Das Pascalsche Dreieck

Benannt nach Blaise Pascal (19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion die Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{für} \quad n = k, k+1, k+2, \ldots$$

und veranschauliche sie im Pascalschen Dreieck.

Lösung

1. $n = k$: $\qquad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1 \qquad$ OK ✓

Es gilt nun schon

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n-k) + n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot [(n-k) + (k+1)]}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot [n+1]}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$