Brevet - Groupement Nord - Juin 2002
Correction

Activités Numériques — 12 points

Exercice n°1

$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$ $\qquad$ $B = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)$

1. *Calculer A et écrire la réponse sous forme de fraction irréductible.*
2. *Calculer B et écrire la réponse sous forme d'un entier.*

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$$
$$A = \frac{1}{3} - \frac{4}{21}$$
$$A = \frac{7}{21} - \frac{4}{21}$$
$$A = \frac{3}{21}$$
$$A = \frac{1 \times 3}{7 \times 3}$$
$$A = \frac{1}{7}$$

$$B = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)$$
$$B = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{3}{15}\right)$$
$$B = \frac{6}{5} \div \frac{-2}{15}$$
$$B = \frac{6}{5} \times \frac{15}{-2}$$
$$B = \frac{90}{-10}$$
$$B = -9$$

Exercice n°2

On considère l'expression

$C = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x+3)$.

1. *Développer et réduire C.*

$$C = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x+3)$$
$$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 - (6x^2 + 9x - 2x - 3)$$
$$C = 9x^2 - 6x + 1 - (6x^2 + 7x - 3)$$
$$C = 9x^2 - 6x + 1 - 6x^2 - 7x + 3$$
$$C = 3x^2 - 13x + 4$$

2. *Factoriser C.*

$$C = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x+3)$$
$$C = \underline{(3x-1)} \times (3x-1) - \underline{(3x-1)} \times (2x+3)$$
$$C = (3x-1) \times [(3x-1) - (2x+3)]$$
$$C = (3x-1) \times (3x - 1 - 2x - 3)$$
$$C = (3x-1)(x-4)$$

3. *Résoudre l'équation $(3x-1)(x-4) = 0$.*
   C'est une équation-produit donc

$$3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0$$
$$3x = 1 \qquad\qquad x = 4$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Les solutions de cette équation sont $x = 4$ et $x = \frac{1}{3}$.

4. *Calculer C pour $x = \sqrt{2}$.*
   On utilise l'écriture $C = 3x^2 - 13x + 4$.

$$C = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 13 \times \sqrt{2} + 4$$
$$C = 3 \times 2 - 13\sqrt{2} + 4$$
$$C = 6 - 13\sqrt{2} + 4$$
$$C = 10 - 13\sqrt{2}$$

Exercice n°3 *Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30€.*

Un canard et un poulet valent ensemble 20,70€.

Déterminer le prix d'un poulet et celui d'un canard.

Soit x le prix d'un poulet alors le prix d'un canard est $20,70 - x$. On obtient alors

$$3 \times (20,70 - x) + 4x = 70,30$$
$$62,10 - 3x + 4x = 70,30$$
$$x + 62,10 = 70,30$$
$$x = 70,30 - 62,10$$
$$x = 8,20$$

Le prix d'un poulet est 8,20€et le prix d'un canard est $20,70 - 8,20 = 12,50$€.

Exercice n°4 *Pour le 1er Mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.*

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

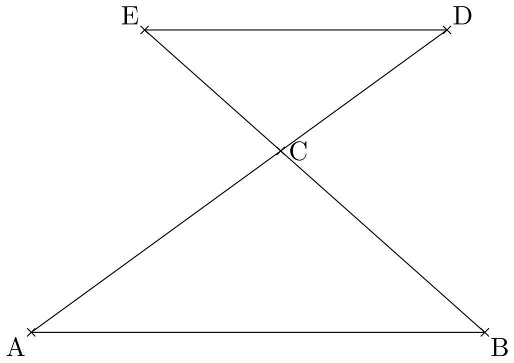
On doit déterminer le plus grand nombre qui divise à la fois les brins de muguets et les roses : il faut donc calculer le pgcd(182, 78).

a	b	r	
182	78	26	car $182 = 2 \times 78 + 26$
78	26	0	car $78 = 3 \times 26 + 0$

Par conséquent, Julie pourra faire 26 bouquets composés de $182 \div 26 = 7$ brins de muguets et $78 \div 26 = 3$ roses.

Activités Géométriques 12 points

Exercice n°1 *La figure suivante est donnée à titre indicatif pour préciser la position des points A, B, C, D et E. Les longueurs représentées ne sont pas exactes.*



On donne :
$CE = 5$,
$CD = 12$,
$CA = 18$,
$CB = 7,5$
$AB = 19,5$

1. *Montrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.*

   Dans le triangle ABC, E est un point de la droite (CB) et D est un point de la droite (AC).

   $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{CB}{CE} = \dfrac{7,5}{5} = \dfrac{3 \times 2,5}{2 \times 2,5} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE}$$

   De plus, les points A, C, D sont alignés dans le même ordre que les points B, C, E. Donc les droites (ED) et (AB) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

2. *Montrer que $ED = 13$.*

   Dans le triangle ABC, E est un point de la droite (CB) et D est un point de la droite (AC) tels que les droites (ED) et (AB) soient parallèles. Le théorème de Thalès permet d'écrire :

   $$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{ED}$$
   $$\frac{18}{12} = \frac{7,5}{5} = \frac{19,5}{ED}$$

   On utilise

   $$\frac{18}{12} = \frac{19,5}{ED}$$
   $$ED \times 18 = 19,5 \times 12$$
   $$ED \times 18 = 234$$
   $$ED = \frac{234}{18}$$
   $$ED = 13$$

   La longueur ED mesure donc bien 13.

3. *Montrer que le triangle CED est rectangle.*
   Dans le triangle CED, $[ED]$ est le plus grand côté.

   $ED^2 = 13^2 = \underline{169}$

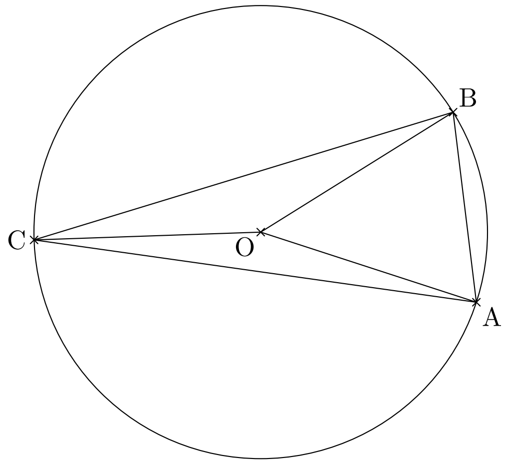
   $EC^2 + CD^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = \underline{169}$

   Comme $ED^2 = EC^2 + CD^2$, le triangle ECD est rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

4. *Calculer* $\tan \widehat{DEC}$ *puis en déduire la valeur arrondie au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{DEC}$.*
   Dans le triangle CED, rectangle en C, on a

   $$\tan \widehat{DEC} = \frac{CD}{CE}$$
   $$\tan \widehat{DEC} = \frac{12}{5}$$
   $$\widehat{DEC} \simeq 67$$

Exercice n°2 *Sachant que O est le centre du cercle passant par les points A, B, C, déterminer la mesure des angles du triangle ABC sachant que $\widehat{AOB} = 50^\circ$ et $\widehat{BOC} = 150^\circ$, en justifiant chacune de vos réponses.*



L'angle $\widehat{BCA}$ est un angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a

$$\widehat{BCA} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$$
$$\widehat{BCA} = \frac{1}{2} \times 50$$
$$\widehat{BCA} = 25$$

L'angle $\widehat{BCA}$ mesure 25°.

L'angle $\widehat{CAB}$ est un angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{COB}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a

$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \times \widehat{COB}$$
$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \times 150$$
$$\widehat{CAB} = 75$$

L'angle $\widehat{CAB}$ mesure 75°.

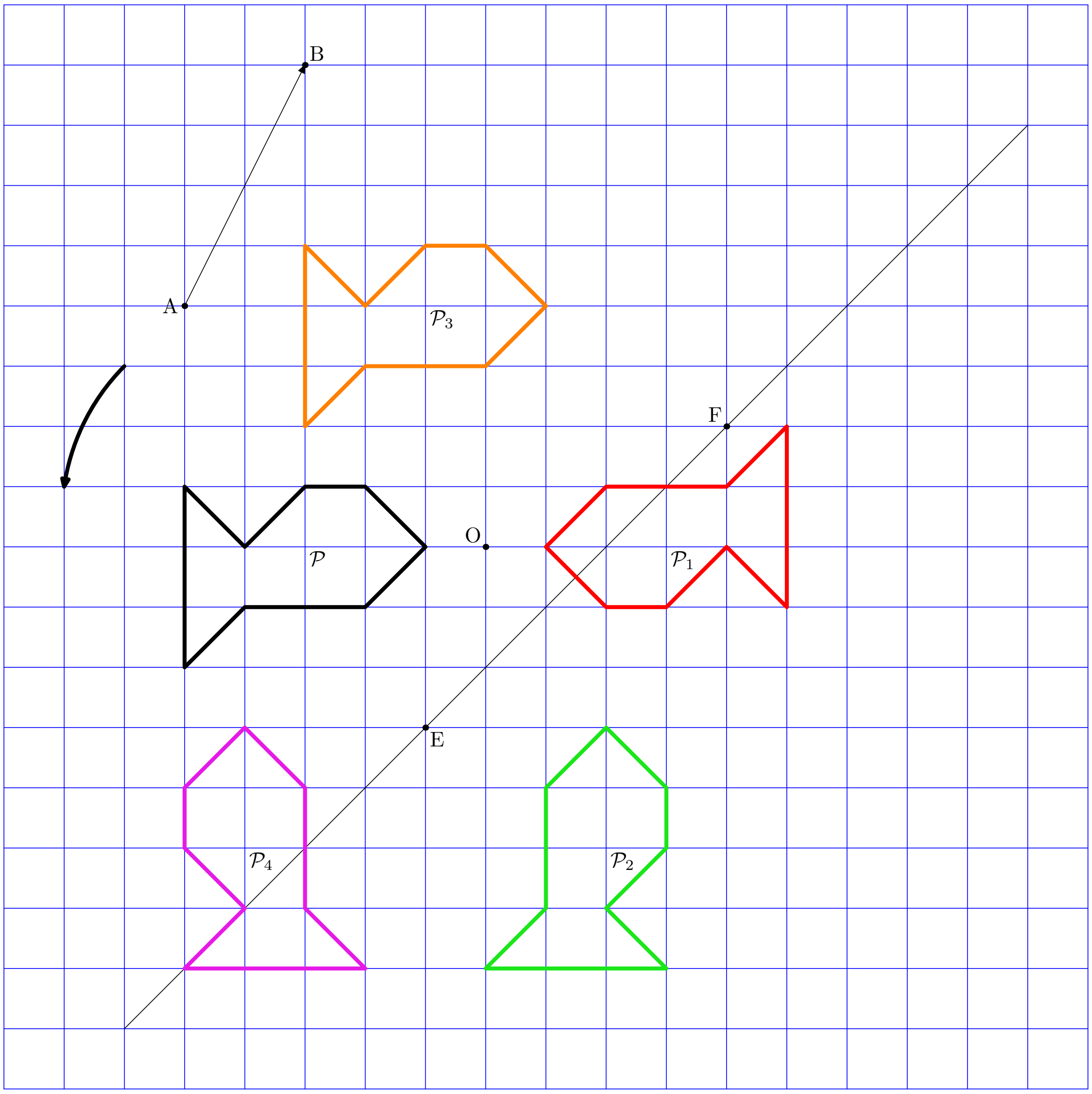
Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$$
$$\widehat{ABC} + 25 + 75 = 180$$
$$\widehat{ABC} + 100 = 180$$
$$\widehat{ABC} = 80$$

L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 80°.

Exercice n°3

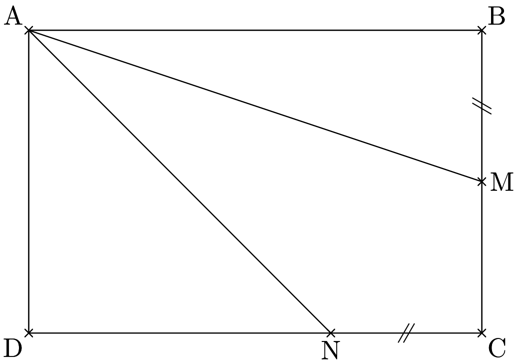
1. Tracer, sur la feuille annexe, le symétrique $\mathcal{P}_1$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport au point O.
2. Tracer, sur la feuille annexe, le symétrique $\mathcal{P}_2$ de la figure $\mathcal{P}$ par rapport à la droite (EF).
3. Tracer, sur la feuille annexe, l'image $\mathcal{P}_3$ de la figure $\mathcal{P}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Tracer, sur la feuille annexe, l'image $\mathcal{P}_4$ de la figure $\mathcal{P}$ dans la rotation de centre E, d'angle 90° et dans le sens de la flèche.



Problème 12 points

ABCD est un rectangle tel que $AB = 6\,cm$ *et* $AD = 4\,cm$.

Première Partie



M est le point du segment $[BC]$ *tel que* $BM = 2\,cm$.
N est le point du segment $[CD]$ *tel que* $CN = 2\,cm$.

1. *Calculer la longueur AM sous la forme* $a\sqrt{b}$ *(b nombre entier le plus petit possible).*

Dans le triangle ABM, rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}AM^2 &= AB^2 + BM^2\\ AM^2 &= 6^2 + 2^2\\ AM^2 &= 36 + 4\\ AM^2 &= 40\\ AM &= \sqrt{40}\\ AM &= \sqrt{4 \times 10}\\ AM &= 2\sqrt{10}\,cm\end{aligned}$$

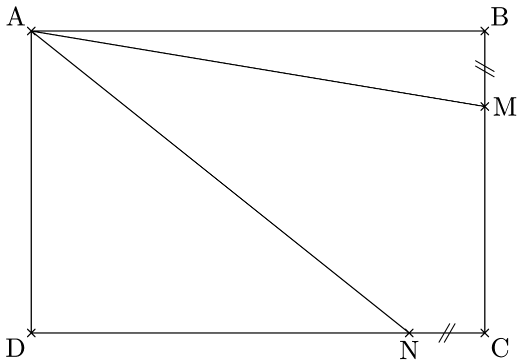
2. *Démontrer que l'aire du quadrilatère $AMCN$ est $10\,cm^2$.*
   Calculons l'aire des triangles ABM et ADN.
   N appartient au segment $[CD]$ donc $DN = DC - CN = 6 - 2 = 4\,cm$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABM} &= \frac{AB \times BM}{2} & \mathcal{A}_{ADN} &= \frac{AD \times DN}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= \frac{6 \times 2}{2} & \mathcal{A}_{ADN} &= \frac{4 \times 4}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= \frac{12}{2} & \mathcal{A}_{ADN} &= \frac{16}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= 6\,cm^2 & \mathcal{A}_{ADN} &= 8\,cm^2\end{aligned}$$

   Comme $\mathcal{A}_{AMCN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABM} - \mathcal{A}_{ADN}$, n obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AMCN} &= \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABM} - \mathcal{A}_{ADN}\\ \mathcal{A}_{AMCN} &= AB \times BC - 6 - 8\\ \mathcal{A}_{AMCN} &= 6 \times 4 - 6 - 8\\ \mathcal{A}_{AMCN} &= 24 - 6 - 8\\ \mathcal{A}_{AMCN} &= 10\,cm^2\end{aligned}$$

<u>Deuxième Partie</u>



Les points M et N peuvent se déplacer respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CD]$ de façon que $BM = CN = x$ $(0 < x \leq 4)$.

1. *Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.*
   On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABM} &= \frac{AB \times AM}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= \frac{6 \times x}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= \frac{6x}{2}\\ \mathcal{A}_{ABM} &= 3x\end{aligned}$$

2. (a) *Calculer la longueur DN en fonction de x.*
   N appartient au segment $[CD]$ donc $DN = DC - CN = 6 - x$.

(b) *Démontrer que l'aire du triangle ADN en fonction de x est $-2x+12$.*

On a

$$\mathcal{A}_{ADN} = \frac{AD \times DN}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ADN} = \frac{4 \times (6-x)}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ADN} = \frac{24-4x}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ADN} = 12-2x$$
$$\mathcal{A}_{ADN} = -2x+12$$

3. (a) *Dans un repère orthonormé (O, I, J) avec $OI = OJ = 1\,cm$, représenter graphiquement les fonctions affines*

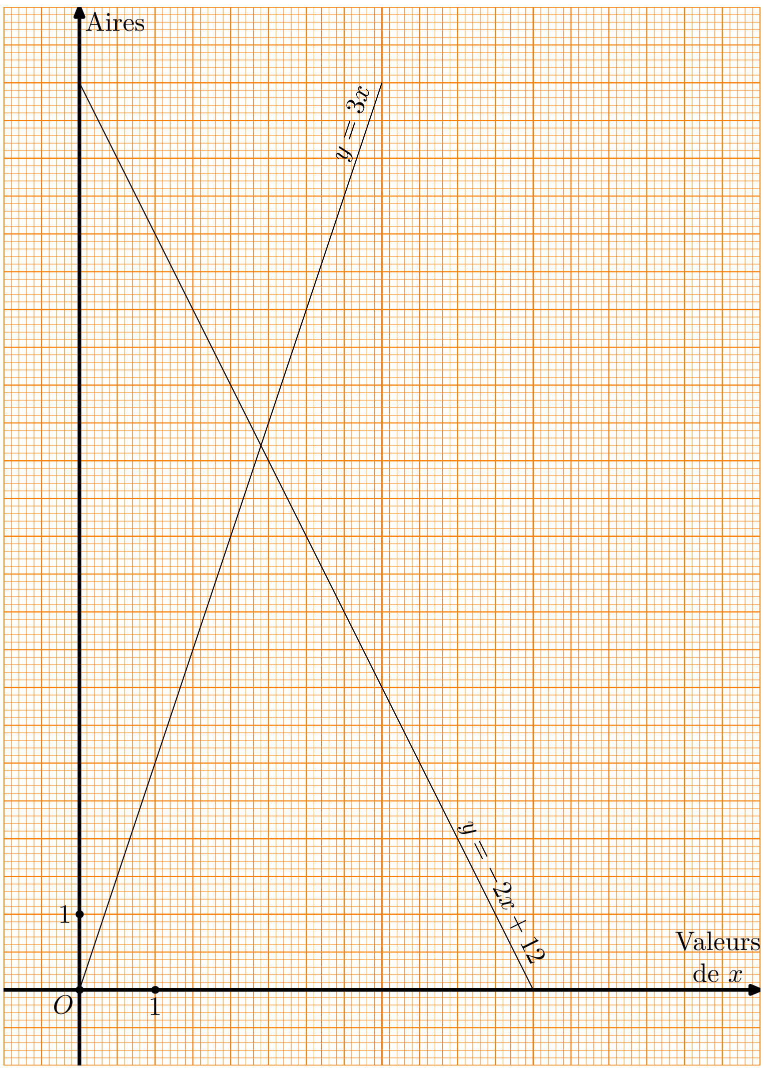
$$f : x \mapsto 3x \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto -2x+12$$

La fonction f est une fonction linéaire : sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

De plus, pour $x = 2$, on a $f(2) = 3 \times 2 = 6$. La droite passe également par le point de coordonnées $(2, 6)$.

La fonction f est une fonction affine : sa représentation graphique est une droite qui passe par le point $(0, b)$, c'est-à-dire $(0, 12)$.

De plus, pour $x = 2$, on a $f(2) = -2 \times 2 + 12 = -4+12 = 8$. La droite passe également par le point de coordonnées $(2, 8)$.



(b) *Calculer les coordonnées du point R, intersection de ces deux représentations.*

On a

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 0 = 3x - (-2x + 12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 0 = 3x + 2x - 12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 0 = 5x - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 12 = 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ \dfrac{12}{5} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \times \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{12}{5} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{36}{5} \\ \dfrac{12}{5} = x \end{cases}$$

Les coordonnées du point R sont $\left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{36}{5}\right)$

4. (a) *Pour quelle valeur de x, les aires des triangles ABM et ADN sont-elles égales ?*
Justifier la réponse.
Les aires des ces deux triangles sont égales lorsque leurs représentations graphiques sont sécantes, c'est-à-dire au point R. Par conséquent, la valeur de x cherchée est l'abscisse du point R ; $x = \dfrac{12}{5}$.

(b) *Pour cette valeur de x, calculer l'aire du quadrilatère $AMCN$.*
Pour cette valeur de x, on a $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ADN} = \dfrac{36}{5}$ (c'est l'ordonnée de R).
On a

$$\mathcal{A}_{AMCN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ABM} - \mathcal{A}_{ADN}$$

$$\mathcal{A}_{AMCN} = 24 - \frac{36}{5} - \frac{36}{5}$$

$$\mathcal{A}_{AMCN} = 24 - \frac{72}{5}$$

$$\mathcal{A}_{AMCN} = \frac{120}{5} - \frac{72}{5}$$

$$\mathcal{A}_{AMCN} = \frac{48}{5}\, cm^2$$