Détermination d'un polynôme P tel que $P(\mathrm{ch}\,\theta) = \mathrm{ch}(12\theta)$

Première méthode

Nous pouvons *anticiper* les calculs à partir de l'égalité

$$\mathrm{ch}(12\theta) = \frac{(\mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta)^{12} + (\mathrm{ch}\,\theta - \mathrm{sh}\,\theta)^{12}}{2}$$

Dans la somme qui est au numérateur les termes comportant une puissance impaire de $\mathrm{sh}\,\theta$ disparaîtront et l'on pourra substituer $\mathrm{ch}^2\theta - 1$ à $\mathrm{sh}^2\theta$ dans ce qui reste. Cela aura pour effet de faire complètement disparaître $\mathrm{sh}\,\theta$ et de laisser la place au polynôme que l'on recherche.
Pour la commodité des écritures nous allons poser $X = \mathrm{ch}\,\theta$ et $Y = \mathrm{sh}\,\theta$.

```
> P:1/2*((X+Y)^12+(X-Y)^12);
```

$$\frac{(Y+X)^{12} + (X-Y)^{12}}{2}$$

Développons :

```
> P:expand(P);
```

$$Y^{12} + 66\,X^2\,Y^{10} + 495\,X^4\,Y^8 + 924\,X^6\,Y^6 + 495\,X^8\,Y^4 + 66\,X^{10}\,Y^2 + X^{12}$$

Substituons X^2-1 à Y^2 :

```
> P:ratsubst(X^2-1,Y^2,P);
```

$$2048\,X^{12}-6144\,X^{10}+6912\,X^8-3584\,X^6+840\,X^4-72\,X^2+1$$

Nous avons le polynôme recherché.

Deuxième méthode

Sans passer par la formule du binôme à l'ordre 12 qui a été implicitement utilisée dans la méthode précédente, nous pouvons *composer* des polynômes, en remarquant :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}2\theta &= 2\operatorname{ch}^2\theta-1\\ \operatorname{ch}3\theta &= 4\operatorname{ch}^3\theta-3\operatorname{ch}\theta\\ \operatorname{ch}12\theta &= \operatorname{ch}3(2(2\theta))\end{aligned}$$

Ainsi si $P_2=2X^2-1$ et $P_3=4X^2-3X$ alors $P=P_{12}=P_3(P_2(P_2(X)))$.

```
> P_2(X):=2*X^2-1;
```

```
P_2(X):=2*X^2-1;
```

```
> P_3(X):=4*X^3-3*X;
```

P_3(X):=4*X^3-3*X;

```
> P:P_3(P_2(P_2(X)));
```

$$4\left(2\left(2X^2-1\right)^2-1\right)^3-3\left(2\left(2X^2-1\right)^2-1\right)$$

Développons :

```
> expand(P);
```

$$2048X^{12}-6144X^{10}+6912X^8-3584X^6+840X^4-72X^2+1$$

Si l'on devait effectuer les calculs *à la main*, cette méthode serait, peut-être, la plus rapide.

D'après *exercice 2* – P.O.X., Ellipses, 1988