Chapitre 11 : Système de deux particules

I Notation, définitions

A) Système de deux particules dans (R)

Soit $(R)=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient deux particules M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2.

On note :

$\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}$, $\vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2}$

$\vec{v}_1=\left.\dfrac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right|_{(R)}$, $\vec{v}_2=\left.\dfrac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right|_{(R)}$

$\vec{a}_1=\left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2}\right|_{(R)}$, $\vec{a}_2=\left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2}\right|_{(R)}$

1) Centre d'inertie du système de deux particules

G : barycentre – ou centre d'inertie – de masse de $\{(M_1,m_1),(M_2,m_2)\}$ est défini par :

$$m_1\overrightarrow{GM_1}+m_2\overrightarrow{GM_2}=\vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{OG}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{OM_1}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{OM_2}$$

2) Quantité de mouvement du système

Définition :

$$\begin{aligned}\vec{P}_{/(R)}&=\vec{p}_{1/(R)}+\vec{p}_{2/(R)}\\&=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\\&=m_1\left.\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right|_{(R)}+m_2\left.\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right|_{(R)}\\&=\left.\frac{d}{dt}\left(m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}\right)\right|_{(R)}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\vec{P}_{/(R)}=(m_1+m_2)\left.\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(R)}=(m_1+m_2)\vec{v}_G}$

Donc $\vec{P}$ coïncide avec la quantité de mouvement de G, barycentre du système, affecté de la masse totale $m=m_1+m_2$

3) Moment cinétique du système

Soit A un point quelconque de l'espace.
Définition :
Moment cinétique en A du système :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A/(R)} &= \vec{\sigma}^{(1)}_{A/(R)} + \vec{\sigma}^{(2)}_{A/(R)} \\ &= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2\end{aligned}}$$

Soit alors A' un autre point de l'espace. On a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A'/(R)} &= \overrightarrow{A'M_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{A'M_2} \wedge m_2\vec{v}_2 \\ &= \overrightarrow{A'A} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{A'A} \wedge m_2\vec{v}_2 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\vec{\sigma}_{A'/(R)} = \vec{\sigma}_{A/(R)} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{P}}$

4) Energie cinétique du système

Définition : $\boxed{E_{C/(R)} = E^{(1)}_{C/(R)} + E^{(2)}_{C/(R)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}$

B) Référentiel barycentrique

1) Définition

Le référentiel barycentrique (B^*) est défini par :
$(B^*) = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Ainsi, (B^*) est en translation par rapport à (R).

2) Grandeurs cinématiques dans (B^*)

$$\vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM_1}, \quad \vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2}$$

$$\vec{v}_1^* = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}\right|_{(B^*)}, \quad \vec{v}_2^* = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}\right|_{(B^*)}$$

Remarque : pour une translation, on a pour tout vecteur $\vec{A}$: $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(B^*)}$.

Ainsi :

$$\vec{v}_1^* = \left.\frac{d(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OG})}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right|_{(R)} - \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{v}_1 - \vec{v}_G$$

(et de même pour $\vec{v}_2^*$)

3) Quantité de mouvement du système dans (B*)

$$\begin{aligned}\vec{P}^* &= m_1\vec{v}_1{}^* + m_2\vec{v}_2{}^* \\ &= m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_G) + m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_G) \\ &= \vec{P} - (m_1 + m_2)\vec{v}_G \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

4) Moment cinétique du système dans (B*)

Soit A un point de l'espace. On a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A^* &= \vec{\sigma}_A^{(1)*} + \vec{\sigma}_A^{(2)*} \\ &= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1{}^* + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2{}^*\end{aligned}$$

Pour un autre point A' : $\boxed{\vec{\sigma}_{A'}^* = \vec{\sigma}_A^* + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{P}^* = \vec{\sigma}_A^*}$

Ainsi, le moment cinétique du système est indépendant du point d'application. Il est noté $\vec{\sigma}^*$, moment cinétique du système dans (B*).

On a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{G/(R)} &= \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{v}_2 \\ &= \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{v}_1{}^* + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{v}_G + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{v}_2{}^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{v}_G \\ &= \vec{\sigma}^* + \underbrace{(m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2})}_{=\vec{0}\text{ par définition de }G} \wedge \vec{v}_G\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\vec{\sigma}_{G/(R)} = \vec{\sigma}^*}$

1ère formule de Koenig :

Soit A un point de l'espace. On a :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{A/(R)} = \vec{\sigma}_{G/(R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{v}_G}$$

5) Energie cinétique du système dans (B*)

On a :

$$E_C^* = \frac{1}{2}m_1v_1^2{}^* + \frac{1}{2}m_2v_2^2{}^*$$

Donc :

$$\begin{aligned}E_C &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1{}^* + \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2{}^* + \vec{v}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1^2{}^* + \vec{v}_G^2 + 2\vec{v}_G.\vec{v}_1) + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2^2{}^* + \vec{v}_G^2 + 2\vec{v}_G.\vec{v}_2)\end{aligned}$$

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^2 + \underbrace{(m_1\vec{v}_1^{\,*} + m_2\vec{v}_2^{\,*})}_{=\vec{P}^*=\vec{0}}.\vec{v}_G$$

D'où la deuxième formule de Koenig :

$$\boxed{E_C = E_C^* + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^2}$$

II Application des théorèmes de la dynamique au système

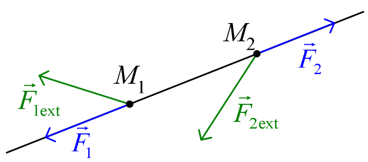
A) Présentation du problème

On suppose (R) galiléen.

Soit M_1 soumis à $\vec{F}_{1\text{ext}}$ (forces extérieures au système) et $\vec{F}_{2\to1}$ notée $\vec{F}_1$ exercée par M_2 sur M_1.

Soit M_2 soumis à $\vec{F}_{2\text{ext}}$ (forces extérieures au système) et $\vec{F}_{1\to2}$ notée $\vec{F}_2$.

On suppose de plus ici que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ obéissent à la version forte de la loi de l'action et de la réaction, c'est-à-dire : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (version faible, toujours vraie) et $\vec{F}_1 \,//\, \overrightarrow{M_1M_2}$.



On suppose enfin que $\|\vec{F}_1\|$ $(= \|\vec{F}_2\|)$ ne dépend que de r avec $r = M_1M_2$.

Ainsi, en notant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$, on pose $\vec{F}_2 = F(r)\vec{u}_r$ (et $\vec{F}_1 = -F(r)\vec{u}_r$)

B) Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M_1 et M_2.

Dans (R) galiléen :

$$m_1\left.\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right|_{(R)} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}} \text{ et } m_2\left.\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right|_{(R)} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}}$$

D'où, en sommant : $\underbrace{m_1\left.\dfrac{d\vec{v}_1}{dt}\right|_{(R)} + m_2\left.\dfrac{d\vec{v}_2}{dt}\right|_{(R)}}_{\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{(R)}} = \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{=\vec{0}} + \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}$

Donc $\boxed{(m_1+m_2)\left.\dfrac{d\vec{v}_G}{dt}\right|_{(R)} = \left.\dfrac{d\vec{P}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}}$

(Théorème de la résultant cinétique).

Les forces intérieures n'interviennent pas. C'est comme si G de masse $m = m_1 + m_2$ était soumis à $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}$.

C) Théorème du moment cinétique

O est fixe dans (R) galiléen.

Le théorème du moment cinétique appliqué en O à M_1 dans (R) donne :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O^{(1)}}{dt}\right|_{(R)} = \overrightarrow{OM_1} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}})$$

et à M_2 : $\left.\dfrac{d\vec{\sigma}_O^{(2)}}{dt}\right|_{(R)} = \overrightarrow{OM_2} \wedge (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}})$.

D'où :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right|_{(R)} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}}$$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}_{\overrightarrow{M_1M_2}} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}}$$

Or, $\vec{F}_2 \mathbin{//} \overrightarrow{M_1M_2}$

Donc $\boxed{\left.\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right|_{(R)} = \underbrace{\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{2\text{ext}}}_{\text{moment en } O \text{ des forces extérieures}}}$

D) Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à M_1 dans (R) donne :

$$\left.\frac{dE_{C_1}}{dt}\right|_{(R)} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{1\text{ext}}).\vec{v}_1$$

et à M_2 : $\left.\dfrac{dE_{C_2}}{dt}\right|_{(R)} = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{2\text{ext}}).\vec{v}_2$

Donc $\boxed{\left.\dfrac{dE_C}{dt}\right|_{(R)} = \underbrace{\vec{F}_{1\text{ext}}.\vec{v}_1 + \vec{F}_{2\text{ext}}.\vec{v}_2}_{P_{\text{ext}}} + \underbrace{\vec{F}_1.\vec{v}_1 + \vec{F}_2.\vec{v}_2}_{P_{\text{int}}}}$

$$P_{\text{int}} = -\vec{F}_2.\vec{v}_1 + \vec{F}_2.\vec{v}_2 = \vec{F}_2.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_2.\left.\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})\right|_{(R)} = \vec{F}_2.\left.\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right|_{(R)}$$

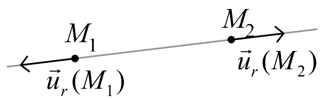
Pour un système rigide : $M_1M_2 = \text{cte}$

Donc $\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} = \text{cte}$; $2\overrightarrow{M_1M_2}.\dfrac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = 0$

Donc $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \dfrac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}$.

Les forces intérieures ne travaillent pas dans un système rigide.

E) Energie potentielle d'interaction



$$\vec{u}_r(M_2) = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2} \text{ et } \vec{u}_r(M_1) = \frac{\overrightarrow{M_2M_1}}{M_2M_1} = -\vec{u}_r(M_2)$$

$$\vec{F}_2 = F(r)\vec{u}_r(M_2)$$

On définit E_p^* (à une constante additive près) par $F(r) = \frac{-dE_p^*}{dr}$ (on suppose F intégrable)

Ainsi, $\vec{F}_2 = \frac{-dE_p^*}{dt}\vec{u}_r(M_2)$ ou $\vec{F}_1 = \frac{-dE_p^*}{dt}\vec{u}_r(M_1)$

E_p^* est l'énergie potentielle d'interaction entre les deux particules.

Par exemple, pour la force gravitationnelle : $E_p^* = -\frac{Gm_1m_2}{M_1M_2}$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$dE_C = P_{\text{ext}}dt + P_{\text{int}}dt$$

$$P_{\text{int}} = \vec{F}_2 . \left.\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right|_{(R)}$$

Donc $\delta W_{\text{int}} = P_{\text{int}}dt = F(r)\vec{u}_r(M_2).d(r.\vec{u}_r(M_2))$

Or, $\frac{d(\vec{u}_r^2)}{dt} = 2\vec{u}_r.\frac{d(\vec{u}_r)}{dt} = 0$

Donc $\delta W_{\text{int}} = F(r)dr = -dE_p^*$

Donc $dE_C = P_{\text{ext}}dt - dE_p^*$, soit $\boxed{d(E_C + E_p^*) = \delta W_{\text{ext}}}$.

Ou alors, d'après la deuxième formule de Koenig :

$$\boxed{d(\underbrace{E_C^* + E_p^*}_{U}) + d(\underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{E_{\text{macro}}}) = \delta W_{\text{ext}}}$$

(On retrouve le premier principe de la thermodynamique, en ayant regroupé δW et δQ sous δW_{ext})

III Système isolé de deux particules

On reprend les conditions du paragraphe précédent, en considérant que $\vec{F}_{1\text{ext}} = \vec{F}_{2\text{ext}} = \vec{0}$. (Ainsi, le système est isolé)

A) Théorème de la résultante cinétique

Théorème de la résultant cinétique appliqué au système :

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{(R)} = m\left.\frac{d\vec{v}_G}{dt}\right|_{(R)} = \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}} = \vec{0}$$

Donc $\vec{v}_G = \overrightarrow{\text{cte}}$. Donc G décrit un mouvement rectiligne uniforme :

$\vec{v}_G(t) = \vec{v}_G(0)$

$\overrightarrow{OG}(t) = \overrightarrow{OG}(0) + \vec{v}_G(0)\times t$

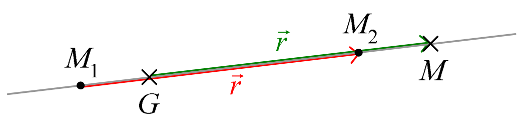
Donc (B^*) est aussi galiléen (lorsque le système est isolé)

B) Réduction du problème à deux corps – mobile fictif

On définit le vecteur position relative de M_2 par rapport à M_1 :

$\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \vec{r}_2{}^* - \vec{r}_1{}^*$.

On définit un point M, mobile fictif ou réduit par : $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = \overrightarrow{GM}$



On a : $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow m_1(\vec{r}_2{}^* - \vec{r}) + m_2\vec{r}_2{}^* = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_2{}^* = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$

Et $\vec{r}_1{}^* = \vec{r}_2{}^* - \vec{r} = \dfrac{-m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$

- Quantité de mouvement de M_2 dans (B^*) :

$$\vec{P}^{*(2)} = m_2\vec{v}_2{}^* = m_2\frac{d\vec{r}_2{}^*}{dt} = m_1\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right|_{(B^*)}}_{\vec{v}}$$

On pose $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$: masse réduite/ masse du mobile fictif

Ainsi, $\vec{P}^{*(2)}$ s'apparente à la quantité de mouvement de $M(\mu)$ dans (B^*).

- Moment cinétique barycentrique :

$\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{v}_1{}^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{v}_2{}^*$

Or, $m_1\vec{v}_1{}^* = -m_2\vec{v}_2{}^*$ car $\vec{P}^{*(1)} + \vec{P}^{*(2)} = \vec{0}$

Donc $\vec{\sigma}^* = (-\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2\vec{v}_2{}^* = \overrightarrow{GM} \wedge \mu\vec{v} = \vec{\sigma}_{M/(B^*)}$

$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_{M/(B^*)}$ (moment cinétique du mobile fictif dans (B^*))

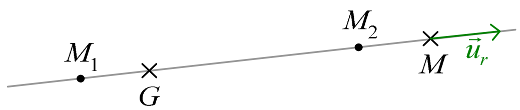
- $E_C^* = \dfrac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \dfrac{1}{2}m_2v_2^{*2} = \dfrac{1}{2m_1}(m_1^2v_1^{*2}) + \dfrac{1}{2m_2}(m_2^2v_2^{*2})$

$$= \frac{1}{2m_1}\mu^2v^2 + \frac{1}{2m_2}\mu^2v^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_2+m_1}{m_2m_1}}_{1/\mu}\mu^2v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 = E_C(M) \text{ dans } (B^*)$$

C) Mouvement du mobile fictif

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M_2 dans (B*) galiléen :

$$\left.\frac{d\vec{P}_2^*}{dt}\right|_{(B^*)} = \vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}_2$$



$\vec{P}_2^* = \mu.\vec{v}$ et $\vec{F}_2 = F(r)\vec{u}_r$ avec $r = M_1M_2 = GM$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2} = \dfrac{\overrightarrow{GM}}{GM}$

Donc

$$\mu\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{(B^*)} = F(r)\vec{u}_r$$

Donc $M(\mu)$ est soumis à une force $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$, centrale.

Le théorème des moments cinétiques appliqué au système dans (B*) galiléen en G fixe dans (B*) donne :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{G/(B^*)}}{dt}\right|_{(B^*)} = \vec{M}_G(\vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{F}_{2\text{ext}}) = \vec{0} \text{ (on travaille dans un système isolé)}$$

Donc $\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{\text{cte}} = \vec{r} \wedge \mu.\vec{v}$

Donc M décrit un mouvement plan, qui obéit à la loi des aires.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système dans (B*) galiléen donne :

$$dE_C = \delta W_{\text{int}}$$

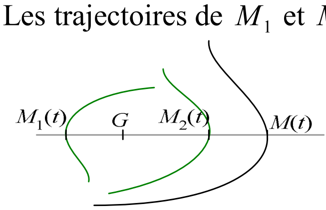
$$\delta W_{\text{int}} = -dE_p^* \text{ avec } \frac{dE_p^*}{dt} = -F(r)$$

Donc $d(E_p^* + E_C^*) = 0$, ou $E_m^* = \dfrac{1}{2}\mu.v^2 + E_p^*(r) = \text{cte}$

D) Mouvement de M_1 et M_2 dans (B*)

$$\vec{r}_1{}^* = \overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m}\overrightarrow{GM} \text{ et } \vec{r}_2{}^* = \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{GM} \text{ avec } m = m_1 + m_2$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 sont donc homothétiques de la trajectoire de M.



E) Application

On considère un système de deux masses $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ en interaction gravitationnelle. Par exemple :

$M_1 =$ Soleil, masse m_s

$M_2 =$ Terre, masse m_T

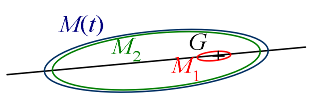
On suppose le système isolé. On note G le centre de masse de $\{T, S\}$. On définit le mobile fictif par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{SR}$ de masse $\mu = \dfrac{m_T m_s}{m_T + m_s}$. On note enfin $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{GM}}{GM} = \dfrac{\overrightarrow{ST}}{ST}$.

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à $M(\mu)$ dans (B^*) galiléen :

$$\mu \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{(B^*)} = \vec{F}_{S\to T} = \frac{-Gm_s m_T}{ST^2}\vec{u}_r = \frac{-G(m_s + m_T)\dfrac{m_s m_T}{m_s + m_T}}{ST^2}\vec{u}_r = \frac{-G(m_s + m_T)\mu}{GM^2}\vec{u}_r$$

Tout se passe donc comme si $M(\mu)$ est soumis à la force gravitationnelle exercée par G de masse $m_s + m_T$. Donc M décrit une ellipse de foyer G et obéit à la loi des aires. La troisième loi de Kepler donne alors : $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G(m_s + m_T)}{4\pi^2}$ (m_T correspond à un terme correctif par rapport au résultat lorsque on fait l'approximation que le référentiel héliocentrique est galiléen).

Le mouvement de M_2 par rapport à M_1 est le même que celui de M par rapport à G.



Remarque : si on suppose $m_1 >> m_2$

(exemple : $m_s = 2{,}0.10^{30}\,\text{kg} >> m_T = 6.10^{24}\,\text{kg})$)

Alors :

$$\overrightarrow{GM_1} = \underbrace{\frac{-m_2}{m_1 + m_2}}_{<<1}\overrightarrow{GM}, \text{ d'où } GM_1 << r \text{ ou } G \approx M_1$$

$m_1 + m_2 \approx m_1$, d'où $G(m_1 + m_2) \approx M(m_1)$

et :

$$\overrightarrow{GM_1} = \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{\approx 1}\overrightarrow{GM}, \text{ d'où } M \approx M_1$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2, \text{ d'où } M(\mu) \approx M_2(m_2)$$