Chapitre 4 : Oscillateur harmonique

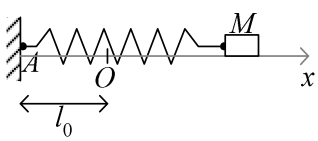
I Oscillateur harmonique à une dimension

A) Définition

On appelle oscillateur harmonique tout système physique à un paramètre $X(t)$ qui obéit à l'équation différentielle $\ddot{X}+\omega^2 X=0$ (avec ω constant)

Exemple :

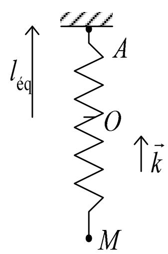
- Ressort horizontal



$x=\overline{OM}=l-l_0$

Il obéit à l'équation différentielle $m\ddot{x}+kx=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$

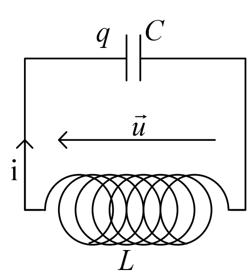
- Ressort vertical



$z=l_{\text{éq}}-l$; $\overline{OA}=l_{\text{éq}}=l_0+\frac{mg}{k}$

z obéit à l'équation différentielle $\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$

- Petits mouvements autour d'un équilibre stable
- Circuit LC



$u=\frac{q}{C}=-L\frac{di}{dt}$ et $i=\frac{dq}{dt}$

Donc $\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}=0 \Leftrightarrow q+LC\ddot{q}=0$

Analogie électromécanique :

Electrocinétique	Mécanique	
$q(t)$	$x(t)$	
$i = \dot{q}$	$v = \dot{x}$	
L	m	(Terme d'inertie)
$1/C$	k	

B) Description du mouvement

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

$$\Rightarrow X(t) = \alpha \cdot e^{i\omega t} + \beta \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= A\cos \omega.t + B\sin \omega.t$$

$$= C\cos(\omega.t + \varphi)$$

C est l'amplitude, ω la pulsation, φ la phase à l'origine.

C) Aspect énergétique

Ressort horizontal : $x(t) = C\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $\frac{k}{m} = \omega^2$

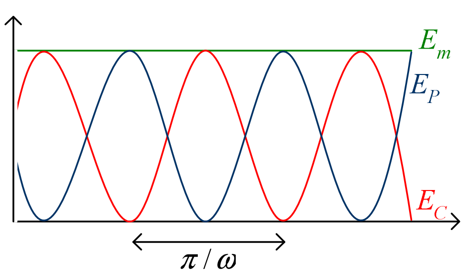
$$\dot{x}(t) = -C\omega \sin(\omega.t + \varphi)$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega.t + \varphi) = \frac{1}{2}mC^2\omega^2\cos^2(\omega.t + \varphi)$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mC^2\omega^2\sin^2(\omega.t + \varphi)$$

$$E_P + E_C = \frac{1}{2}mC^2\omega^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\omega^2$$



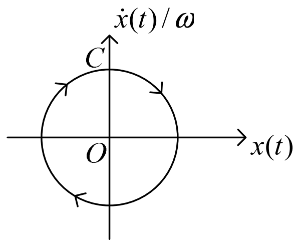
$\langle E_C \rangle$: moyenne de E_C sur un nombre entier de périodes.

$$E_P = \frac{1}{2} mC^2\omega^2 \cos^2(\omega.t+\varphi) = \frac{1}{2} mC^2\omega^2 \left(\frac{1-\cos(2(\omega.t+\varphi))}{2}\right) \text{ et } \langle \cos(2(\omega.t+\varphi)) \rangle = 0$$

Donc $\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} mC^2\omega^2 \times \frac{1}{2}$; ainsi, $\langle E_C \rangle = \langle E_P \rangle = \frac{1}{2}\langle E_m \rangle$

D) Portrait de phase

$$\begin{cases} x(t) = C\cos(-\omega.t-\varphi) \\ \dot{x}(t)/\omega = C\sin(-\omega.t-\varphi) \end{cases}$$

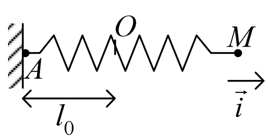


Portrait de phase : cercles concentriques

II Oscillateur périodique amorti (OHA)

A) Equation différentielle de l'oscillateur périodique amorti

1) Exemple mécanique



Forces :

$\vec{R} \perp \vec{i}$

$\vec{P}$

$\vec{T} = -k(l-l_0)\cdot\vec{i} = -kx\cdot\vec{i}$

$\vec{F} = -\mu\cdot\vec{v} = -\mu\cdot\dot{x}\cdot\vec{i}$ (frottement fluide)

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}+\vec{F} = m\vec{a}_{M/(R)}$

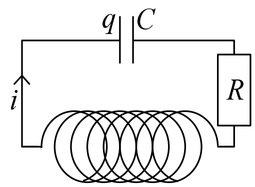
Projection sur $\vec{i}$: $m\ddot{x} = -kx-\mu\cdot\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x}+\frac{\mu}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x = 0$

On pose $2\lambda = \frac{\mu}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0 m}{\mu}$

L'équation différentielle devient donc :

$\ddot{x}+2\lambda\cdot\dot{x}+\omega_0^2 x = 0$ ou $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\cdot\dot{x}+\omega_0^2 x = 0$

2) Exemple électrocinétique



$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Leftrightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

C’est donc un oscillateur harmonique amorti avec

$$\lambda = \frac{R}{2L}\ ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ ; \quad Q = \frac{L\omega_0}{2}$$

Analogie électromécanique :

Electrocinétique	Mécanique
$q(t)$	$x(t)$
$i = \dot{q}$	$v = \dot{x}$
L	m
$1/C$	k
R	μ

B) Solutions de l’oscillateur périodique amortie

$$\ddot{X} + 2\lambda \cdot \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$$

1er cas : $\Delta > 0$ ($\lambda > \omega_0$, ou $Q < \frac{1}{2}$)

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$X(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

2ème cas : $\Delta = 0$ ($\lambda = \omega_0$, ou $Q = \frac{1}{2}$)

$$r = -\lambda$$

$$X(t) = e^{-\lambda . t}(At + B)$$

3ème cas : $\Delta < 0$ ($\lambda < \omega_0$, ou $Q > \frac{1}{2}$)

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = -4\omega^2$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\lambda \pm i\omega$$

$$X(t) = e^{-\lambda.t}(\alpha \times e^{-i\omega.t} + \beta \times e^{i\omega.t})$$
$$= e^{-\lambda.t}(A\cos\omega.t + B\sin\omega.t)$$
$$= Ce^{-\lambda t}\cos(\omega.t + \varphi)$$

Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Décrément logarithmique $\delta = \ln\dfrac{x(t)}{x(t+T)} = \lambda T$

Pour $Q >> 1$ (rappel)

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

C) Portrait de phase de l'oscillateur périodique amorti

Dépend du régime d'amortissement. Cas du régime pseudo-périodique avec amortissement faible ($Q >> 1$) :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega.t + \varphi)$$
$$\dot{x}(t) = -\lambda \cdot Ae^{-\lambda t}\cos(\omega.t + \varphi) - Ae^{-\lambda t} \times \omega \times \sin(\omega.t + \varphi)$$
$$= Ae^{-\lambda t}(-\lambda\cos(\omega.t + \varphi) - \omega \times \sin(\omega.t + \varphi))$$
$$Q >> 1 \Leftrightarrow \delta = \lambda T << 1 \Leftrightarrow \lambda << \omega$$

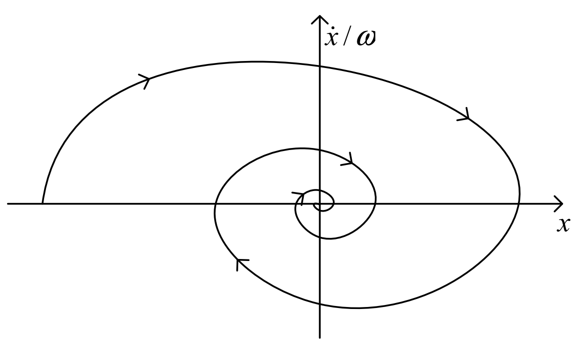
Donc $\dot{x}(t) \approx -A\omega e^{-\lambda t}\sin(\omega.t + \varphi)$

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega.t + \varphi) \\ \dot{x}(t)/\omega = -Ae^{-\lambda t}\sin(\omega.t + \varphi) \end{cases}$$

Soit $P(x; \dot{x}/\omega)$ dans le plan de phase

$$\rho_P = OP = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2} = Ae^{-\lambda t} \quad (A \geq 0)$$

$$\theta_P = (\vec{i}, \overrightarrow{OP}) = -\omega.t - \varphi$$



La trajectoire de phase est une spirale logarithmique. Le centre O du repère est un attracteur : quelles que soient les conditions initiales, l'oscillateur se rapproche de O.