Chapitre 12 : Fonctions circulaires réciproques

I La fonction Arcsin

A) Etude

Soit $\begin{array}{l} f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1;1] \\ \qquad x\mapsto\sin x\end{array}$.

Alors f est continue et strictement croissante, de plus $f(-\frac{\pi}{2})=-1$ et $f(\frac{\pi}{2})=1$.

Donc f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1;1]$.

B) Définition

Arcsin est la fonction de $[-1;1]$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ qui est la réciproque de la bijection $\begin{array}{l} f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1;1] \\ \qquad x\mapsto\sin x\end{array}$.

On a ainsi :

$$\boxed{\forall x\in[-1;1],\forall y\in\mathbb{R},(y=\mathrm{Arcsin}(x)\Leftrightarrow y\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\text{ et }\sin y=x)}$$

Ou :

$\mathrm{Arcsin}(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x.

C) Propriétés de la fonction Arcsin

Elles résultent des propriétés de la fonction $x\mapsto\sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et des théorèmes portant sur les fonctions réciproques des bijections continues et strictement monotones sur un intervalle :

- $\forall x\in[-1;1],-\frac{\pi}{2}\leq\mathrm{Arcsin}(x)\leq\frac{\pi}{2}$
- Arcsin est continue
- Arcsin est strictement croissante
- Arcsin est impaire (car $x\mapsto\sin x$ l'est sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$)

En effet :

Soit $x\in[-1;1]$.

Alors $-\mathrm{Arcsin}(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, et $\sin(-\mathrm{Arcsin}(x))=-\sin(\mathrm{Arcsin}(x))=-x$, donc $-\mathrm{Arcsin}(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est $-x$, c'est-à-dire que $-\mathrm{Arcsin}(x)=\mathrm{Arcsin}(-x)$.

- Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et de plus :

$$\boxed{\forall x\in]-1;1[,(\mathrm{Arcsin})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

En effet :

Soit $x\in]-1;1[$. Posons $\alpha=\mathrm{Arcsin}(x)$. Alors $\alpha\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, et $\sin\alpha=x$

Comme $\sin$ est dérivable en α, et $(\sin)'(\alpha)=\cos(\alpha)\neq 0$, Arcsin est dérivable en x et $(\text{Arcsin})'(x)=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Mais $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, et $\cos\alpha>0$.

Donc $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, et de plus $\sin\alpha=x$ donc $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$

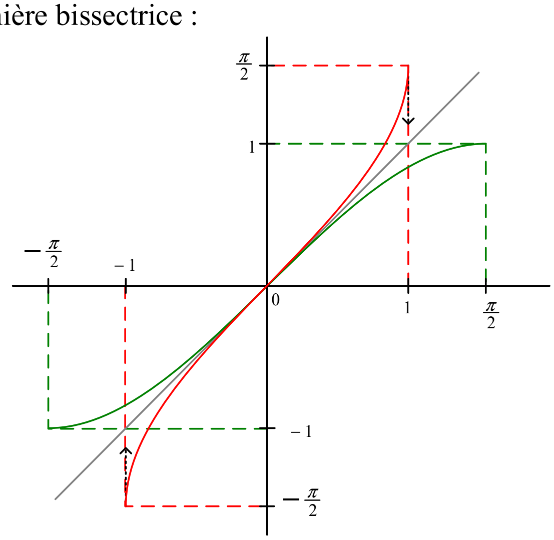
Donc finalement $(\text{Arcsin})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Donc Arcsin est bien dérivable sur $]-1;1[$, et sa dérivée sur $]-1;1[$ est $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, qui est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

Donc Arcsin est bien de classe C^∞ sur $]-1;1[$

- Arcsin n'est pas dérivable en -1 ni en 1, mais sa courbe présente aux points d'abscisses -1 et 1 une demi tangente verticale. En effet, Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et $(\text{Arcsin})'$ a une limite à gauche en 1 (respectivement à droite en -1) qui est $+\infty$, d'où le résultat avec le théorème liant limite de la dérivée et limite du taux d'accroissement.

- Enfin, la courbe représentative de Arcsin dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ se déduit de celle de $\sin$ restreint à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



La courbe est elle-même un résultat de cours, elle résume l'essentiel des points précédents. Noter aussi la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine.

II La fonction Arccos

A) Etude

La fonction $\underset{x\mapsto\cos x}{[0,\pi]\to[-1;1]}$ est une bijection continue et strictement croissante.

B) Définition

Arccos est la fonction de $[-1;1]$ dans $[0,\pi]$ qui est la réciproque de la bijection $\underset{x\mapsto \cos x}{[0,\pi]\to[-1;1]}$.

On a donc :

$\boxed{\forall x\in[-1;1], \forall y\in\mathbb{R}, (y=\text{Arccos}(x) \Leftrightarrow y\in[0,\pi] \text{ et } \cos y = x)}$

Ou :

$\text{Arccos}(x)$ est l'unique arc entre 0 et π dont le cosinus est x.

C) Propriétés de la fonction Arccos

- $\forall x\in[-1;1], 0\leq \text{Arccos}(x)\leq\pi$
- Arccos est continue
- Arccos est strictement décroissante
- Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et de plus :

$$\boxed{\forall x\in]-1;1[, (\text{Arccos})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

En effet :

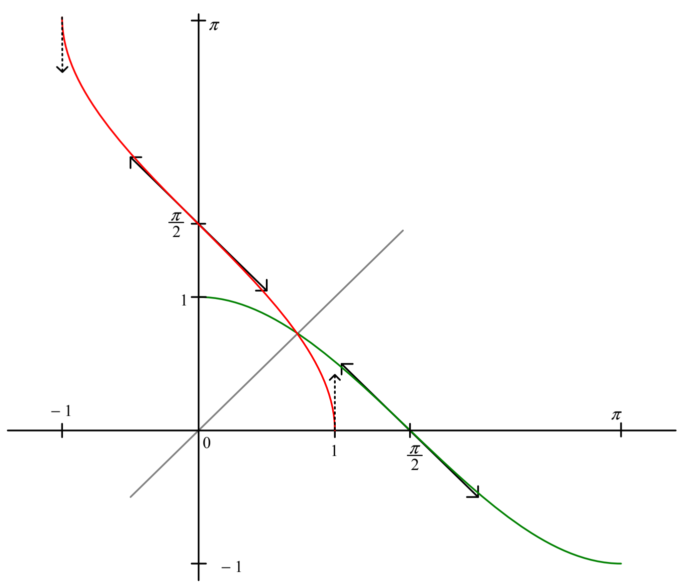
Soit $x\in]-1;1[$. Posons $\alpha=\text{Arccos}(x)$. Alors $\alpha\in]0,\pi[$, et $\cos\alpha = x$

Comme cos est dérivable en α, et $(\cos)'(\alpha)=-\sin(\alpha)\neq 0$, Arccos est dérivable en x et $(\text{Arccos})'(x)=\frac{1}{-\sin\alpha}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'où, comme pour Arcsin, Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

- Arccos n'est pas dérivable en -1 ni en 1, mais sa courbe présente aux points d'abscisses -1 et 1 une demi tangente verticale.

- La courbe représentative de Arccos dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ se déduit de celle de cosinus restreint à $[0,\pi]$ par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



- La fonction $\cos$ est paire sur $\mathbb{R}$, mais Arccos n'est pas paire (car $\cos$ n'est pas paire sur $[0,\pi]$!)

- En revanche, la courbe présente un centre de symétrie : le point de coordonnées $(0,\frac{\pi}{2})$. Cela se traduit par la formule : $\forall x\in[-1;1], \mathrm{Arccos}(x)+\mathrm{Arccos}(-x)=\pi$

Rappel :

La courbe de f présente un centre de symétrie en $A(x_0,y_0) \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ I est centré en x_0 et $\forall h\in\mathbb{R}, \left((x_0+h\in I)\Rightarrow \dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}=y_0\right)$

Démonstration :

Soit $x\in[-1;1]$.

Alors $\mathrm{Arccos}(x)\in[0,\pi]$ et $\cos(\mathrm{Arccos}(x))=x$

Donc π - $\mathrm{Arccos}(x)\in[0,\pi]$ et $\cos(\pi-\mathrm{Arccos}(x))=-\cos(\mathrm{Arccos}(x))=-x$

Donc $\pi-\mathrm{Arccos}(x)=\mathrm{Arccos}(-x)$ (car π - $\mathrm{Arccos}(x)\in[0,\pi]$)

- On déduit la courbe de Arccos de celle de Arcsin en opérant une symétrie orthogonale par rapport à Ox, puis une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{j}$, ce qui se traduit par la formule : $\forall x\in[-1;1], \mathrm{Arcsin}(x)+\mathrm{Arccos}(x)=\frac{\pi}{2}$ ($\mathrm{Arccos}(x)=(-\mathrm{Arcsin}(x))+\frac{\pi}{2}$)

Démonstration :

Soit $x\in[-1;1]$.

Alors $\mathrm{Arccos}(x)\in[0,\pi]$.

Donc $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arccos}(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, et :

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arccos}(x))&=\sin(\tfrac{\pi}{2})\cos(\mathrm{Arccos}(x))-\cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(\mathrm{Arccos}(x))\\&=1\times\cos(\mathrm{Arccos}(x))-0=x\end{aligned}$$

Donc $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arccos}(x)=\mathrm{Arcsin}(x)$

Soit $\mathrm{Arcsin}(x)+\mathrm{Arccos}(x)=\frac{\pi}{2}$.

III La fonction Arctan

A) Etude

La fonction $\begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\tan x\end{array}$ est une bijection continue et strictement croissante.

B) Définition

Arctan est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui est réciproque de la bijection précédente.

On a donc :

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},(y=\mathrm{Arctan}(x)\Leftrightarrow y\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\text{ et }\tan y=x)}$

Ou :

$\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est x.

C) Propriétés de la fonction Arctan

- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2}$
- Arctan est impaire.
- Arctan est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, et de plus :

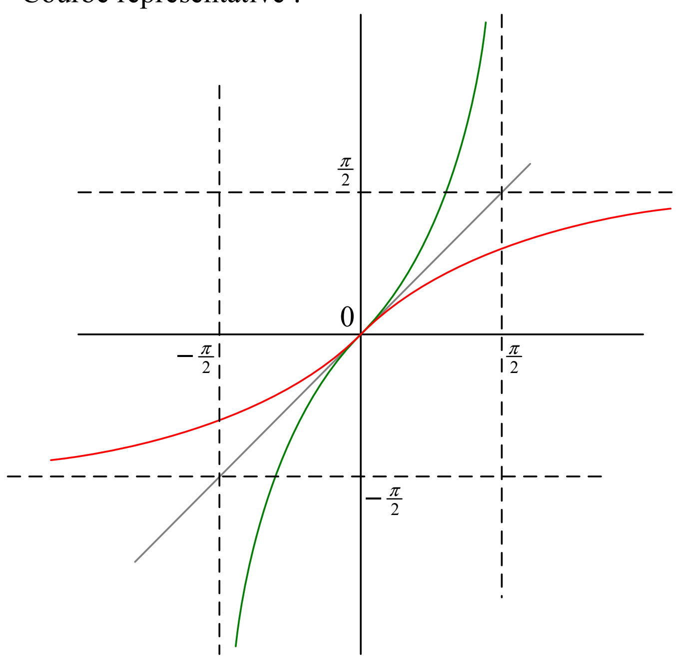
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, notons $\alpha = \text{Arctan}(x)$. Alors $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan \alpha = x$. Comme tan est dérivable en α et $\tan'(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha \neq 0$, Arctan est dérivable en x, et :

$$(\text{Arctan})'(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2}$$

- Courbe représentative :



- On a :

$\forall x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

$\forall x < 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons $\alpha = \text{Arctan}(x)$

Si $x > 0$:

Alors $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dfrac{1}{\tan \alpha} = \dfrac{1}{x}$.

Donc $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arctan}(\frac{1}{x})$, c'est-à-dire $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

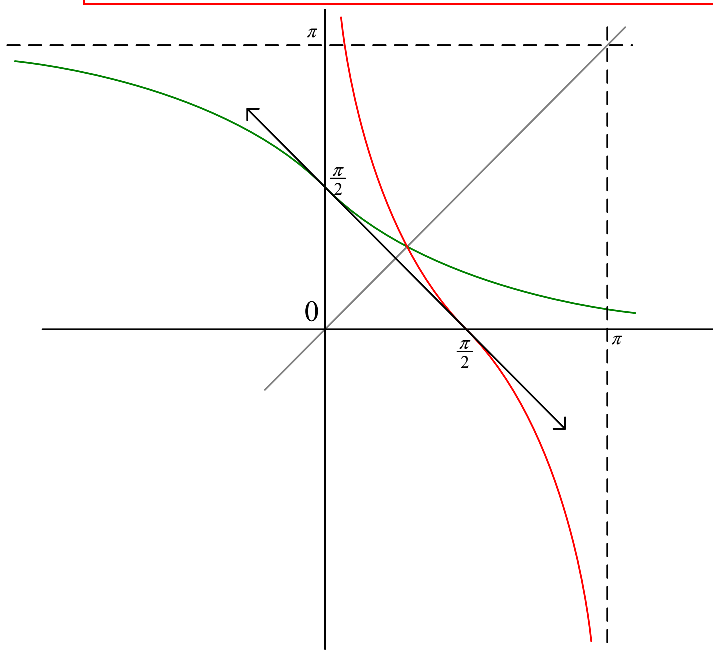
Si $x < 0$, alors $-x > 0$,

donc $\text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}(\frac{1}{-x}) = \frac{\pi}{2}$, soit $-\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ car Arctan est impaire, donc $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

IV La fonction Arccotan

Arccotan est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]0,\pi[$ qui est la réciproque de la bijection $\begin{array}{l}]0,\pi[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \text{cotan}(x)\end{array}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},(y=\text{Arccotan}(x)\Leftrightarrow y\in]0,\pi[\text{ et } \text{cotan}\, y=x)}$



- Arccotan est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{-\infty}\text{Arccotan}=\pi$ et $\lim\limits_{+\infty}\text{Arccotan}=0$
- Arccotan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},(\text{Arccotan})'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}}$
- On a :

$\forall x>0,\text{Arccotan}(x)+\text{Arccotan}(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$

$\forall x<0,\text{Arccotan}(x)+\text{Arccotan}(\frac{1}{x})=\frac{3\pi}{2}$

Démonstration :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Notons $\alpha=\text{Arccotan}(x)$

Si $x>0$:

Alors $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{\pi}{2}-\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$, et :

$$\text{cotan}(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\tan\alpha=\frac{1}{\text{cotan}\,\alpha}=\frac{1}{x}.$$

Donc $\frac{\pi}{2}-\alpha=\text{Arccotan}(\frac{1}{x})$, c'est-à-dire $\text{Arccotan}(x)+\text{Arccotan}(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$

Si $x<0$:

Alors $\alpha\in]\frac{\pi}{2},\pi[$. Donc $\frac{3\pi}{2}-\alpha\in]\frac{\pi}{2},\pi[$, et :

$$\text{cotan}(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{1}{\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=\tan\alpha=\frac{1}{\text{cotan}\,\alpha}=\frac{1}{x}$$

Donc $\frac{3\pi}{2}-\alpha=\text{Arccotan}(\frac{1}{x})$, soit $\text{Arccotan}(x)+\text{Arccotan}(\frac{1}{x})=\frac{3\pi}{2}$