Chapitre 7 : Rapides compléments sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

I Sur $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z} = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, lois +, ×, relation d'ordre ≤ connus.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Démonstration :

(1) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$.

1$^{\text{er}}$ cas : $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$. Alors A contient des éléments positifs, et par conséquent les majorants de A sont des éléments de $\mathbb{N}$, et $A \cap \mathbb{N}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. $A \cap \mathbb{N}$ admet donc un plus grand élément, disons x_0.

Alors x_0 est aussi le plus grand élément de A, puisqu'il est élément de A, et il est plus grand que les éléments positifs de A, et, étant positif, il est aussi plus grand que les éventuels éléments négatifs de A.

2$^{\text{ème}}$ cas : $A \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Dans ce cas, A est une partie non vide de $\mathbb{Z}_-^*$. Notons $B = \{-x, x \in A\}$. B est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, disons y_0. Il est alors clair que $-y_0$ est le plus grand élément de A.

(2) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$, et soit $B = \{-x, x \in A\}$.

Alors B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, donc B admet, d'après (1), un plus grand élément, disons y_0. Alors il est immédiat que $-y_0$ est le plus petit élément de A.

- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:
  Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :
  $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

Démonstration :

- Unicité : Si (q,r) et (q',r') conviennent, alors $b(q-q') = r'-r$, et $-|b| < r'-r < |b|$, d'où il résulte que $q - q' = 0$, puis $r'-r = 0$
- Existence :

1$^{\text{er}}$ cas : $a \geq 0$, $b > 0$: le couple (q,r) fourni par le théorème dans $\mathbb{N}$ convient.

2$^{\text{ème}}$ cas : $a < 0$, $b > 0$: selon le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ appliqué au couple $(-a,b)$, on peut introduire $(q_1,r_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $-a = bq_1 + r_1$ et $0 \leq r_1 < b$.

Alors $a = b(-q_1 - 1) + (b - r_1)$. Si $r_1 = 0$, le couple $(q,r) = (-q_1, 0)$ est comme voulu. Sinon, si $r_1 \geq 1$, le couple $(q,r) = (-q_1 - 1, b - r_1)$ convient.

3$^{\text{ème}}$ cas : $b < 0$; on applique ce qui précède au couple $(a,-b)$, il existe alors un couple $(q_1,r_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = (-b)q_1 + r_1$ et $0 \leq r_1 < -b$; le couple $(q,r) = (-q_1, r_1)$ convient.

II Sur $\mathbb{Q}$.

Théorème :

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe un et un seul couple $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$.