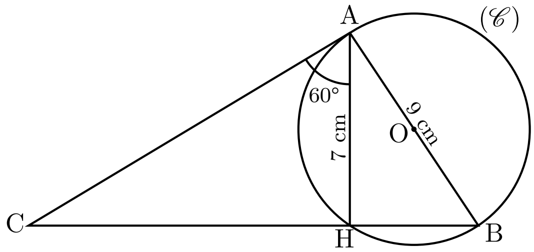
Devoir surveillé n° 4

3e F – Le mercredi 12/12/2007

Calculatrice autorisée – Pas de prêt ni d'échange de calculatrice !

■ Exercice 1.

La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.
Dans cette figure :



- ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, et dont [AB] est un dimètre tel que AB = 9 cm
- H est un point de ($\mathscr{C}$) tel que AH = 7 cm
- C est le point de la demi droite [BH) tel que $\widehat{CAH} = 60$

1) Montrer que le triangle BAH est rectangle.

2) Calculer la longueur BH. On donnera la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers (b étant le plus petit possible), ainsi que la valeur approchée au millimètre.

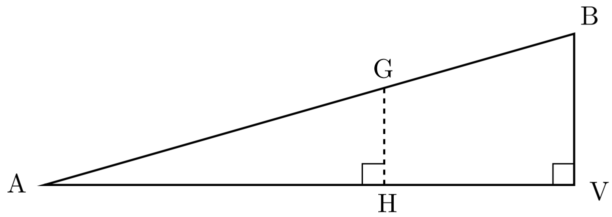
3) Calculer la valeur approchée au degrés de l'angle $\widehat{ABH}$.

4) En utilisant les valeurs données en bas de cette page[1], calculer la valeur exacte de la longueur CH. Donner également la valeur approchée au millimètre.

5) Calculer au cm^2 près, l'aire du triangle ABC.

■ Exercice 2.

La figure représente la vue en coupe d'une voie de funiculaire[2].
A est la gare de départ, et B la gare d'arrivée. La voie [AB] est rectiligne, et mesure 840 mètres de long.



L'altitude de la gare de départ A est 1 254 m, et celle de B est 1 616 m.

1) **a)** Calculer la hauteur BV.

b) On donne AG = 600 m : la gare intermédiaire G est donc située à 600 mètres de la gare de départ A
Calculer au mètre près la hauteur GH et en déduire l'altitude, au mètre près de la gare intermédiaire G.

c) Calculer au degré près l'angle $\widehat{BAV}$ que fait la voie de funiculaire avec l'horizontale.

2) À la descente, le funiculaire effectue le trajet à la vitesse constante de 14 km/h, sans faire d'arrêt à la gare intermédiaire G.
Quelle sera la durée exacte (en minutes et secondes) du trajet entre les gares B et A ?

■ Exercice 3.

On donne l'expression litérale $E = (3x-1)^2 - 16$

1) Développer et réduire E.

2) Factoriser E.

3) Calculer la valeur de E lorsque $x = \sqrt{5}$, et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$, où a et b sont des entiers relatifs.

■ Exercice 4.

1) α est un angle aigu tel que $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$
Calculer la valeur exacte de $\sin\alpha$, puis en déduire la valeur exacte de $\tan\alpha$.

2) Démontrer que si x est un angle aigu alors, $(\sin x + 1)^2 + (\cos x - 1)^2 = 3 + 2(\sin x - \cos x)$

1. $\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \tan 45 = 1$ $\quad \tan 60 = \sqrt{3}$
2. Voie ferrée équipée d'une crémaillère pour permettre à un train (que l'on appelle funiculaire) de gravir de fortes pentes.

Correction du devoir surveillé n° 4

■ Exercice 1.

1) H appartient au cercle de diamètre [AB] donc **le triangle ABH est rectabgle en H**.

2) Le triangle ABH est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2$$
$$9^2 = 7^2 + \mathrm{HB}^2$$
$$\mathrm{HB}^2 = 81 - 49$$
$$\mathrm{HB}^2 = 32$$
$$\mathrm{HB} = \sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = \mathbf{4\sqrt{2}\ cm \approx 5,7\ cm}$$

3) Dans le triangle ABH rectangle en H : $\sin\widehat{\mathrm{ABH}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}$ $\quad \sin\widehat{\mathrm{ABH}} = \dfrac{7}{9}$ $\quad$ et donc $\boldsymbol{\widehat{\mathrm{ABH}} \approx 51}$.

4) Dans le triangle ACH rectangle en H : $\tan\widehat{\mathrm{CAH}} = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ $\quad \tan 60 = \dfrac{\mathrm{CH}}{7}$ $\quad \mathbf{CH = 7\sqrt{3}\ cm \approx 12,1\ cm}$

5) $\mathrm{Aire}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}}{2} = \dfrac{(\mathrm{CH}+\mathrm{HB})\times\mathrm{AH}}{2} = \dfrac{(7\sqrt{3}+4\sqrt{2})\times 7}{2} \approx \mathbf{62\ cm^2}$

■ Exercice 2.

1) **a)** BV est la différence entre les altitudes de A et de B, donc : $\mathrm{BV} = 1\,616 - 1\,254 = \mathbf{362\ m}$

b) Comme (GH) et (BV) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (AV), elles sont parallèles.
Les droites (GB) et (HV) se coupent en A, les droites (GH) et (BV) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AV}} = \dfrac{\mathrm{GH}}{\mathrm{BV}}$ ce qui donne $\dfrac{600}{840} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AV}} = \dfrac{\mathrm{GH}}{362}$
De l'égalité $\dfrac{600}{840} = \dfrac{\mathrm{GH}}{362}$ on tire que $\mathrm{GH} = \dfrac{600\times 362}{840} \approx \mathbf{259\ m}$
On en déduit aisément que l'altitude de G est $1\,254 + 259 \approx \mathbf{1\,513\ m}$

c) Dans le triangle ABV rectangle en V : $\sin\widehat{\mathrm{BAV}} = \dfrac{\mathrm{BV}}{\mathrm{AB}}$ $\quad \sin\widehat{\mathrm{BAV}} = \dfrac{362}{840}$ $\quad \boldsymbol{\widehat{\mathrm{BAV}} \approx 26}$

2) De la formule $v = \dfrac{d}{t}$, on tire que $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{0,840}{14} = 0,06\ \mathrm{h} = 3,6\ \mathrm{min} = \mathbf{3\ min\ 36\ s}$

■ Exercice 3.

1)
$$E = (3x-1)^2 - 16$$
$$E = 9x^2 - 6x + 1 - 16$$
$$E = \boldsymbol{9x^2 - 6x - 15}$$

2)
$$E = (3x-1)^2 - 16$$
$$E = (3x-1)^2 - 4^2$$
$$E = [(3x-1)-4][(3x-1)+4]$$
$$E = (3x-1-4)(3x-1+4)$$
$$E = \boldsymbol{(3x-5)(3x+3)}$$

3)
$$E = 9\left(\sqrt{5}\right)^2 - 6\sqrt{3} - 15$$
$$E = 9\times 5 - 6\sqrt{5} - 15$$
$$E = \boldsymbol{30 - 6\sqrt{5}}$$

■ Exercice 4.

1) De la relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on a :

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

De la relation $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on a :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

2)
$$(\sin x + 1)^2 + (\cos x - 1)^2 = \sin^2 x + 2\sin x + 1 + \cos^2 x - 2\cos x + 1$$
$$(\sin x + 1)^2 + (\cos x - 1)^2 = \overbrace{\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 1 + 1}^{3} + 2\sin x - 2\cos x$$
$$(\sin x + 1)^2 + (\cos x - 1)^2 = \boldsymbol{3 + 2(\sin x - \cos x)}$$