V(a)$, et $\Omega' \in V(a)$. Donc $\Omega \cap \Omega' \in V(a)$.

C'est valable pour tout $a \in \Omega \cap \Omega'$. Donc $\Omega \cap \Omega'$ est un ouvert.

B) Les fermés

Soit $F \subset \mathbb{K}$. On dit que *F* est fermée lorsque $C_{\mathbb{K}} F$ est ouvert.

Exemples :

$\varnothing$ est fermé, $\mathbb{K}$ est fermé, les boules fermées sont fermées.

Démonstration pour les boules fermées :

Soient $a \in \mathbb{K}, r \in \mathbb{R}^+$

- Dans $\mathbb{R}$: facile : $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$
- Dans $\mathbb{K}$:

Soit $F = \overline{B}(a,r)$. Soit $b \in C_{\mathbb{K}} F$, c'est-à-dire tel que $|b-a| > r$.

Prenons alors ε tel que $0 < \varepsilon < |b-a| - r$.

Alors $B(b,\varepsilon) \subset C_{\mathbb{K}} F$:

Pour tout $x \in B(b,\varepsilon)$, $|b-a| \leq |b-x| + |x-a|$, soit $|x-a| \geq |b-a| - \underbrace{|b-x|}_{<\varepsilon<|b-a|-r} > r$.

Donc $C_{\mathbb{K}} F$ est ouvert, donc *F* est fermé.

- Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont fermés

Les intervalles fermés sont $[a,b]$, où $a < b; [a,+\infty[,]-\infty, a]$.

IV Intérieur et adhérence d'une partie

A) Intérieur

Soit $A \subset \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que *a* est intérieur à *A* lorsque *A* est voisinage de *a*, c'est-à-dire lorsque : $\exists \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \subset A$.

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à *A*, appelé « l'intérieur de *A* ».

Proposition :

$\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans *A*, et c'est le plus grand des ouverts contenus dans *A*, au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, il est évident que $\mathring{A} \subset A$.
- $\mathring{A}$ est ouvert :

Soit $x \in \mathring{A}$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$.

Soit alors $y \in B(x,\varepsilon)$. Montrons que $y \in \mathring{A}$:
$B(x,\varepsilon)$ est ouverte. Elle est donc voisinage de chacun de ses points.

Or, $B(x,\varepsilon) \subset A$. Donc A est voisinage de y, donc $y \in \mathring{A}$.

Ainsi, $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est ouvert.

- Montrons que c'est le plus grand :

Soit Ω un ouvert inclus dans A. Montrons qu'alors $\Omega \subset \mathring{A}$.
Soit $x \in \Omega$. Ω est ouvert, donc $\Omega \in V(x)$. Mais $\Omega \subset A$. Donc $A \in V(x)$. Donc $x \in \mathring{A}$. D'où l'inclusion.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur d'un intervalle $\vdots\alpha,\beta\vdots$ où $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ est $]\alpha,\beta[$.
- $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$: si Ω est un ouvert non vide, alors Ω est du type $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Or, cet intervalle contient des irrationnels. Donc $\Omega \not\subset \mathbb{Q}$.
- L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon.

B) Adhérence (dans $\mathbb{K}$) d'une partie de $\mathbb{K}$.

Définition :
Soient $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est adhérent à A lorsque tout voisinage de a rencontre A, c'est-à-dire lorsque $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \varnothing$.
La définition revient à dire que a est adhérent à A lorsque $\forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$
En effet :
Si $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \varnothing$, alors « en particulier », $\forall \varepsilon > 0, B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, puisque les boules ouvertes de centre a et de rayon non nul sont des voisinages de a.
Inversement, tout voisinage de a contient une boule ouverte de centre a.
La définition équivaut aussi à : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, |x-a| < \varepsilon$.

On note $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des points de A adhérents à A. On l'appelle « l'adhérence de A dans $\mathbb{K}$ ».

Proposition :
$\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est un fermé qui contient A, et c'est le plus petit des fermés contenant A, au sens de l'inclusion.

Démonstration :

- Déjà, $A \subset \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, puisque $\forall a \in A, \forall V \in V(a), a \in A \cap V$.
- Soit $\Omega = C_{\mathbb{K}}\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que Ω est ouvert :

Soit $x \in \Omega$. Montrons que $\Omega \in V(x)$.
Déjà, $x \in \Omega$, donc $x \notin \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Il existe donc $W \in V(x)$ tel que $W \cap A = \varnothing$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset W$
Alors $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$. Notons $W' = B(x,\varepsilon)$. Alors W' est un ouvert, et il est inclus dans Ω : pour tout $y \in W'$, on a $W' \in V(y)$ (car W' est ouvert), et de plus ce voisinage ne rencontre pas A, donc $y \notin \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$, c'est-à-dire que $y \in \Omega$. D'où l'inclusion. Donc $\Omega \in V(x)$, donc Ω est ouvert, soit $\mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermé.

- C'est le plus petit fermé : soit F un fermé contenant A.

Montrons qu'alors $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$

Soit $x \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Montrons que $x \in F$.

Supposons que $x \notin F$. Ainsi, $x \in C_{\mathbb{K}}F$.

Comme $C_{\mathbb{K}}F$ est ouvert, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset C_{\mathbb{K}}F$, c'est-à-dire que $V \cap F = \varnothing$. Donc $V \cap A = \varnothing$ (car $A \subset F$), ce qui contredit la définition de x puisque $x \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$. Donc $x \in F$. Donc $\text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \subset F$.

Exemples :

L'adhérence de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ est $[a,b]$.

L'adhérence dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

$\text{Adh}_{\mathbb{K}}(B(a,r)) = \overline{B}(a,r)$

V Les suites et le vocabulaire de la topologie

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, soit $l \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$

Démonstration :

$\Rightarrow$: supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(l,\varepsilon) \subset V$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(l,\varepsilon) \subset V$

D'où l'implication puisque ce résultat est valable pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$.

$\Leftarrow$: supposons que $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $B(l,\varepsilon) \in \mathcal{V}(l)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(l,\varepsilon)$, c'est-à-dire tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

D'où l'autre implication.

Proposition :

Définition de l'adhérence avec les suites :

Soit $A \subset \mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

$a \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow$ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration :

$\Rightarrow$: Soit $a \in \text{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a,\frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$. On peut donc choisir $u_n \in B(a,\frac{1}{n}) \cap A$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A, et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - a| < \dfrac{1}{n}$. Donc d'après le théorème des gendarmes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers a.

$\Leftarrow$ Soit $a \in \mathbb{K}$. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in B(a,\varepsilon)$.

Comme $u_N \in A$, on a $A \cap B(a,\varepsilon) \neq \varnothing$. Comme le résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $a \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$.

VI Partie dense dans une autre

Soient $A, B \subset \mathbb{K}$, avec $A \subset B$.

On dit que A est dense dans B lorsque $B \subset \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A)$

Ou encore lorsque $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, B(b,\varepsilon) \cap \mathrm{Adh}_{\mathbb{K}}(A) \neq \varnothing$

Ou quand tout point de B est limite d'une suite d'éléments de A.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

VII Compléments (dans $\mathbb{R}$)

Définition :

Un voisinage de $+\infty$, c'est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle du type $]c,+\infty[$, avec $c \in \mathbb{R}$. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle du type $]-\infty, c[$.

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ on dit que $+\infty$ est adhérent à A lorsque tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, c'est-à-dire lorsque $\forall V \in \mathcal{V}(+\infty), V \cap A \neq \varnothing$, ce qui revient à dire que $\forall c \in \mathbb{R},]c,+\infty[\cap A \neq \varnothing$, où encore que A n'est pas majorée.

On définit de même pour $-\infty$.

On note $\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(A)$ l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérents à A.

Exemple :

$A =]0;5[\cup]5;+\infty[$

$\mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(A) = A \cup \{0;5\}$

$\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(A) = A \cup \{0;5;+\infty\}$

Remarques :

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$

$\mathcal{V}(+\infty)$ est stable par extension et par intersection finie.

De même pour $-\infty$.