

Classe de 3^e

Le 7 Mai 2002

L'emploi des calculatrices est autorisé (circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986 publiée au B.O. n°34 du 2 octobre 1986).

En plus des points prévus pour chacune des trois parties de l'épreuve, la présentation, la rédaction et l'orthographe seront évaluées sur 4 points.

Le sujet est composé de 4 feuilles numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Activités Numériques

Exercice 1 1

1. Ecrire chacun des nombres A et B sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{7} - \frac{5}{4} \quad B = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{7} - \frac{5}{4} \right)$$

2. Ecrire chacun des nombres C et D sous la forme $a + b\sqrt{6}$, où a et b désignent deux nombres entiers :

$$C = (\sqrt{6} + 1)^2 - (\sqrt{6} - 1)^2 \quad D = (\sqrt{6} + 1) \times (\sqrt{6} - 1)$$

Exercice 2 2 Soit l'expression $E = (-3x + 5)(x + 7) + (x + 7)^2$.

1. Développer et réduire E .
2. Ecrire E sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
3. Calculer la valeur de E pour $x = 1$ et $x = -2$.
4. Résoudre l'équation $E = 0$.

Exercice 3 3 Pour aller de Alphaville à Bétaville, il existe deux routes possibles :

- le trajet (1) d'une longueur d ; un automobiliste l'empruntant à la vitesse V_1 mettra le temps t pour l'effectuer ;
- le trajet (2) d'une distance supérieure de 10% au précédent ; un automobiliste l'empruntant à la vitesse V_2 mettra un temps inférieur de 10% au temps précédent pour l'effectuer.

Sachant que $V_1 + V_2$ est égal à 200 kilomètres par heure, calculer V_1 et V_2 .

Activités Géométriques

Pour les figures des exercices ci-dessous, on utilisera exclusivement la feuille blanche fournie.

Exercice 4 1 Soit un triangle ABC .

1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}$.
2. Construire le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
3. Démontrer que
 - (a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$.
 - (b) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.
 - (c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
 - (d) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CA}$.

Exercice 5 2 Pour cet exercice, on prendra la feuille blanche dans le sens de la longueur (mode paysage) et on commencera la figure du côté droit de la feuille.

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

Soit $ABCD$ un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D tel que $AB = 5$, $AD = 6$, $CD = 10$.

Soit M un point quelconque du segment $[AD]$. On pose $AM = x$.

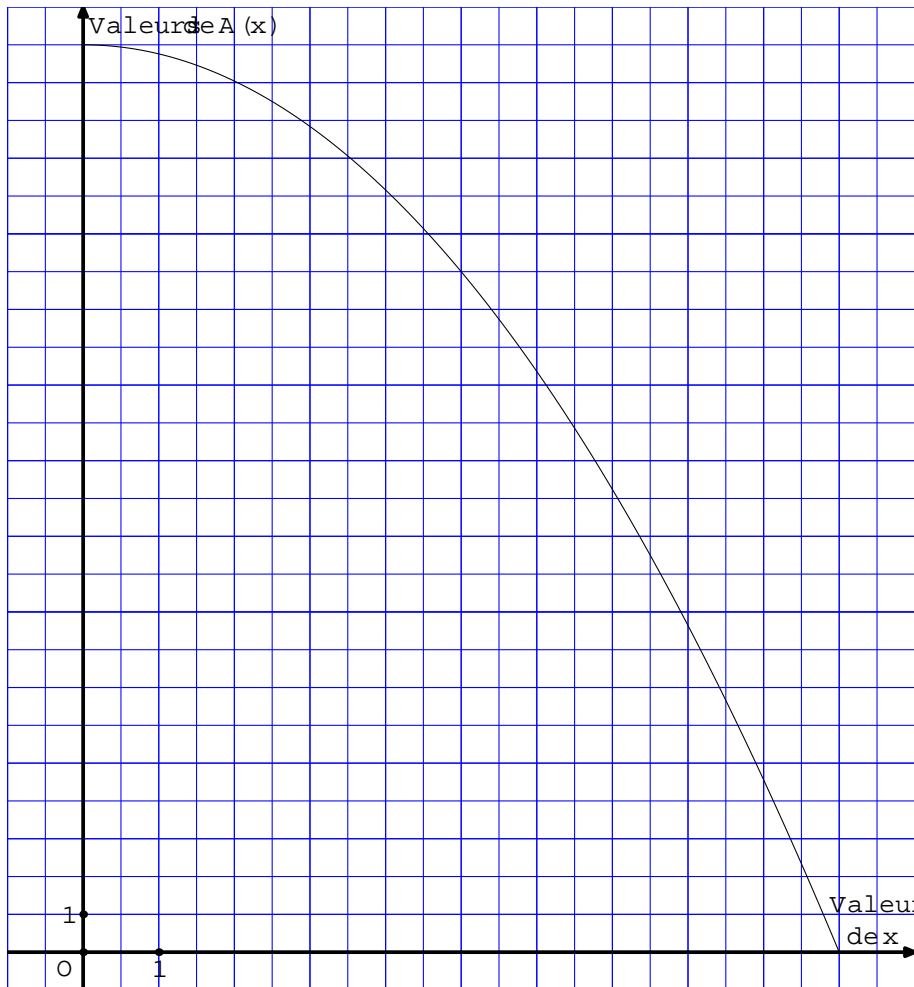
La droite (BM) coupe la droite (CD) en N .

1. Exprimer la longueur DN en fonction de x .
2. On cherche à trouver une position particulière du point M , que l'on appellera M_1 (on obtiendra alors le point N_1), pour que le point D soit le milieu du segment $[CN_1]$. Connaissant alors la mesure du segment $[DN_1]$, conclure en calculant la valeur de x correspondante. Placer le point M_1 ainsi déterminé.
3. Donner alors une mesure à un degré près par défaut de l'angle $\widehat{CN_1B}$.

Problème

Dans ce problème, les longueurs sont mesurées en centimètres et les aires en centimètres carrés.

1. Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 8$ et $AD = 6$, et M un point quelconque du segment $[BD]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AB) en N . Construire la figure.
2. Calculer la longueur BD .
3. Pour la suite de ce problème, on pose $BM = x$.
 - (a) Exprimer les longueurs MN et AN en fonction de x .
 - (b) En déduire l'aire $\mathcal{A}(x)$ du trapèze $ADMN$.
4. En utilisant le résultat obtenu à la question 3b, calculer :
 - (a) $\mathcal{A}(1)$.
 - (b) $\mathcal{A}(4)$.
 - (c) $\mathcal{A}(10)$. Ce résultat peut-il être obtenu directement, sans utiliser l'expression $\mathcal{A}(x)$? Pourquoi?
5. On donne ci-dessous la représentation graphique de \mathcal{A} dans un repère du plan.
 $\mathcal{A}(x)$ est l'image de x et se lit en ordonnée comme indiqué sur le graphique.
 - (a) Déterminer graphiquement, en laissant apparaître les traits construits pour la lecture, pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du trapèze $ADMN$ mesure :
 - 18 cm^2
 - $4,5 \text{ cm}^2$
 - (b) Déterminer graphiquement la mesure de l'aire du trapèze $ADMN$ lorsque x mesure 2 cm , puis lorsque x mesure 5 cm .



6. Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle les aires du trapèze $ADMN$ et du triangle BNM sont égales.
Faire une figure en plaçant les points M et N correspondants.