

Images dans un miroir sphérique

20 juillet 2008

Table des matières

1	Objectifs	1
2	Description du phénomène	2
3	Présentation du problème théorique	2
4	Vision dans une boule de jardin	5
5	Images de Tangente	6

1 Objectifs

On voit souvent dans les villes, lorsque la visibilité à la sortie d'un garage ou à un carrefour est insuffisante, ou bien dans certains magasins pour des motifs de surveillance, des miroirs bombés donnant de l'environnement un panorama très large. On peut prendre aussi une boule argentée ou dorée que l'on suspend aux branches des sapins de Noël, pour voir le décor se réfléchir dans la boule avec une distorsion bien particulière.

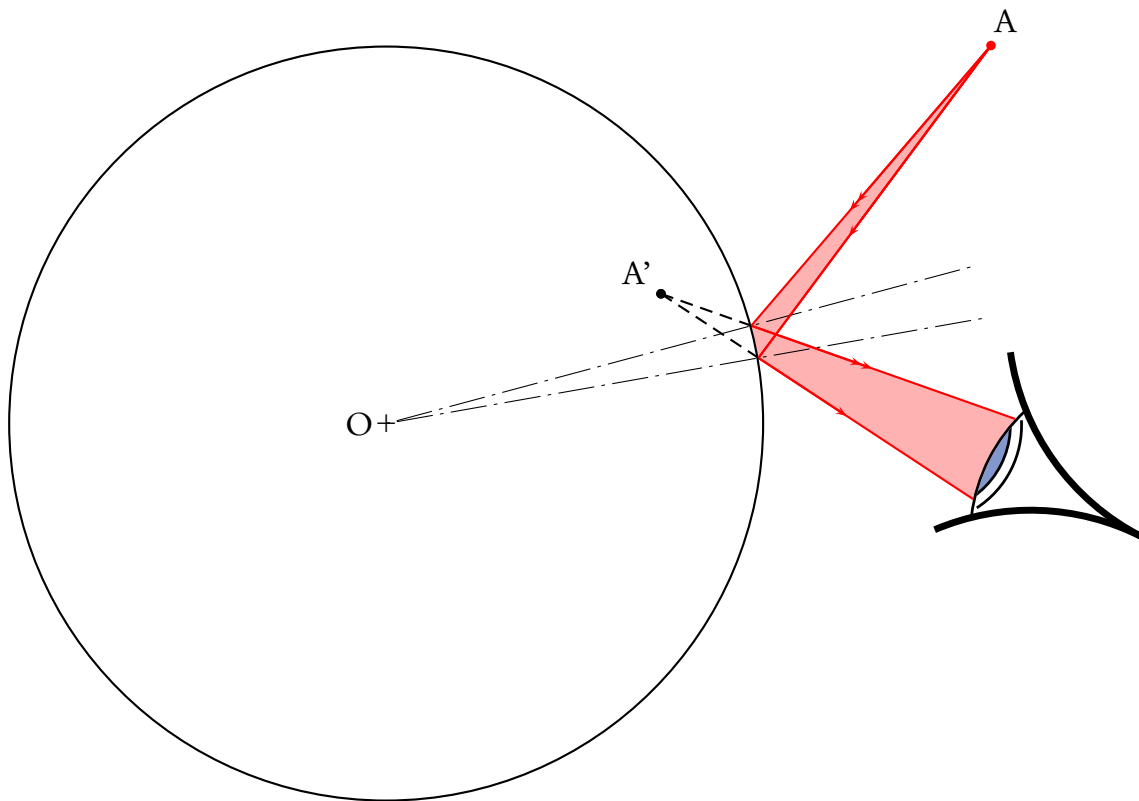
Les Égyptiens et les Phéniciens fabriquaient des miroirs en verre et d'après Pline, cité par Louis Figuiet dans son livre *Les merveilles de l'industrie*, c'est en Phénicie que furent inventés les miroirs de verre : « ils sont circulaires et ont 5 à 6 centimètres de diamètre. Leur face extérieure est légèrement convexe ».

Dans le numéro 706 (daté du 15 au 31 décembre 1995) de *Textes et documents pour la classe (TDC)*, SABINE MELCHIOR-BONNET nous donne quelques détails sur la technique de fabrication des "miroirs de sorcières" :

Les miroirs de verre qu'évoquent quelques auteurs du Moyen Âge sont de petits miroirs bombés, de médiocre qualité, mais déjà jugés supérieurs aux miroirs de métal. Ce sont ces miroirs, appelés *miroirs de sorcières*, que représentent les tableaux flamands : celui qui est posé sur la table du Prêteur et sa femme, 1514, de Quentin Metsys, celui qui pend au mur de la chambre du Mariage de Giovanni Arnolfini, 1434, de Jan van Eyck ; c'est aussi dans un miroir bombé que se mire, fascinée, la licorne de l'allégorie de la vue dans la tapisserie La Dame à la licorne... Pas plus grands qu'une soucoupe et toujours bombés, ils déforment l'image. Ces miroirs étaient fabriqués en soufflant une boule de verre fixée à un pointil et à laquelle était imprimée une rotation rapide :

le verre s'évase alors en une sorte de plateau dans lequel on peut découper de petits carreaux. Pour obtenir un miroir, il fallait ensuite pratiquer l'étamage, c'est-à-dire appliquer du plomb à froid dans la partie concave. Cette dernière opération a évolué lentement. On a d'abord remplacé le plomb par l'étain puis, au début du XVI^e siècle, les miroitiers ont utilisé le mercure, comme semble l'indiquer le grand trafic de vif-argent transitant alors par Anvers. »

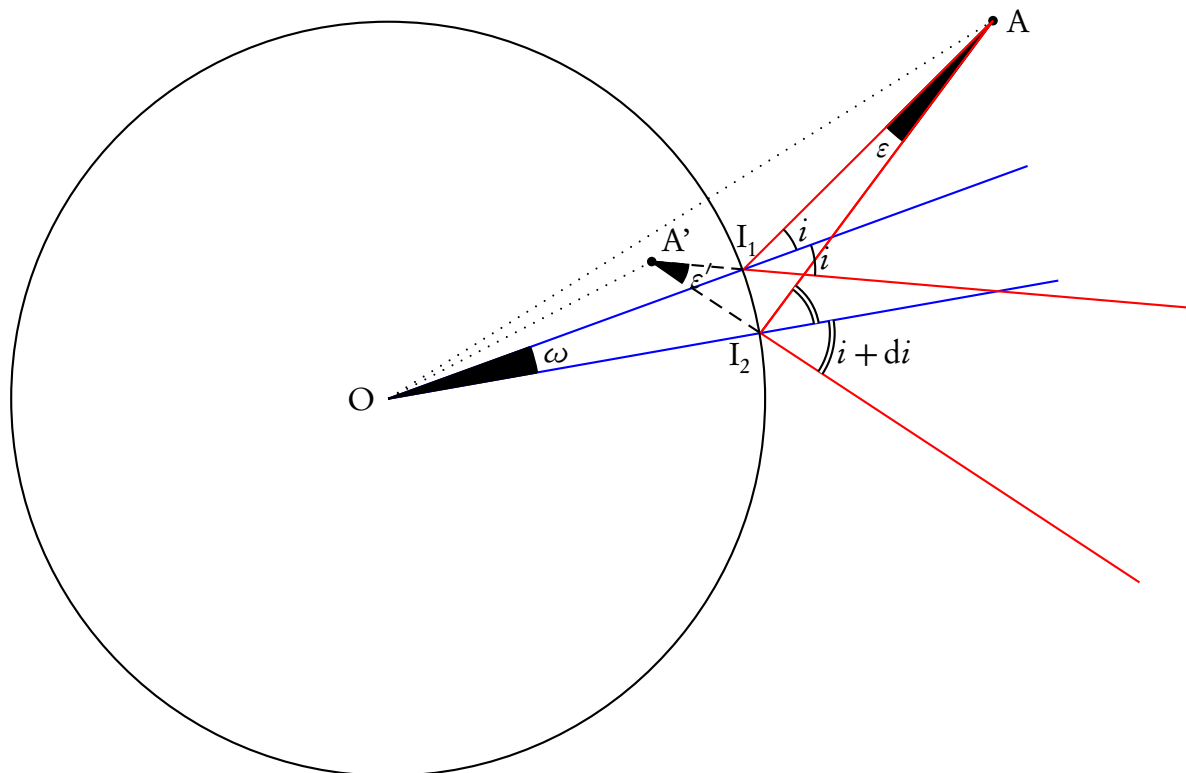
2 Description du phénomène



On considère un point lumineux A émettant des rayons lumineux dans toutes les directions et on isole, par la pensée, un mince pinceau lumineux qui après réflexion sur le miroir pénètre par la pupille dans l'œil d'un observateur. L'œil ne « voit » pas les lignes brisées et interprète les rayons qu'il reçoit comme s'ils venaient tout droits. L'observateur voit A' que nous appelons image de A par le miroir.

3 Présentation du problème théorique

Le problème est de construire les rayons incidents et réfléchis en suivant les lois de la réflexion et, connaissant la position de A , de calculer la position de l'image A' .



Il s'agit d'étudier la réflexion d'un mince pinceau conique émis par A se réfléchissant sur le miroir sphérique et qui pénétrera dans l'œil de l'observateur. C'est un problème très complexe qui a été abordé dans sa généralité par Henri Bouasse dans son livre : *Optique supérieure*, paru en 1917 aux éditions Delagrave.

Le point lumineux A , quel qu'il soit, est dans le plan du grand cercle de la sphère défini par OI_1A . Je donne le début de cette étude théorique, qui est une adaptation des pages 108 et suivantes de son livre, sans la développer jusqu'à son terme, car comme l'indique Henri Bouasse lui-même « *Le problème est généralement inextricable, sauf dans le cas où la symétrie du système indique quels rayons il faut regrouper après réflexion* ».

La démonstration de Henri Bouasse, extraite de son livre :

Afin d'apprécier la difficulté du problème, on considère d'abord les limites du pinceau dans ce plan, c'est à dire sur l'arc $\widehat{I_1I_2}$.

Les angles sont exagérément grands pour des raisons de clarté.

Dans le triangle OI_1A ,

$$i = \widehat{I_1OA} + \widehat{OAI_1}$$

Dans le triangle OI_2A ,

$$\begin{aligned} i + di &= \widehat{I_2OA} + \widehat{OAI_2} \\ &= \widehat{I_2OI_1} + \widehat{I_1OA} + \widehat{OAI_1} + \widehat{I_1AI_2} \\ &= \omega + \widehat{I_1OA} + \widehat{OAI_1} + \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit :

$$di = \omega + \varepsilon \quad (1)$$

Dans le triangle OI_1A'

$$i = \pi - (\widehat{I_1OA'} + \widehat{OA'I_1})$$

Dans le triangle OI_2A'

$$\begin{aligned} i + di &= \pi - (\widehat{I_2OA'} + \widehat{OA'I_2}) \\ &= \pi - \left((\widehat{I_2OI_1} + \widehat{I_1OA'}) + (\widehat{OAI'_1} - \widehat{I_1A'I_2}) \right) \\ &= \pi - \left((\omega + \widehat{I_1OA'}) + (\widehat{OA'I_1} - \varepsilon') \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$di = -\omega + \varepsilon' \quad (2)$$

En rapprochant (1) et (2) :

$$\omega + \varepsilon = -\omega + \varepsilon' \iff 2\omega = \varepsilon' - \varepsilon \quad (3)$$

En se rappelant qu'en réalité ε , ε' et ω sont de petits angles, on établit les relations suivantes, en posant :

$$\begin{aligned} t &= AI_1 \text{ et } t' = A'I_1 \\ ds = \widehat{I_1I_2} &= R\omega = \frac{t\varepsilon}{\cos i} = \frac{t'\varepsilon'}{\cos i} \\ \varepsilon &= \frac{R\omega \cos i}{t} \quad \varepsilon' = \frac{R\omega \cos i}{t'} \end{aligned}$$

Compte-tenu de la relation (3), on en déduit la formule fondamentale :

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{t} = \frac{2}{R \cos i}$$

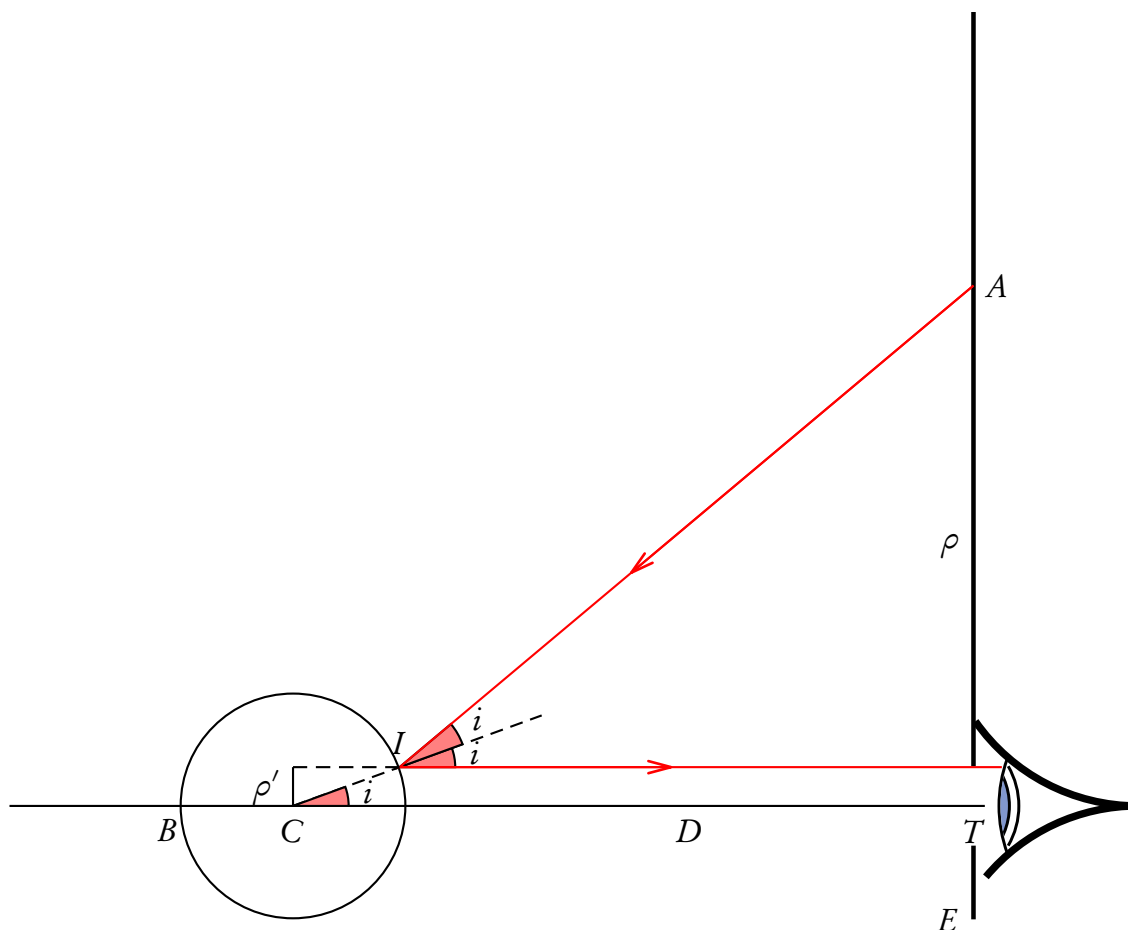
S'il n'y avait que le faisceau de rayons balayant depuis A l'arc $\widehat{I_1I_2}$, l'image virtuelle que verrait l'œil serait A' , [...]

Il faut maintenant envisager toutes les autres génératrices du cône.

En conclusion, à la page 134, Henri Bouasse écrit : « l'œil n'utilise qu'un pinceau extrêmement étroit ; il s'accommode sur l'une des focales ou sur le cercle de diffusion. ».

Le calcul complet est passablement compliqué, Henri Bouasse propose, dans certaines conditions, une méthode approximative qui donne de bons résultats et qui a l'avantage d'être simple. C'est l'intégralité de cette solution qu'il donne dans les pages 133, 134 et 135 de son livre, qui est développée ci-après.

4 Vision dans une boule de jardin



La démonstration de Henri Bouasse¹.

1^o — Pour effectuer les expériences suivantes, on se sert d'une boule de jardin achetée dans un bazar, ou d'un petit ballon de verre de 5 cm de diamètre environ dont on argente la surface extérieure. On peut argenter extérieurement une bille d'ivoire.

Sur une très grande feuille de carton blanc E, on trace un quadrillage en traits noirs épais. On regarde l'image de ce quadrillage par un petit trou percé au centre du carton.

La distance $D = TB$ sera prise d'une trentaine de centimètres.

Le quadrillage apparaît déformé *en barillet*, mais *parfaitement net*.

2^o — Pour avoir une idée de la loi de déformation supposons l'œil assez loin pour que les rayons réfléchis qui y parviennent, soient quasi-parallèles. Appelons ρ' la distance d'un rayon à la droite TB.

Soit R le rayon de la boule. l'angle d'incidence est :

$$i = \arcsin(\rho' : R)$$

Le point où le rayon conjugué coupe l'écran E, est à une distance ρ de TB donnée par la formule :

$$\rho = D \tan 2i$$

¹J'ai essayé de respecter la typographie de son livre.

D'où la loi approchée :

$$\arctan \frac{\rho}{D} = 2 \arcsin \frac{\rho'}{R}$$

ρ devient infini pour :

$$\arcsin(\rho' : R) = 45^\circ \quad \rho' = 0,7R$$

En conséquence, si grand que soit le carton, son image occupera moins des sept dixièmes du diamètre.

5 Images de Tangente

Ce sont les formules établies dans le paragraphe précédent qui sont employées pour déterminer l'image en 3D d'un objet dans un miroir sphérique.

Soit un point $M(x, y, z)$ dont on cherche l'image dans le miroir. Cette image sur le plan de représentation est notée $M'(x', y')$.

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{y^2 + z^2} \\ i &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\rho}{x} \\ \rho' &= R \sin i \\ x' &= \frac{\rho'}{\rho} z \\ y' &= -\frac{\rho'}{\rho} y\end{aligned}$$

