Polynômes et matrices

Jean-Michel Sarlat
25 mars 2003

Ce document a été généré par la ***fabrique de Syracuse*** *à partir d'un fichier texte contenant des spécifications de contenu et des commandes d'interfaçage avec* ***Maxima****. Le traitement de ce fichier a donné lieu, dans le même temps que ce document, à la création d'une page* html.
URL : http ://melusine.eu.org/syracuse/maxima/

1 Énoncé

On considère les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout polynôme réel $P = a_n X^n + .. + a_1 X + a_0$ on pose $P(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 I$.

1/ Soit $P = X^3 + X^2 - X - 1$.

a) Factoriser P dans $\mathbf{R}[X]$.

b) Vérifier que $P(A) = 0$, en déduire deux diviseurs de zéro dans l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices 3×3 à coefficients réels.

2/ On pose

$$Q = \frac{1}{4}(X^2 + 2X + 1) \text{ et } R = -\frac{1}{4}(X^2 + 2X - 3) \text{ et } S = -\frac{1}{4}(X^3 + 3X^2 - X - 3)$$

$$B = Q(A),\ C = R(A),\ D = S(A)$$

a) Calculer les matrices B, C et D.

b) Calculer $B - C + D$.

c) Calculer les produits B^2, C^2, D^2, BC, CB, BD, DB, CD, DC.

3/ a) Montrer qu'un polynôme $G = aX^2 + bX + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) est nul si, et seulement si

$$\tilde{G}(1) = \tilde{G}(-1) = \tilde{G}'(-1) = 0$$

b) Montrer que le polynôme P de la question **1**/ divise un polynôme H si, et seulement si

$$\tilde{H}(1) = \tilde{H}(-1) = \tilde{H}'(-1) = 0$$

c) Montrer que pour tout polynôme T, on a $T(A) = \tilde{T}(1)B + \tilde{T}(-1)C + \tilde{T}'(-1)D$.

d) Appliquer le résultat précédent aux polynômes $T = X$, $T = X^2$ puis $T = X^n$ ($n \in \mathbf{N}$).

Les calculs qui suivent répondent aux questions posées ou viennent appuyer les démonstrations.

2 Calculs

```
(C2) load("polymat.mc")$
```

```
(C3) A:matrix([0,0,1],[1,0,1],[0,1,-1]);
```

(D3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
(C4) P:X^3+X^2-X-1$
```

```
(C5) P1:factor(P);
```

(D5) $$(X-1)\,(X+1)^2$$

```
(C6) polymat(P,A);
```

(D6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(C7) block(A1:polymat(part(P1,1),A),A2:polymat(part(P1,2),A),[A1,A2]);
```

(D7) $$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

```
(C8) A1 . A2;
```

(D8) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(C9) Q:1/4*(X^2+2*X+1)$
```

```
(C10) B:polymat(Q,A);
```

(D10) $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

```
(C11) R:-1/4*(X^2+2*X-3)$
```

```
(C12) C:polymat(R,A);
```

(D12) $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

```
(C13) S:-1/4*(X^3+3*X^2-X-3)$
```

```
(C14) D:polymat(S,A);
```

(D14) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

```
(C15) B-C+D;
```

(D15) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

```
(C16) B^^2;
```

(D16) $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

```
(C17) C^^2;
```

(D17) $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

```
(C18) D^^2;
```

(D18) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(C19) B . C;
```

(D19) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(C20) C . D;
```

(D20) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
(C21) D . B;
```

(D21) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(C22) load("ordpoly.mc")$

(C23) block([a1,b1,c1],ordpoly((a1+b1+c1)*Q+(a1-b1+c1)*R+(-2*a1+b1)*S-(a1/2-b1/4)*P));
```

(D23) $$A_1\,X^2 + B_1\,X + C_1$$