Projection COLLIGNON à méridiens et parallèles rectilignes

Manuel LUQUE <Mluque5130@aol.com>
and
Giuseppe MATARAZZO <joematara@hotmail.com>

Version 0.9 (janvier 2004)
Documentation révisée le 19 février 2 004

Résumé

Cet article est un modeste hommage à tous les scientifiques (géographes et mathématiciens) des siècles passés, à l'intelligence et l'ingéniosité dont ils font fait preuve afin de représenter la mappemonde terrestre en deux dimensions. Il existe des représentations multiples et très originales, et celle d'Édouard COLLIGNON, qui dans un mémoire publié en 1865 a compacté un hémisphère dans un carré, tout en conservant les aires est de plus très intéressante d'un point de vue didactique. Des renseignements sur cette projection se trouvent dans le livre *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections géographiques* de M.A.TISSOT, publié en 1 881 à Paris par GAUTHIER-VILLARS et dans celui d'Henri BOUASSE : *Géographie mathématique* (1919), édité par DELAGRAVE.

La partie qui va suivre est extraite des pages 168 et 169 de l'ouvrage de M.A.TISSOT. C'est un auteur dont les travaux sont une référence, même à notre époque, Eric W. WEISSTEIN le cite sur : `http://mathworld.wolfram.com/ConformalProjection.html` et son *ellipse indicatrice* [1] est toujours utilisée par les cartographes[2] . Il est

[1]Page 14 de son ouvrage :
« Si la courbe infiniment petite tracée autour du point O est une circonférence, la représentation de cette courbe sera une ellipse dont les axes se trouveront sur les tangentes principales et auront pour demi-longueurs a et b, le rayon de la circonférence étant pris pour unité. Cette ellipse constitue en chaque une sorte *d'indicatrice* du système de projection. » Cette présentation se poursuit sur une dizaine de pages par l'étude de cette *indicatrice*

[2]Voir le remarquable travail de Thierry Hatt sur `http://thierry.hatt.gps.free.fr/projections/`

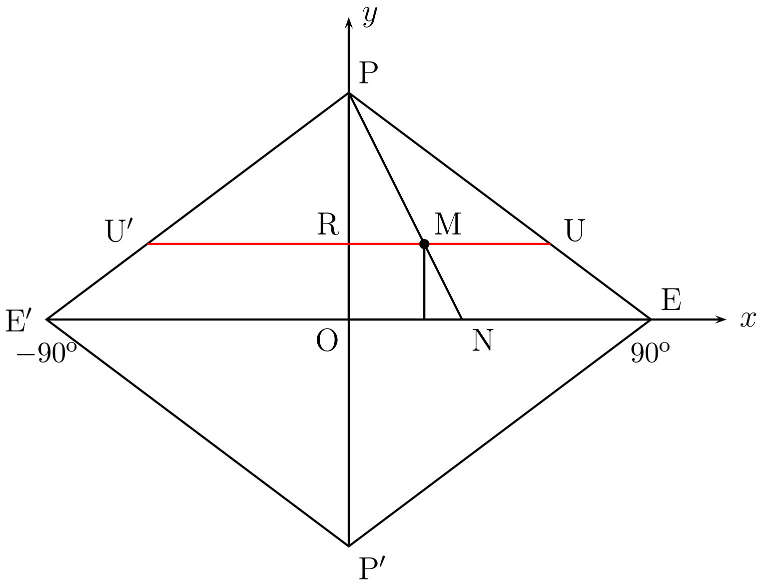

FIG. 1 – Schéma de principe

d'une très grande rigueur et présente une synthèse des différentes projections, mais il a un grand défaut : il contient très peu d'illustrations. Ce n'est pas le cas du livre d'Henri BOUASSE qui contient un grand nombre de schémas tous magnifiques [3]. Malheureusement le premier livre est quasiment introuvable chez les bouquinistes d'internet, celui d'Henri BOUASSE apparaît de temps à autre dans leurs catalogues. Il y a dans l'un et l'autre des démonstrations merveilleuses et nous avons décidé d'illustrer celle de M.A.TISSOT concernant COLLIGNON à l'aide de schémas réalisés avec PSTricks, puisque c'est l'ouvrage le plus pauvre en figures. D'un point de vue historique, tous (explicitement ou non [4]) font référence au *Coup d'œil historique sur les projections des cartes géographiques* de M. D'AVEZAC publié en 1863.

[3] À ces deux auteurs qui sont des références, il convient d'ajouter A. GERMAIN auteur d'un *Traité des projections des cartes géographiques*, à Paris chez Arthus Bertrand, éditeur. Il n'y a pas de date d'édition, mais Henri TISSOT le mentionne dans son livre. L'ouvrage d'A. GERMAIN contient à la fin les cartes des canevas (maillages des parallèles et méridiens) de tous les systèmes étudiés.

[4] A. GERMAIN le cite dans son introduction (page IX).

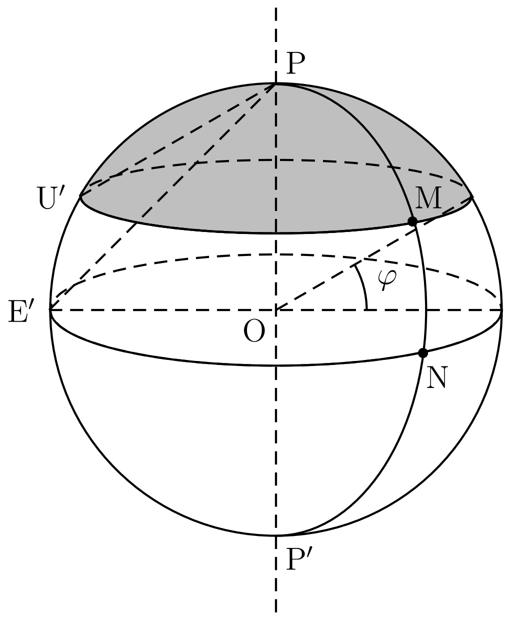

FIG. 2 – les calculs

« Convenons de représenter le méridien qui limite un hémisphère terrestre par le contour d'un losange PEP′E′ (figure 1), la moitié de l'équateur par une diagonale EE′, et les deux pôles par les extrémités P, P′ de l'autre diagonale ; de plus, la moitié OP de cette dernière étant désignée par n lorsqu'on prend le rayon du globe pour unité, supposons que la moitié OE de la première ait pour longueur $\dfrac{\pi}{n}$, afin que la surface du losange soit égal à 2π, comme celle de l'hémisphère. À ces données correspondra une projection hémicylindrique authalique qu'il s'agit d'obtenir.
« Soit UU′ la projection de la latitude φ, et R le point de rencontre des deux droites PP′ et UU′. On sait que toute calotte sphérique est équivalente au cercle qui aurait pour rayon la corde de l'arc générateur ; le triangle UPU′ doit donc être la moitié d'un cercle ayant pour rayon la corde de l'arc $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ dans la circonférence de rayon 1, et le triangle EPE′ doit être la moitié d'un autre cercle du quadrant dans la même circonférence. Mais ces deux triangles sont entre eux dans le rapport des hauteurs RP et OP. Donc les deux hauteurs sont proportionnelles aux deux cordes, ce qui détermine RP. »

M.A.TISSOT développe ensuite, à partir de ses conclusions, les constructions géométriques – ce qui à son époque était la chose la plus importante, permettant de réaliser la projection souhaitée. Par contre ce qui nous intéresse, c'est d'obtenir les coordonnées sur le plan Oxy de la projection d'un point de la mappemonde. On se reportera à la figure 2, pour suivre les petits calculs qui permettent d'obtenir les coordonnées.

La corde de l'arc générateur de la calotte sphérique U′P vaut :

$$\mathrm{U'P} = r = \sqrt{\Big(1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)\Big)^2 + \Big(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)\Big)^2}$$

$$r = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}$$

Comme M.A.Tissot, posons $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (colatitude).

En utilisant la relation trigonométrique : $1 - \cos\delta = 2\sin^2\frac{\delta}{2}$, la longueur de la corde r vaut :

$$r = 2\sin\frac{\delta}{2}$$

La longueur de la corde E′P $= \sqrt{2}$, écrivons donc le rapport :

$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{RP}}{n} = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}$$

On en déduit RP :

$$\mathrm{RP} = n\sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2},$$

puis l'abscisse et l'ordonnée de M :

$$y = \mathrm{OR} = \mathrm{OP} - \mathrm{PR} = n\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

En écrivant la relation suivante, déduite des des triangles homothétiques PON et PRM :

$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{ON}}$$

Avec $\mathrm{ON} = \frac{2}{n}\lambda$ pour la raison suivante : rappelons que $\mathrm{OE} = \frac{\pi}{n}$, donc qu'on peut établir la correspondance :

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{ON} & \lambda \\ \hline \frac{\pi}{n} & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Pour finir :

$$x = 2\frac{\lambda}{n}\sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}$$

En reprenant ici l'une des phrases du livre de M.A.Tissot(page 171) :

Les projections méricylindriques authaliques[a] à méridiens et parallèles rectilignes ont été imaginés en 1865 par M. Édouard Collignon, qui considérant plus spécialement le cas où le contour de la carte serait formé d'un carré, a traité la question analytiquement et a déduit de ses formules les constructions géométriques données plus haut.

[a]Il s'agit d'un mot argotique des mathématiciens modernes de langue anglaise, composé de : auth : abréviation usuelle de "authentic" et de "alike" : "semblable, égal".

L'étymologie de ce mot n'a donc rien à faire avec le grec, sauf concernant l'origine de "auth-"

Information communiquée par : grapheus
sur le forum : fr.lettres.langues-anciennes.grec

On obtiendra un carré en posant que OE = OP, soit pour :

$$n = \frac{\pi}{n} \Longrightarrow n = \sqrt{\pi}$$

On obtiendra successivement l'hémisphère contenant le méridien de référence(figure 3), puis l'hémisphère opposé(figure 4) en faisant `HemisphereA=false`. Il ne restera plus qu'à découper les deux carrés pour les coller dos à dos et la totalité du globe terrestre sera représenté sur un double carré avec la conservation des aires !

Bravo M.Collignon !

Les deux figures ont été obtenues avec le script suivant :

```
\psset{maillage=true,n=1.77245,Fill=true,rivers=true,borders=trueUSA=true}
\begin{figure}
\centering
\hbox{\hspace{-2cm}
\psset{xunit=0.75,yunit=0.75}
\begin{pspicture}(-11,-11)(11,11)
\Collignon
\end{pspicture}}
\caption{\label{HemisphereA}Hémisphère A}
\end{figure}
\begin{figure}
\centering
\hbox{\hspace{-2cm}
\psset{xunit=0.75,yunit=0.75}
\begin{pspicture}(-11,-11)(11,11)
```

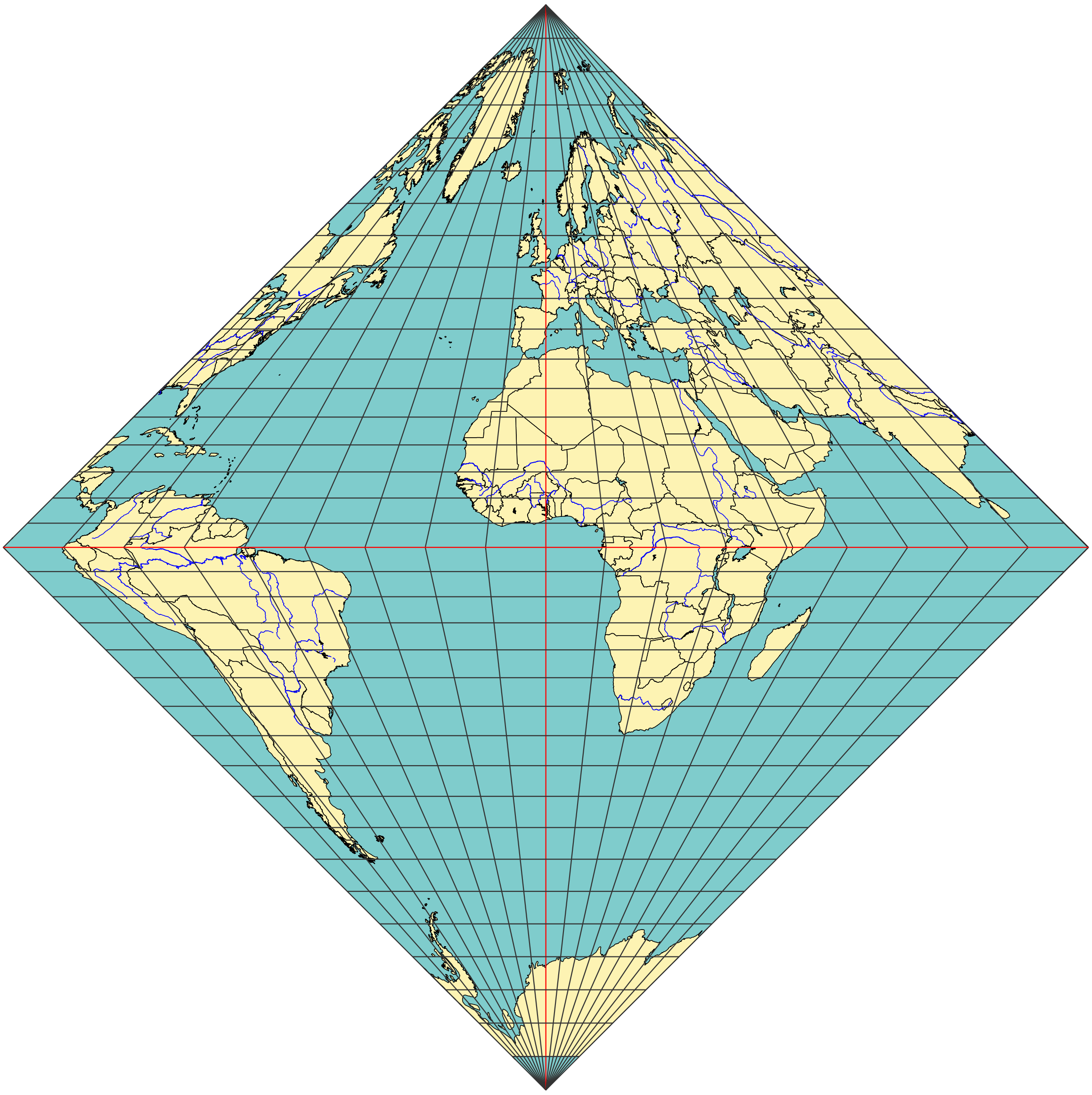

FIG. 3 – Hémisphère A

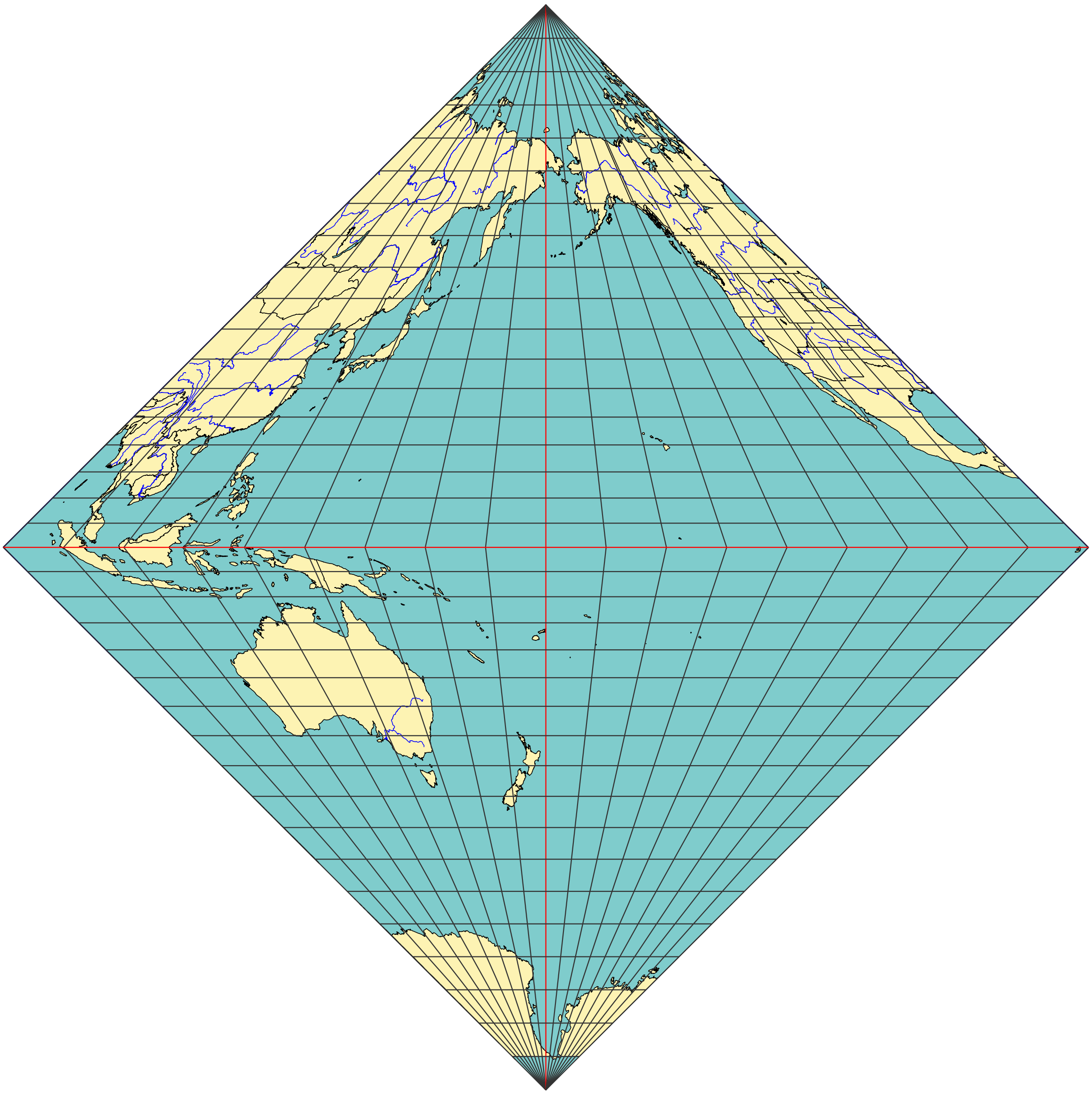

FIG. 4 – Hémisphère B

```
\Collignon[HemisphereA=false]
\end{pspicture}}
\caption{\label{HemisphereB}Hémisphère B}
\end{figure}
```

Téléchargement des fichiers

`http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/mappemonde/` Il faut indiquer le chemin des données dans la variable `path`. Cette variable contient le chemin des données sur mon disque dur :

`path=C:/mappemonde/wdb`

Il faut donc avant le `\begin{document}`, indiquer celui qui correspond à votre configuration :

`\psset{path=C:/mappemonde/wdb}`

ou bien le modifier directement dans le fichier `pst-collignon.tex`.