Chapitre 10 : Propriétés des fonctions dérivables

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Extremums de fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

Si f présente un extremum local, et si f est dérivable en a et si $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration :

Supposons que f présente un maximum local en a.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, f(x) \leq f(a)$.

Comme a est intérieur à I, on peut supposer ε assez petit pour que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.

En effet :

Il existe déjà β tel que $]a-\beta, a+\beta[\subset I$, et donc avec $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \beta)$, on aura $]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[\subset I$ et $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[, f(x) \leq f(a)$. On notera ε pour ε' dans la suite.

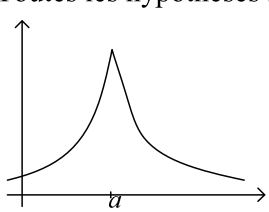
On a alors : $\forall x \in]a-\varepsilon, a[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

Le passage à la limite quand $x \mapsto a$ donne $f'(a) \geq 0$

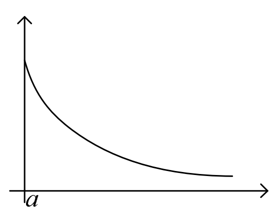
Mais on a aussi $\forall x \in]a, a+\varepsilon[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Donc $f'(a) \leq 0$

Donc $f'(a) = 0$.

Toutes les hypothèses sont utiles :



Maximum en a, mais f non dérivable en a



Maximum en a, f dérivable en a, mais $a \notin \mathring{I}$

La réciproque est fausse :

L'application $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'admet pas de maximum, même local, en 0.

II Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ au moins, et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

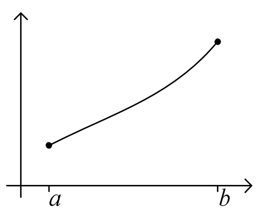
Démonstration :

Supposons f continue sur $[a,b]$. Alors l'image par f de ce segment est un segment, disons $[m,M]$ avec $m\le M$

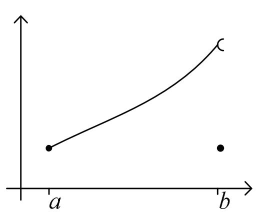
- Si $m=M$, c'est-à-dire si f est constante sur $[a,b]$, alors f' est nulle sur $]a,b[$ (on a le choix)
- Si $m<M$, l'un des deux est nécessairement différent de $f(a)$ (et donc aussi de $f(b)$), disons par exemple M (le raisonnement est le même pour m). De plus, celui-ci est le maximum de f sur $[a,b]$ (puisque f est continue sur le segment, donc atteint ses bornes). Il existe donc $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=M$. Alors déjà $c\neq a$ et $c\neq b$, car $M\neq f(a)$. Donc $c\in\,]a,b[$. Donc f est dérivable en c, et f atteint un maximum en c, donc $f'(c)=0$.

Attention :

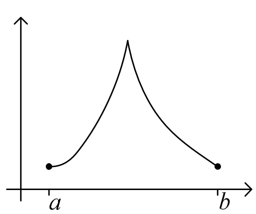
- $f(a)=f(b)$ est indispensable :



- La continuité sur $[a,b]$ aussi :



- Et enfin la dérivabilité sur $]a,b[$:

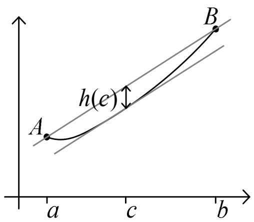


Le théorème des accroissements finis :

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ au moins.

Alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.



c est tel que la tangente en c de la courbe est parallèle à la corde AB.

Démonstration :

Soit φ la fonction affine coïncidant avec f en a et en b.

Soit h la fonction définie par : $h:\begin{array}{l}[a,b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)-\varphi(x)\end{array}$.

Alors h est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$ (au moins), car f et φ le sont (φ est même de classe C^∞)

On a : $h(a)=h(b)$ $(=0)$

Il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$.

Or, $\forall x\in\,]a,b[, h'(x)=f'(x)-\varphi'(x)$,

Et $\forall x\in[a,b], \varphi(x)=f(a)+(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $\forall x\in\,]a,b[, h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $0=h'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, soit $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Remarque :

Le théorème de Rolle devient maintenant une conséquence évidente du théorème des accroissements finis.

Autres versions :

- Soient $a,b\in\mathbb{R}$, avec $a\neq b$.

On note $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$ pour $[\min(a,b),\max(a,b)]$, et autres avec les crochets ouverts…

Soit $f:\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}\to\mathbb{R}$. Si f est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, et dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{]a,b[}$, alors il existe $c\in\underset{\leftrightarrow}{]a,b[}$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

(« Théorème des accroissements finis entre a et b »)

- Soit $f:I\to\mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors, pour tous $a,b\in I$, il existe $\theta\in\,]0;1[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$.

En effet :

- Si $a=b$, on choisit $\theta\in\,]0;1[$ quelconque.
- Si $a\neq b$, on peut appliquer la version précédente : f est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, car $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}\subset I$, et dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{]a,b[}$ car $\underset{\leftrightarrow}{]a,b[}\subset\mathring{I}$. Il existe donc $c\in\underset{\leftrightarrow}{]a,b[}$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. Donc, avec $\theta=\dfrac{c-a}{b-a}\in\,]0;1[$ (car $c-a<b-a$), on a bien le résultat voulu.

- Soit $f: I \to \mathbb{R}$, où I contient 0, continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathring{I}$, il existe $\theta \in \left]0;1\right[$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(\theta.x)$

Démonstration :
C'est la version précédente entre 0 et *x*.

Inégalité des accroissements finis :
Théorème :
Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$.

Démonstration :
On applique le théorème des accroissements finis entre *a* et *b*. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Donc $|f(b) - f(a)| = |b-a| \times |f'(c)| \leq |b-a| \times k$.

On a aussi :
Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, où $a < b$. Si *f* est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $\left]a,b\right[$ et si il existe *m* et *M* tels que $\forall x \in]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

III Sens de variation des fonctions dérivables

Théorème :
Soit $f: I \to \mathbb{R}$, continue sur *I*, dérivable sur $\mathring{I}$. On a les équivalences :

(1) *f* est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$

(2) *f* est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \leq 0$

(3) *f* est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0$

Démonstration :
Déjà, (2) c'est (1) appliqué à $-f$, et (3) est obtenu avec (1) et (2). Reste à montrer (1) :
Supposons *f* croissante sur *I*. Soit $a \in \mathring{I}$, montrons que $f'(a) \geq 0$. On a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \geq 0$$

(car *f* est croissante donc $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe)
Donc, par passage à la limite, $f'(a) \geq 0$.
Réciproquement, supposons que $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$
Soient $x_1, x_2 \in I$, avec $x_1 < x_2$.
Selon le théorème des accroissements finis appliqué à *f* entre x_1 et x_2 (on peut puisque *f* est continue sur $[x_1, x_2] \subset I$ et dérivable sur $\left]x_1, x_2\right[\subset \mathring{I}$), il existe $c \in \left]x_1, x_2\right[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)f'(c)}_{\geq 0 \text{ car } c \in \mathring{I} \text{ et } x_1 < x_2}$, donc $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur *I*, dérivable sur $\mathring{I}$. On a alors l'équivalence :

$$f \text{ est strictement croissante sur } I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0 \\ \text{l'ensemble } Z = \left\{ x \in \mathring{I}, f'(x) = 0 \right\} \text{ vérifie } \mathring{Z} = \varnothing \end{cases}$$

Pour *Z*, cela signifie que *Z* ne contient pas d'intervalle ouvert non vide, ou que f' n'est nulle qu'en des points isolés.

Démonstration :

$\Rightarrow$: Déjà, si f est strictement croissante sur *I*, alors f est croissante sur *I*, donc $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$.

Supposons $\mathring{Z} \neq \varnothing$. Il existe donc un ouvert du type $]\alpha, \beta[\subset Z$ (où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Alors f' est nulle sur $]\alpha, \beta[$, donc *f* est constante sur $]\alpha, \beta[$, ce qui est impossible car *f* est strictement croissante. Donc $\mathring{Z} = \varnothing$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) \geq 0$, et $\mathring{Z} = \varnothing$.

Déjà, *f* est croissante d'après la première condition. Elle l'est de plus strictement, car sinon il existerait $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

On aurait alors $\forall x \in]x_1, x_2[, f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, puisque *f* est croissante.

C'est-à-dire qu'on aurait $\forall x \in]x_1, x_2[, f(x) = \text{cte} = f(x_1)$, donc f' est nulle sur $]x_1, x_2[$, d'où $\mathring{Z} \neq \varnothing$ (puisqu'il contiendrait au moins $]x_1, x_2[$) ce qui est impossible.

Donc *f* est strictement croissante.

Le théorème est valable aussi si *f* est dérivable sur *I*, et on a alors l'équivalence :

f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'$ est positive sur *I*.

Attention :

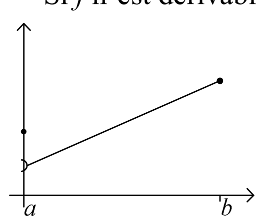
- Le fait que *I* soit un intervalle est indispensable. Par exemple :

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2} \leq 0$.

Mais *f* n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En revanche, elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

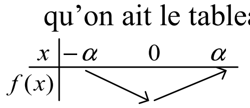
- Si *f* n'est dérivable que sur $\mathring{I}$, la continuité sur *I* est indispensable :



f' est positive sur $]a, b]$, donc *f* est croissante sur $]a, b]$, mais pas sur $[a, b]$.

Diverses idées fausses :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et même de classe C^1. On suppose que *f* admet un minimum absolu (non local) en 0. On pourrait croire qu'il existe $\alpha > 0$ de façon qu'on ait le tableau de variations suivant :



C'est faux !!. par exemple :

$$f(x)=\begin{cases} x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

f est manifestement continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
f est dérivable en 0. En effet :

$\forall x\neq 0, \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{\underbrace{x}_{\to 0}(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}})}_{\text{borné}}$, donc *f* est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

On voit que $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)>0$, car $\forall x\in\mathbb{R}^*\ 2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\in[1;3]$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^*\ x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}})\in[x^2;3x^2]$, soit $\forall x\in\mathbb{R}^*\ x^2(2+\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}})>0$.

Donc *f* atteint un minimum absolu en 0.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x)=2x(2+\sin\tfrac{1}{\sqrt{x}})+x^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}(\underbrace{2\sqrt{x}(2+\sin\tfrac{1}{\sqrt{x}})}_{\to 0}-\underbrace{\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{\sqrt{x}}}_{\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})$$

(*f* est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque f' est continue même en 0)

Pour α assez petit, $2\sqrt{x}(2+\sin\frac{1}{\sqrt{x}})$ est compris entre 0 et ¼ pour $x\in\left]0,\alpha\right[$.

Mais $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ prend la valeur $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sur tout intervalle du type $\left]0,\alpha\right[$ où $\alpha>0$.

Donc f' n'est pas de signe constant sur $\left]0,\alpha\right]$, et ce quel que soit $\alpha>0$.

Donc *f* n'est pas croissante sur $\left]0,\alpha\right]$.

- On peut croire que si *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et si $f'(0)>0$, alors f' est croissante au voisinage de 0. C'est vrai, mais pas si on suppose *f* seulement de classe D^1 sur $\mathbb{R}$.

IV Le théorème « sans nom »

Théorème :

Soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a\in I$, soit $l\in\overline{\mathbb{R}}$.

Si *f* est continue sur *I*, dérivable sur $I\setminus\{a\}$, et si $f'(x)\xrightarrow[x\neq a]{x\mapsto a} l$, alors :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\neq a]{x\mapsto a} l$$

Par conséquent :

- Si $f'(x)$ a une limite finie l lorsque $x\mapsto a$, alors *f* est dérivable en *a* et $f'(a)=l=\lim\limits_{\substack{x\mapsto a\\ x\neq a}} f'(x)$, donc en plus f' est continue en *a*.
- Si $f'(x)\xrightarrow[x\neq a]{\mapsto xa}\pm\infty$, alors *f* n'est pas dérivable en *a*, mais la courbe de *f* présente une tangente verticale au point d'abscisse *a*.
- Si f' n'a pas de limite lorsque $x\mapsto a$, le théorème de permet pas de conclure.

Démonstration :

Soit $x \in I \setminus \{a\}$.

Selon le théorème des accroissements finis appliqué à *f* entre a et x (ce qui est possible car f est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,x]}$ et dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{]a,x[} \subset I \setminus \{a\}$), il existe $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{]a,x[}$ tel que $f(x) - f(a) = (x-a) f'(c_x)$.

Mais $c_x \xrightarrow[\substack{x \mapsto a \\ x \neq a}]{} a$ car $|c_x - a| \leq |x - a|$ puisque $c_x \in \underset{\leftrightarrow}{]a,x[}$.

De plus, $f'(u) \xrightarrow[\substack{u \mapsto a \\ u \neq a}]{} l$.

Donc, d'après le théorème de composition de limite, $f'(c_x) \xrightarrow[\substack{x \mapsto a \\ x \neq a}]{} l$

Or, $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \mapsto a \\ x \neq a}]{} l$.

Exemples :

Prenons $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Alors *f* est continue sur $\mathbb{R}$ (déjà vu), et est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.

Cependant, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \mapsto 0]{} 0$, donc *f* est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

(c'est simplement le cas où *f* est de classe D^1 mais pas de classe C^1)