Exercice – Soit n un entier naturel.
Montrer que les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x))$ et $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(n \operatorname{argch} x)}{\sqrt{x^2-1}}$ sont des fonctions polynomiales.

Une idée : démontrer les deux propriétés dans le même temps.
Hypothèse de récurrence (H_n) : Il existe des polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x)) = P_n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{sh}(n \operatorname{argch} x)}{\sqrt{x^2-1}} = Q_n(x).$$

H_1 et H_2 sont faciles à vérifier, on trouve :

$$P_1(X) = X, \;\; Q_1(X) = 1, \;\; P_2(X) = 2X^2+1, \;\; Q_2(X) = 2X.$$

Ensuite, il faut supposer l'hypothèse vérifiée jusqu'au rang $n \geqslant 2$.
Partant du fait que :

$$\operatorname{ch}((n+1) \operatorname{argch} x) = \operatorname{ch} \operatorname{argch} x \operatorname{ch}(n \operatorname{argch} x) + \operatorname{sh} \operatorname{argch} x \operatorname{sh}(n \operatorname{argch} x)$$

On trouve :

$$\operatorname{ch}((n+1) \operatorname{argch} x) = x P_n(x) + \sqrt{x^2-1} \left[\sqrt{x^2-1} Q_n(x)\right]$$

Ce qui permet d'exprimer le polynôme $P_{n+1}(x)$.
On en fait autant pour $\operatorname{sh}((n+1) \operatorname{argch}(x))$...
Il reste enfin à emballer correctement la récurrence, autrement dit : la réaliser dans toute son ampleur !