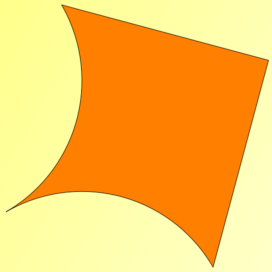
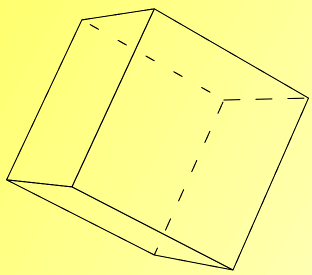
$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$



Un cours de 4^{e}



25 août 2004

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

Table des matières

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain
www.melusine.eu.org/syracuse/poulecl/

Première partie

Numérique

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

Chapitre 1

Produit et quotient de 2 nombres relatifs

Sommaire

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

1.1. Activités

1.1.1 Produit de deux nombres relatifs de signes différents

On sait que $2+2+2+2+2+2 = 6 \times 2 = 12$ ou que $5+5+5+5+5+5+5+5 = 8 \times 5 = 40$.

1. (a) Calculer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
A &= (-2)+(-2)+(-2) = \dots \\
B &= (-5)+(-5)+(-5)+(-5)+(-5) \\
C &= (-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7) \\
D &= (-4)+(-4)+(-4)
\end{aligned}$$

   (b) Ecrire sous la forme d'une multiplication les expressions A, B, C et D précédentes.

   (c) Regrouper les deux résultats sous la forme d'une égalité.
   Que remarque-t-on ?

2. Construisons différentes tables de multiplications.

$$\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & 4 & = & \vdots & \\
3 & \times & 4 & = & 12 & \\
2 & \times & 4 & = & 8 & -\dots \\
1 & \times & 4 & = & 4 & -\dots \\
0 & \times & 4 & = & 0 & -\dots \\
-1 & \times & 4 & = & \dots & -\dots \\
-2 & \times & 4 & = & \dots & -\dots \\
-3 & \times & 4 & = & \dots & -\dots \\
-4 & \times & 4 & = & \dots & -\dots \\
\vdots & \times & 4 & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & 2 & = & \vdots & \\
3 & \times & 2 & = & 6 & \\
2 & \times & 2 & = & 4 & -\dots \\
1 & \times & 2 & = & 2 & -\dots \\
0 & \times & 2 & = & 0 & -\dots \\
-1 & \times & 2 & = & \dots & -\dots \\
-2 & \times & 2 & = & \dots & -\dots \\
-3 & \times & 2 & = & \dots & -\dots \\
-4 & \times & 2 & = & \dots & -\dots \\
\vdots & \times & 2 & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & 7 & = & \vdots & \\
3 & \times & 7 & = & 21 & \\
2 & \times & 7 & = & 14 & -\dots \\
1 & \times & 7 & = & 7 & -\dots \\
0 & \times & 7 & = & 0 & -\dots \\
-1 & \times & 7 & = & \dots & -\dots \\
-2 & \times & 7 & = & \dots & -\dots \\
-3 & \times & 7 & = & \dots & -\dots \\
-4 & \times & 7 & = & \dots & -\dots \\
\vdots & \times & 7 & = & \vdots &
\end{array}$$

Le produit de deux nombres relatifs de signes différents est ....

1.1.2 Produit de deux nombres relatifs de même signe

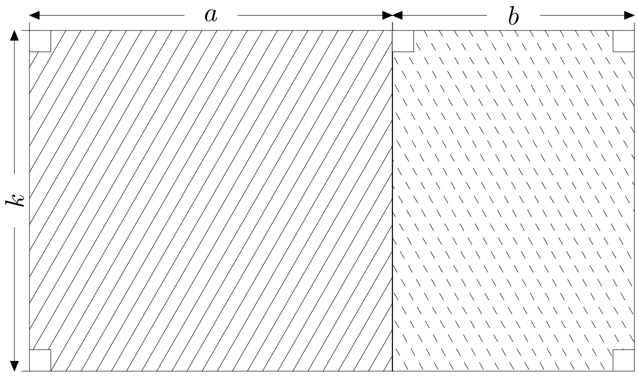
Examinons maintenant le cas de deux nombres négatifs à l'aide de notre nouvelle règle de calculs.
Construisons les tables de multiplications des nombres -3, -5 et -8

$$\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & (\text{-}3) & = & \vdots & \\
3 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}9 & \\
2 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}6 & +\dots \\
1 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}3 & +\dots \\
0 & \times & (\text{-}3) & = & \text{-}0 & +\dots \\
-1 & \times & (\text{-}3) & = & \dots & +\dots \\
-2 & \times & (\text{-}3) & = & \dots & +\dots \\
-3 & \times & (\text{-}3) & = & \dots & +\dots \\
-4 & \times & (\text{-}3) & = & \dots & +\dots \\
\vdots & \times & (\text{-}3) & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & (\text{-}5) & = & \vdots & \\
3 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}15 & \\
2 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}10 & +\dots \\
1 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}5 & +\dots \\
0 & \times & (\text{-}5) & = & \text{-}0 & +\dots \\
-1 & \times & (\text{-}5) & = & \dots & +\dots \\
-2 & \times & (\text{-}5) & = & \dots & +\dots \\
-3 & \times & (\text{-}5) & = & \dots & +\dots \\
-4 & \times & (\text{-}5) & = & \dots & +\dots \\
\vdots & \times & (\text{-}5) & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcll}
\vdots & \times & (\text{-}8) & = & \vdots & \\
3 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}24 & \\
2 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}16 & +\dots \\
1 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}8 & +\dots \\
0 & \times & (\text{-}8) & = & \text{-}0 & +\dots \\
-1 & \times & (\text{-}8) & = & \dots & +\dots \\
-2 & \times & (\text{-}8) & = & \dots & +\dots \\
-3 & \times & (\text{-}8) & = & \dots & +\dots \\
-4 & \times & (\text{-}8) & = & \dots & +\dots \\
\vdots & \times & (\text{-}8) & = & \vdots &
\end{array}$$

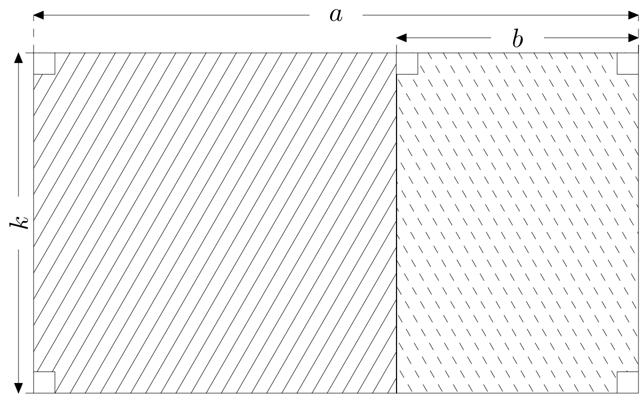
Le produit de deux nombres relatifs de même signe est ....

1.1.3 Distributivité et nombres relatifs

Pour des nombres k, a et b positifs, on sait que



$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$



$$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

Que se passe-t-il si k, a ou b sont des nombres négatifs ?
Recopie et complète le tableau suivant :

k	a	b	$k \times a$	$k \times b$	$k \times a + k \times b$	$(a+b)$	$k \times (a+b)$
2	3	-1					
2	3	-4					
3	-4	2					
3	-4	7					
4	-3	-2					
-5	-3	-2					

Que remarque-t-on pour les colonnes grisées ?

1.1.4 Signe d'un produit de plusieurs facteurs

On donne le produit suivant :

$$A = (-3) \times 5 \times 7 \times (-9) \times (-11) \times (-7) \times 4 \times (-6)$$

On se propose de déterminer le signe de l'expression A.

1. Recopie et complète en déterminant le signe de chacun des 7 produits qui composent l'expression A.

$$A = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(-3) \times 5}_{\text{signe...}} \times 7}_{\text{signe...}} \times (-9)}_{\text{signe...}} \times (-11)}_{\text{signe...}} \times (-7)}_{\text{signe...}} \times 4}_{\text{signe...}} \times (-6)}_{\text{signe...}}$$

2. Classe ces produits suivant leur signe.
3. Qu'ont en commun les produits dont le signe est positif ? Qu'ont en commun les produits dont le signe est négatif ?

Lorsque je multiplie plusieurs facteurs, il faut ....
....
pour obtenir le signe de ce produit de plusieurs facteurs.

1.1.5 Quotient de 2 nombres relatifs

1. Recopie et trouve la valeur manquante dans chacun des cas :

$$4 \times \ldots = 12 \qquad 5 \times \ldots = -10 \qquad \ldots \times 7 = -21$$
$$\ldots \times (-8) = -24 \qquad -9 \times \ldots = 36 \qquad \ldots \times (-10) = 110$$

2. On sait que *le quotient* de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui multiplié par b donne a. Par exemple, le quotient de 18 par 3 est 6 (car $3 \times 6 = 18$ ou $18 \div 3 = 6$).
Traduis chacune des égalités de la question précédente par une phrase commençant par « *Le quotient de...*
3. Que remarque-t-on ?
4. Prouvons cette dernière remarque.
Soit a et b deux nombres relatifs quelconques (avec $b \neq 0$) tels que

$$b \times \ldots = a$$

Plusieurs cas sont possibles :

si a et b sont positifs	si a et b sont négatifs	si a est positif et si b est négatif
$\underbrace{b}_{+} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{-}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$
Quotient de a par b : ...	Quotient de a par b : ...	Quotient de a par b : ...

Le quotient de 2 nombres relatifs de mêmes signes est ....
Le quotient de 2 nombres relatifs de signes différents est ....

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

1.2. Cours

1.2.1 Multiplication de deux nombres relatifs

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.
Le produit de deux nombres relatifs de signes est NÉGATIF.

Exemples $(-2) \times (-3) = +6$ $(-4) \times (+6) = -24$ $(+7) \times (-3) = -21$

Multiplication par 0 Si a est un nombre relatif quelconque alors $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

Multiplication par -1 Multiplier un nombre relatif par -1, c'est prendre l'opposé de ce nombre.

$$(-1) \times a = a \times (-1) = -a$$

Distributivité Si a, b, k sont trois nombres relatifs quelconques alors

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

1.2.2 Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Lorsque l'on multiplie des nombres relatifs différents de 0 :
– s'il y a un nombre PAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est POSITIF.
– s'il y a un nombre IMPAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est NÉGATIF.

Exemples Soit $A = (-4) \times 3 \times (-7) \times (-110) \times (-17)$.
A est positif car il y a 4 facteurs négatifs (4 est pair).
Soit $B = 13 \times (-19) \times (-53) \times (-15)$.
B est négatif car il y a 3 facteurs négatifs (3 est impair).

1.2.3 Quotient de deux nombres relatifs

Le nombre x qui vérifie $ax = b$ (avec $a \neq 0$) s'appelle **le quotient** de b par a. Il se note $\frac{b}{a}$: $x = \frac{b}{a}$.

Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.
Le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est NÉGATIF.

Exemples $\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5$ $\frac{-9}{3} = \frac{9}{-3} = -\frac{9}{3} = -3$

1.2.4 Inverse d'un nombre relatif différent de 0

L'inverse d'un nombre relatif x (avec $x \neq 0$) est le quotient de 1 par x ; on le note $\frac{1}{x}$.

$$x \times \frac{1}{x} = 1$$

1.3. Exercices

Exercice 1 – numerique/relatifs/exoa1

Effectue, en les détaillant, les calculs suivants

$$A = (-1) + (-3) + (-5) \qquad B = 1 + 3 + (-5)$$
$$C = (-2) - (-5) + 3 \qquad D = 2 + (-5) - (-4)$$

Exercice 2 – numerique/relatifs/exoa2

Calcule les expressions suivantes

$$G = 4,5 - 18,1 + 0,25 + 9 - 1,9 \qquad H = -72 + 185 - 61 - 61 - 83$$
$$I = -12 + 7 - 8 - 10 + 3 \qquad J = 67 - 3,4 + 15 - 0,6 - 2$$
$$K = 8 + (-9 - 5) \qquad L = (3,5 - 7) - (9,5 - 5,5)$$
$$M = -(12,4 - 9) + (1 - 10,5) - (14 - 9)$$

Exercice 3 – numerique/relatifs/exoa3

Effectue les calculs suivants :

$$A = (-2) \times (+3) \quad B = 4 \times (-5) \quad C = (-4) \times (-3)$$
$$D = (-5) \times 5 \quad E = 5 \times (+2) \quad F = (-7) \times 4$$

Exercice 4 – numerique/relatifs/exoa4

Recopie et complète le tableau :

$\times$	-2	0	$+5$	$+10$
-10				
-5				
-1				
$+2$				

Exercice 5 – numerique/relatifs/exoa5

Dans un repère du plan,

1. Placer les points S, A, R, D, I, N et E dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau, puis relier les points dans cet ordre en terminant par le segment $[ES]$.

S	A	R	D	I	N	E
$(2; -0,5)$	$(1,5; -0,5)$	$(1; 0)$	$(1, 1)$	$(0,5; 0,5)$	$(1,5; 0,5)$	$(2; 0)$

2. On obtient les coordonnées des points S', A', R', D', I', N' et E' en multipliant celles des points S, A, R, D, I, N et E par (-4).
   Recopie et complète le tableau uivant, puis place ces sept nouveaux points dans le même repère qu'au 1 et relie-les.

S'	A'	R'	D'	I'	N'	E'

Exercice 6 – numerique/relatifs/exoa6

Donne le signe des 2 produits suivants. Justifie la réponse.

$$I = 3,1 \times 4,2 \times (-1,2) \times (-1,3) \times 4,7 \times (-1,9)$$
$$J = (-19,1) \times (-37,2) \times 17,4 \times (-43,7) \times (-51,2)$$

Exercice 7 – numerique/relatifs/exoa7

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$$N = (-8) + 5 \times (-3) \qquad P = (-3 - 8) \times 7 + 4$$
$$R = 7 - 2 \times (4 - 9) \qquad S = -32 - (4 - 20) \times 2$$
$$T = 3 \times 11 - 10 \times (-2) \qquad V = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-10)$$

Exercice 8 – numerique/relatifs/exoa8

On donne les expressions suivantes

$$G = -4x - 3 \qquad H = 4 \times (x - 3) \qquad I = 4 + x \qquad J = 4 - x$$

Calculer G, H, I, J pour $x = -5$.

Exercice 9 – numerique/relatifs/exoa9

La lumière solaire pénètre jusqu'à la côte -500 mètres sous le niveau de la mer.

1. Des scientifiques ont mesuré que les cachalots peuvent descendre 5 fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte peuvent atteindre les cachalots ?
2. En 1960, le bathyscaphe Trieste, est descendu $21,8$ fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte avait atteint ce sous-marin ?

Exercice 10 – numerique/relatifs/exoa10

Au large de la Floride, il existe une dépression sous-marine qui atteint $5\,850\,m$ de profondeur. Un engin aquatique télécommandé s'enfonce sous l'eau par palier de $-850\,m$. Il réalise quatre plongées successives.

1. De combien de mètres devra-t-il encore descendre sous l'eau ?
2. Cela nécessitera encore combien de plongées ?

⋆⋆

Exercice 11 – numerique/relatifs/exob1

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$A = 3 \times (-5) + (-30) \div 5 \qquad B = \big[36 \div (-9) + 2\big] \times 5 - 2$$
$$C = \big[8 \times (-5) + 8\big] \div 4 \qquad D = \big(-4 \times 5 + 2\big) \div \big((-10) \div (-5) + 7\big)$$

Exercice 12 – numerique/relatifs/exob2

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$E = 3 \times (-5) + (-6) \times 5 \qquad F = [4 \times (-9) + 2] \times 5 - 2$$
$$G = 8 \times (-5) + 3 - (-6) \times 8 \qquad H = (-4 \times 5 + 2) \times (2 \times (-5) + 1)$$

Exercice 13 – numerique/relatifs/exob3

Recopie et complète les tableaux suivants en faisant apparaître les calculs.

a	b	$a \times b$	$a + b$	$a - b$
3	-2			
4	5			
-6	-7			
-4	2			

a	b	c	$a \times b$	$a \times c$	$b \times c$	$a + c$	$b + c$
2	3	-1					
-2	-4	-5					
0	2	4					
4	-1	5					

Exercice 14 – numerique/relatifs/exob4

Un carré magique de produits est un tableau tel que les produits des nombres écrits sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chacune des deux diagonales, sont égaux.
Vérifie si le tableau ci-dessous est un carré magique de produits :

-1	-5	$1,6$
$-3,2$	2	$-1,25$
$2,5$	$-0,8$	-4

Exercice 15 – numerique/relatifs/exob5

Indique la bonne réponse en effectuant les calculs sans calculatrice.

	Réponse A	**Réponse B**
$(50-72)-(27-49)$	-98	0
$-5+(-5)\times 3$	30	-20
$3-6\times(-1)$	3	9
$-12+(-10)\times(-2)$	-7	11
$8\times(-4)-(-6)\times 2$	-29	-13

Exercice 16 – numerique/relatifs/exob6

Effectue les calculs suivants

$$A=[(-3)\times 7+6]\div(-5) \qquad B=[(-40)\div 8+7]\times(-3)$$
$$C=18\div(-6)-5\times(-2) \qquad D=(7-(-3)\times 4)\times(-2)+(-12)$$
$$E=3\times(-5)+(-25)\div 5 \qquad F=[36\div(-9)+2]\times 5-2$$
$$G=8\times(-5)+3-(-48)\div 8 \qquad H=(-4\times 5+2)\div(2\times(-6)+1)$$

Exercice 17 – numerique/relatifs/exob7

Détermine la valeur des expressions suivantes pour $x=2$, $y=-3$, $z=-5$ puis pour $x=-4$, $y=-1$, $z=-2$.

$$A=4\times x-2\times y+3\times z \qquad B=xy+yz+zx$$

Exercice 18 – numerique/relatifs/exob8

1. Calcule les expressions suivantes avec $a=-2$, $b=-3$ et $c=4$.

$$E=2a-3b-5c \qquad F=\frac{5a-c}{b-c} \qquad G=\frac{c-a}{b}-2$$

2. Calcule ensuite $E+F-G$.

Exercice 19 – numerique/relatifs/exob9

Pour $a=-1,5$, $b=2$, $c=-5$, calcule les valeurs des expressions suivantes

$$A=abc \qquad B=ab+c$$
$$C=a(b+c) \qquad D=2a+3b-4c$$

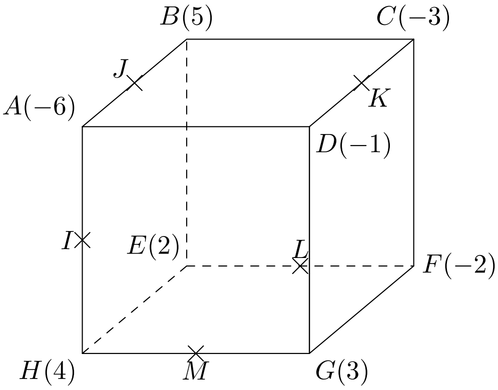
⋆⋆⋆

Exercice 20 – numerique/relatifs/exoc1

Calcule la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$D=[-9-(-3)]\times[16\div(-4)] \qquad E=(8\times[-1-(-2)])\div(-4)$$
$$F=\frac{8-(-1)\times 4}{-5+2}$$

Exercice 21 – numerique/relatifs/exoc2



On considère un cube $ABCDEFGH$ sur lequel on place à chaque sommet des nombres relatifs. La valeur de chaque sommet est indiqué sur la figure ci-contre.
On cherche à étudier différents trajets reliant les points I, J, K, L et M en suivant les arêtes du cube. On va donc comparer les trajets en leur donnant une valeur : *la somme des nombres relatifs associés à chaque sommet rencontrés sur le trajet.*

1. Vérifie que le trajet IK en passant par A et D vaut -7.
2. Donne la valeur des trajets IL en 3 sommets.
3. Donne la valeur des trajets IK en 3 sommets.
4. Donne la valeur des trajets JK en 4 sommets.
5. Donne la valeur du trajet JI en 7 sommets.

Exercice 22 – numerique/relatifs/exoc3

Calcule les expressions suivantes

$$A = 11 + 2 \times [(-3) + (-7) \times 3] \quad B = (-14) \div (-7) + (-3) \div 5$$

$$C = \frac{(-1) \times (-2) - (-3) \times 4}{2 - 2 \times (-6)} \qquad D = \frac{15 + [(-3) \times (-2) + (-5)]}{-2 \times 7 - [(-6) + 8 \times (-3)]}$$

Exercice 23 – numerique/relatifs/exoc4

Calcule les expressions données en utilisant les valeurs $a = -11$; $b = 5$; $c = -2$.

$$A = a - bc \qquad B = (a - b)c$$
$$C = 2a - (3b + 5c) \qquad D = -(a + b) - 2c$$

Exercice 24 – numerique/relatifs/exoc5

1. J'ai choisi un nombre x. Je lui ai retranché 12 et j'ai multiplié le résultat par -9. J'ai ainsi trouvé 900.
   Quelle était la valeur de x ?
2. J'ai choisi un nombre y. Je l'ai multiplié par -100 et j'ai ajouté 1 000 au résultat. J'ai ainsi trouvé 999.
   Quelle était la valeur de y ?

Exercice 25 – numerique/relatifs/exoc6

Indique, en justifiant la réponse, si l'affirmation $4x + 2y > -12$ est vraie pour $x = 0$ et $y = -7$; puis pour $x = 1$ et $y = -5$; puis pour $x = -4$ et $y = 0$.

Exercice 26 – numerique/relatifs/exoc7

1. (a) Jérémy a multiplié la somme de -7 et de 3 par -6. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $$-7 + 3 \times (-6) \qquad (-7 + 3) \times (-6) \qquad (3 - 7) \times (-6)$$

   (b) Jérémy a ensuite multiplié la somme de -8 et de 3 par 6. Quel nombre Jérémy a-t-il calculé ?

2. (a) Eva a ajouté 6 au produit de -5 par 4. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

$$-5+4\times 6 \qquad ((-5)\times 4)+6 \qquad 4\times(-5)+6$$

   (b) Eva a ensuite fait la somme du produit de -6 par 4 et de 5. Quel nombre Eva a-t-elle calculé ?

Exercice 27 – numerique/relatifs/exoc8

Calculez :

1. Le produit des inverses de -2 et 5.
2. L'inverse du produit de -2 et 5.
3. L'opposé de l'inverse de -2.
4. L'inverse de l'opposé de 5.

Exercice 28 – numerique/relatifs/exoc9

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$\begin{aligned}
E &= 3\times\big[(-5)+(-6)\big]\times 5\\
F &= \big[4\times(-9)+1\big]\div(5-2)\\
G &= (-3)\times\big[5+4\times(-2)\big]+28\div(-4)\\
H &= \big[(-3)\times 2+5\times 8\big]\div\big[5\times(-3)-2\big]
\end{aligned}$$

1.4. Récapitulatif

Addition de 2 nombres relatifs.

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

On garde le signe et ensuite on additionne.

$(+4) + (+3) = 7$

$(-5) + (-8) = -13$

Les 2 nombres relatifs n'ont pas le même signe.

Le plus éloigné, sur une droite graduée, de l'origine « l'emporte ».

$(-5) + (+3) = -2$

$(+10) + (-7) = 3$

Soustraction de 2 nombres relatifs.

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

$3 - (-7) = 3 + (+7)$

$4 - (+5) = 4 + (-5)$

On effectue ensuite l'addition.

$4 - (-9) = 4 + (+9)$

$4 - (-9) = 13$

Multiplication de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le produit est Positif.

$-4 \times (-7) = 28$

$3 \times 8 = 24$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le produit est Négatif.

$-5 \times (+3) = -15$

$(+10) \times (-7) = -70$

Division de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le quotient est Positif.

$-28 \div (-7) = 4$

$24 \div 3 = 8$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le quotient est Négatif.

$(-15) \div 3 = -5$

$10 \div (-2) = -5$

Chapitre 2

Nombres relatifs en écriture fractionnaire

Sommaire

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

2.1. Activité

2.1.1 Division et inverse

1. Rappelle la définition de l'inverse d'un nombre relatif non nul. (On pourra donner des exemples.)
2. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$5 \times \frac{1}{3} = \ldots \qquad -7 \times \frac{\ldots}{4} = \frac{-7}{4} \qquad 8 \times \frac{1}{\ldots} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{\ldots} \qquad \frac{12}{-7} = \ldots \times \frac{1}{-7} \qquad \frac{-14}{19} = -14 \times \frac{\ldots}{19}$$

3. La deuxième ligne est composée de quotients égaux à des produits. Traduis ces égalités mathématiques par des phrases de la forme *Le quotient de ... par ... est égal...* puis par des phrases de la forme *si je divise ... par ... alors cela revient à ...*
4. Si je souhaite diviser un nombre relatif a par un nombre relatif non nul b, que dois-je faire ?

2.1.2 Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

Recopie et complète les égalités ci-dessous :

$$\frac{2}{3} \times \ldots = \underbrace{\frac{2 \times \ldots}{3 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$

Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ... .

2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

www.melusine.eu.org/syracuse/poulecl/

2.2. Cours

2.2.1 Quotients égaux de 2 nombres relatifs.

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsque l'on multiplie (ou on divise) ces deux nombres par un même nombre relatif non nul (différent de 0).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \quad (b \neq 0; c \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{0,3}{-20} = \frac{0,3 \times 10}{-20 \times 10} = \frac{3}{-200} = -\frac{3}{200}$ $\quad \frac{-18}{12} = \frac{(-3) \times 6}{2 \times 6} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ (Simplification)

2.2.2 Addition et soustraction de deux fractions

Les dénominateurs sont identiques

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k} \qquad \frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k} \qquad (k \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{-7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-7+2}{3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$ $\qquad \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1-3}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

Les dénominateurs sont différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur et on applique la règle précédente.

<u>Exemples</u> $\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{-2}{6} + \frac{15}{6} = \frac{-2+15}{6} = \frac{13}{6}$ On cherche un multiple de 3 et de 2.

$\frac{5}{4} - \frac{7}{6} = \frac{15}{12} - \frac{14}{12} = \frac{15-14}{12} - \frac{1}{12}$ On cherche un multiple de 4 et 6.

2.2.3 Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0;\ d \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{3}{5} \times \frac{-2}{7} = \frac{3 \times (-2)}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$ $\qquad 4 \times \frac{9}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{9}{5} = \frac{4 \times 9}{1 \times 5} = \frac{36}{5}$.

2.2.4 Division de deux fractions

Diviser par un nombre relatif différent de 0, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

Exemple $\dfrac{-2}{0,25} = -2 \times \dfrac{1}{0,25} = -2 \times 4 = -8.$

L'inverse de la fraction $\dfrac{c}{d}$ est la fraction $\dfrac{d}{c}$ (avec $c \neq 0$; $d \neq 0$).

Diviser par une fraction $\dfrac{c}{d}$ ($c \neq 0$; $d \neq 0$), c'est multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{7}{5} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \times 5}{4 \times 7} = \dfrac{15}{28}$ $\qquad$ $\dfrac{4}{3} \div 9 = \dfrac{4}{3} \div \dfrac{9}{1} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{27}.$

2.3. Exercices

— ⋆ —

Exercice 1 – numerique/fractions/exoa1

On donne

$$a = \frac{2}{3} \qquad b = -3 \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{3}{4}$$

Exprimer sous forme fractionnaire : $a + b + c$, $a + b - c$, $-a - b + c$, $a + bc$, abc.

Exercice 2 – numerique/fractions/exoa2

Les $\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe ont participé à une excursion ; les $\frac{2}{3}$ des élèves partis sont des filles.

1. Quelle fraction de la classe représentent les filles qui sont parties en excursion ?
2. Il y a 30 élèves dans la classe. Combien de filles ont participé à l'excursion ?

Exercice 3 – numerique/fractions/exoa3

Martine, Pascale et Agnès veulent acheter ensemble une chaîne HI-FI de 1 995€. Martine peut payer $\frac{1}{3}$ du prix, Pascale $\frac{2}{5}$ et Agnès $\frac{2}{7}$. Est-ce suffisant ?

Exercice 4 – numerique/fractions/exoa4

Après lavage, un drap a rétréci et perdu $\frac{2}{27}$ de sa longueur.

1. Quelle fraction de sa longueur de départ reste-t-il ?
2. Désormais, le drap mesure $2,25\,m$ de long. Calcule sa longueur de départ.

— ⋆⋆ —

Exercice 5 – numerique/fractions/exob1

Quatre enfants découpent un pain d'épice pour leur goûter : Alice en prend le tiers, Benoït les $\frac{3}{5}$ de ce qu'a laissé Alice puis Cécile et Lucas, les jumeaux, se partagent le reste de manière égale.

1. Choisis parmi les trois calculs suivants celui qui permet d'obtenir la fraction de pain d'épice reçue par chacun des jumeaux. Explique ton choix.

$$X = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) \div 2 \quad Y = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times 2 \quad Z = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}$$

2. Effectue le calcul choisi.

Exercice 6 – numerique/fractions/exob2

La société Livrevite doit distribuer 183 colis pour Noël. Elle décide de confier ce travail à ses deux meilleurs livreurs : Eole et Zéphir. Ceux-ci se partagent les colis.

A la fin de la première journée, Eole a livre les $\frac{2}{5}$ de ses colis, c'est-à-dire 36 colis.

1. Combien Eole doit-il encore livrer de colis les jours suivants ?
2. Combien de colis Zéphir doit-il distribuer ?
3. Sachant que Zéphir a distribué les $\frac{2}{3}$ de ses colis le premier jour, combien doit-il en livrer les jours suivants ?
4. Quelle fraction du nombre total de colis représentent tous les colis distribués par les 2 livreurs le premier jour ?

Exercice 7 – numerique/fractions/exob3

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \qquad B = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 8 – numerique/fractions/exob4

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \qquad B = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \times \frac{2}{3}$$

Exercice 9 – numerique/fractions/exob5

Pour son rayon de café de luxe, monsieur Robusta achète 168 kilogrammes de café vert. Après transformation, monsieur Robusta constate avec horreur que ce café perd $\frac{6}{35}$ de sa masse.

1. Vérifie que la masse perdue pendant la transformation est égale à $28,8\,kg$.
2. Monsieur Robusta vend ce café transformé 9,30€ le kilogramme. Quelle somme d'argent Monsieur Robusta récupère-t-il si tout son café transformé est vendu ?
3. Le prix d'achat des 168 kilogrammes de café vert représente 55% de la somme obtenue par la vente. Combien ont coûté les 168 kilogramme de café vert à Monsieur Robusta ?

Exercice 10 – numerique/fractions/exob6

4 personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1^{re} personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\frac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Quelle est la fraction du trésor que représente la part de la 4^{e}personne ?
2. Déduis-en que le trésor contenait 540 pièces d'or.
3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

Exercice 11 – numerique/fractions/exob7

On donne les nombres

$$A = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$$

Calcule les expressions A et B. On écrira les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible.

Exercice 12 – numerique/fractions/exob8

Une balle rebondit aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur où elle a été lâchée.

1. A quelle fraction de la hauteur de chute s'élève-elle au 2^{e} rebond ? au 3^{e} ?
2. Si la balle a été lâchée à une hauteur de $1,62\,m$; à quelle hauteur rebondit-elle après le 4^{e} rebond ?

Exercice 13 – numerique/fractions/exob9

Sébastien a dépensé les $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour l'achat d'un CD et les $\frac{2}{3}$ de ce qui lui reste pour l'achat de bandes dessinées.

1. Quelle fraction de la somme de départ représente la somme qu'il reste après ses achats ?
2. Si lui reste 20€, combien avait-il au départ ?
3. Quel est le prix du CD ? Et celui des BD ?

Exercice 14 – numerique/fractions/exob10

Lors d'un héritage, une certaine somme d'argent est partagée entre 3 personnes : Arnaud, Béatrice et Claude.

Arnaud reçoit les $\frac{8}{15}$ de la somme, Béatrice reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part d'Arnaud.
Quelle fraction de la somme totale Claude reçoit-il ?

Exercice 15 – numerique/fractions/exob11

1/ Calcule A et écris la réponse sous forme d'une fraction irréductible. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$A = \frac{5}{12} - \frac{5}{3} \div \frac{7}{9}$$

2/ Calcule B et écris la réponse sous la forme d'un entier relatif. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 16 – numerique/fractions/exob12

Effectue les calculs suivants et écris le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{7}{4} \div \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 17 – numerique/fractions/exob13

Un viticulteur stocke sa production dans 3 cuves de même contenance. La première est pleine aux $\frac{2}{7}$, la seconde aux $\frac{3}{8}$ et la troisième est vide aux $\frac{9}{14}$. Une seule cuve aurait-elle été suffisante pour stocker la récolte complète ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18 – numerique/fractions/exoc1

Lors d'un héritage, 3 enfants souhaitent se partager un terrain et construire chacun une maison sur leur partie.

1. Le 1$^{\text{er}}$ enfant souhaite obtenir le tiers du terrain, le 2$^{\text{e}}$ enfant le cinquième et le 3$^{\text{e}}$ la moitié du terrain. Est-ce possible ? Pourquoi ?
2. Après discussion, les deux premiers enfants obtiennent ce qu'ils demandent et le 3$^{\text{e}}$ prend ce qui reste, soit $2100\,m^2$.
   (a) Quelle fraction du terrain reste-t-il pour le 3$^{\text{e}}$ enfant ?
   Déduis-en la superficie totale du terrain.
   (b) Calcule la superficie des parties des deux autres enfants.

Exercice 19 – numerique/fractions/exoc2

Ce mois-ci, Emilie a dépensé un quart de son argent de poche pour des livres, un tiers pour le cinéma et un autre tiers pour des dépenses diverses.
A-t-elle dépensé tout son argent ? Si non, calcule la fraction de son argent de poche qu'il lui reste.

Exercice 20 – numerique/fractions/exoc3

Le jus obtenu en pressant des cerises représente les $\frac{3}{4}$ de la masse de celles-ci.
On ajoute à ce jus une masse égale de sucre et l'on fait bouillir pour obtenir de la gelée. Le mélange jus et sucre donne les $\frac{4}{5}$ de sa masse en gelée. Un kilogramme de sucre à confiture coûte 1,08€ et un kilogramme de cerises coûte 2,81€.

1. Avec $1\,kg$ de cerises, quelle masse de gelée obtient-on ?
2. Quel est le prix d'un kilogramme de gelée de cerises ?

Exercice 21 – numerique/fractions/exoc4

Calcule et donne le résultat le plus simple possible de

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \qquad B = \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \div \frac{28}{5} \qquad C = \left(\frac{11}{3} + \frac{11}{7}\right) \div \left(\frac{11}{6} + \frac{11}{4}\right)$$

Exercice 22 – numerique/fractions/exoc5

Trois personnes se partagent un terrain rectangulaire. La première achète les deux septièmes du terrain, la seconde les deux tiers du reste ; la troisième personne achète la dernière partie du terrain.

1. Exprime la part de chaque personne comme fraction de l'aire totale.
2. Quelle personne possède le plus de terrain ?
3. Le terrain mesure $630\,m$ sur $490\,m$. Calcule l'aire de chaque part.
4. Représente le partage sur un dessin à l'échelle $1/10\,000$.

Exercice 23 – numerique/fractions/exoc6

Calcule les expressions suivantes. On fera apparaître toutes les étapes de calcul.

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \qquad D = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{15}$$

$$E = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \div \frac{4}{3} \qquad F = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 24 – numerique/fractions/exoc7

1. Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$.
   Calcule A en détaillant les étapes de calculs.
2. Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2001 et les quatre-cinquièmes du reste en 2002.
   (a) Quelle fraction de la propriété a été vendue en 2002 ?
   (b) Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?
   (c) Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

2.4. Récapitulatif

Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire.

Addition de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}$$
$$A = \frac{1+7}{3}$$
$$A = \frac{8}{3}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on additionne ensuite.

$$B = \frac{2}{5} + \frac{4}{7}$$
$$B = \frac{14}{35} + \frac{20}{35}$$
$$B = \frac{14+20}{35}$$
$$B = \frac{34}{35}$$

Soustraction de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{7}{4} - \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7-9}{4}$$
$$A = \frac{-2}{4}$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on soustrait ensuite.

$$B = \frac{5}{6} - \frac{7}{4}$$
$$B = \frac{10}{12} - \frac{21}{12}$$
$$B = \frac{10-21}{12}$$
$$B = \frac{-11}{35}$$

Multiplication de 2 fractions.

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$A = \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7 \times 9}{5 \times 4}$$
$$A = \frac{63}{20}$$

Division de 2 fractions.

Lorsque l'on divise par une fraction, cela revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$A = \frac{7}{5} \div \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7}{5} \times \frac{4}{9}$$
$$A = \frac{7 \times 4}{5 \times 9}$$
$$A = \frac{28}{45}$$

Chapitre 3

Les Puissances

Sommaire

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

3.1. Activité

3.1.1 Opérations sur les puissances de 10

Multiplication de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

   (a) $10^3 \times 10^2$ (c) $10^4 \times 10^4$ (e) $10^{-2} \times 10^5$ (g) $10^{-1} \times 10^{-2}$

   (b) $10^2 \times 10^1$ (d) $10^5 \times 10^3$ (f) $10^4 \times 10^{-1}$ (h) $10^{-3} \times 10^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

   (a) $\dfrac{10^5}{10^2}$ (c) $\dfrac{10^{-2}}{10^2}$ (e) $\dfrac{10^3}{10^4}$

   (b) $\dfrac{10^7}{10^9}$ (d) $\dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$ (f) $\dfrac{10^5}{10^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puisssance d'une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

   (a) $(10^2)^3$ (b) $(10^{-2})^4$ (c) $(10^4)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

3.1.2 Effet de la multiplication par une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimaux.

   (a) $3,5 \times 10^4$ (b) $0,15 \times 10^3$ (c) $5815,1 \times 10^2$

2. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant positif ?
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

   (a) $3,5 \times 10^{-3}$ (b) $0,15 \times 10^{-2}$ (c) $5815,1 \times 10^{-4}$

4. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant négatif ?

3.1.3 Ecriture scientifique d'un nombre relatif

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

   (a) $42,9 \times 10^3$ (c) $4\,290 \times 10$ (e) $4,29 \times 10^4$

   (b) $0,429 \times 10^5$ (d) $4\,290\,000 \times 10^{-2}$ (f) $429\,000 \times 10^{-1}$

2. Que remarque-t-on ?

3. Parmi toutes ces écritures d'un même nombre décimal, une va être privilégiée : *celle dont le nombre décimal ne possède qu'un chiffre non nul avant la virgule.*
   Quelle est cette écriture ?
   Une telle écriture s'appelle *l'écriture scientifique du nombre décimal 42 900.*
4. Donne l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

   (a) 153 (b) 57,9 (c) 0,08

3.1.4 Opérations sur les puissances d'un entier relatif

Multiplication de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $2^3 \times 2^2$ (c) $12^4 \times 12^4$ (e) $6^2 \times 3^5$ (g) $7^{-1} \times 7^{-2}$
   (b) $5^2 \times 7^1$ (d) $(-2)^5 \times (-2)^3$ (f) $4^4 \times 4^{-1}$ (h) $9^{-3} \times 9^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $\dfrac{2^5}{2^2}$ (c) $\dfrac{5^{-2}}{3^2}$ (e) $\dfrac{7^3}{8^2}$
   (b) $\dfrac{3^7}{3^9}$ (d) $\dfrac{4^{-7}}{4^{-5}}$ (f) $\dfrac{12^5}{12^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'une puissance

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $(5^2)^3$ (b) $((-5)^{-2})^4$ (c) $(7^4)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'un produit

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $2^3 \times 5^3$ (b) $3^{-2} \times 4^{-2}$ (c) $8^2 + 6^2$ (d) $4^5 \times 6^5$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

3.2. Cours

3.2.1 Puissances de 10

Définitions

Une puissance de 10 se note sous la forme 10^m où m est un nombre relatif. Dans cette écriture, m est appelé *l'exposant*.

– **L'exposant est un entier positif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^0 = 1 \text{ et } 10^1 = 10$$

$$10^m = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{m \text{ fois le nombre } 10} = 1\,\underbrace{000\ldots0}_{m \text{ zéros}}$$

Exemples

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \qquad 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

– **L'exposant est un entier positif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m} = \underbrace{0,00\ldots0}_{m \text{ zéros}}1$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \qquad 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,000\,01$$

Formules de calculs

(Admis) Soit m et n 2 nombres entiers relatifs.

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \qquad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \qquad (10^m)^n = 10^{m\times n}$$

Exemples

$$10^4 \times 10^{-2} = 10^{4+(-2)} = 10^2$$

$$\frac{10^4}{10^{-2}} = 10^{4-(-2)} = 10^{4+2} = 10^6$$

$$\left(10^4\right)^{-2} = 10^{4\times(-2)} = 10^{-8}$$

Ecriture scientifique d'un nombre décimal

> *L'écriture scientifique* d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul (différent de 0) avant la virgule et p un entier relatif

<u>Exemples</u>
L'écriture scientifique de 385 est $3,85 \times 10^2$.
L'écriture scientifique de $A = 35\,48 \times 10^4$ est

$$A = 3,548 \times 10^1 \times 10^4$$
$$A = 3,548 \times 10^{1+4}$$
$$A = 3,548 \times 10^5$$

3.2.2 Puissance d'un entier relatif

> Soit n un nombre entier positif.
>
> $$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \quad (n \geq 2) \qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1$$
>
> $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

<u>Exemples</u>

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \ldots \qquad (-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = \ldots$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$$

Utilisation de la calculatrice
Touche $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$.

$$(-5)^3 = \underbrace{(\,5 \pm)\uparrow 3 \;=}_{\text{calculatrice}} \quad -125 \qquad 2^5 = \underbrace{2 \uparrow 5 =}_{\text{calculatrice}} \quad 32$$

Opérations sur les puissances

> (Admis) Si a est un entier relatif non nul et si m et n sont des entiers relatifs alors
>
> $$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n} \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

<u>Exemples</u>

$$2^4 \times 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^1 = 2 \qquad \frac{4^2}{4^6} = 4^{2-6} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4}$$

$$\left(5^3\right)^{-2} = 5^{3\times(-2)} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} \qquad 7^3 \times 4^3 = (7 \times 4)^3 = 28^3$$

3.3. Exercices

$\star$

Exercice 1 – numerique/puissances/exoa1

1. Calcule l'aire d'un rectangle de longueur $10^4\ cm$ et de largeur $10^{-2}\ cm$.
2. Calcule l'aire d'un triangle de côté de base $0,82 \times 10^3\ dm$ et de hauteur relative à ce côté $2,4 \times 10^4\ dm$.

Exercice 2 – numerique/puissances/exoa2

Ecris sous la forme 10^n avec n un entier relatif :

$$A = 10^3 \times 10^5 \qquad B = \frac{10^7}{10^{-3}} \qquad C = \frac{10^2 \times 10^4}{10^3}$$

$$D = \frac{100 \times 10^3}{10^{-2}} \qquad E = 10 \times \left(10^2\right)^5 \qquad F = (-10)^2 \times (-10)^{-3}$$

Exercice 3 – numerique/puissances/exoa3

Sachant que 1 kilo de viande coûte $16\,000\,000 \times 10^{-6}$€ et que 10^4 saucisses coûtent $6\,000$€, combien vais-je payer pour une commande de $0,87 \times 10^{-3}$ tonnes de viande accompagnées de $70\,000 \times 10^{-4}$ saucisses ?

Exercice 4 – numerique/puissances/exoa4

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

$$A = 5^2 \times 5^3 \qquad B = \frac{7^4}{7^2} \qquad C = 8^2 + 6^2$$

$$D = \frac{2^3 \times 2}{2^5} \qquad E = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad F = 5^7 \times 2^4 \times 5^{-3}$$

Exercice 5 – numerique/puissances/exoa5

Calcule la valeur de l'expression $C = 4x^2 - 5x + 2,7$ pour $x = 3$.
Calcule la valeur de l'expression $D = 5x^3 + 6x^2 - 10$ pour $x = 10$.

$\star\star$

Exercice 6 – numerique/puissances/exob1

1. Donne l'écriture décimale de
$$4,05 \times 10^4 \qquad\qquad 10,02 \times 10^{-3}$$
2. Donne l'écriture scientifique de
$$12,45 \qquad\qquad 0,0234$$
3. Ecris sous forme d'une puissance de 10 les expressions suivantes. Ensuite, donne les résultats sous forme décimale et scientifique.

$$A = 2,5 \times 10^2 \times 4 \times 10^5 \qquad B = \frac{21 \times 10^3}{0,7 \times 10^{-7}} \qquad C = 4 \times 10^5 + 6 \times 10^3$$

Exercice 7 – numerique/puissances/exob2

La luminosité du Soleil est de 4×10^{26} Watts, celle d'une centrale électrique est 4 milliards de Watts. Combien faut-il de centrales électriques pour éclairer de la même façon que le Soleil ? On donnera le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

Exercice 8 – numerique/puissances/exob3

La distance moyenne d de la Tere au Soleil est d'environ 149,5 millions de kilomètres.

1. Donne la notation scientifique de d.
2. Le rayon R de la Terre mesure approximativement 6 400 kilomètres.
   Calcule à une unité près par défaut le quotient $\dfrac{d}{R}$.
3. Sachant que la vitesse de propagation de la lumière est environ égale à 300 000 kilomètres par seconde, calcule en minutes et secondes le temps t mis par la lumière émise par le Soleil pour nous parvenir sur Terre. Ce temps sera donné à une seconde près par excès.

Exercice 9 – numerique/puissances/exob4

Effectue le calcul suivant en faisant apparaître toutes les étapes intermédiaires :

$$G = 7,5 \times 10^3 + 35 \times 10^{-2}$$

Exercice 10 – numerique/puissances/exob5

1. Je parcours $8\,m$ en 1 seconde.
   Combien de temps vais-je mettre pour parcourir $100\,m$?
2. La lumière parcourt $3 \times 10^5\,km$ en 1 seconde ?
   Combien de temps va mettre la lumière pour parcourir la distance Soleil-Terre, c'est-à-dire $1,5 \times 10^8\,km$?

Exercice 11 – numerique/puissances/exob6

1. En détaillant les calculs, donne la notation scientifique puis l'écriture décimale de :

$$C = \frac{4 \times 10^6 \times 3,3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^3}$$

2. Le physicien Avogadro a montré qu'il y avait environ $6,03 \times 10^{23}$ molécules d'eau dans $18\,g$ d'eau. Combien y a-t-il de molécules d'eau dans un millionième de gramme d'eau ? Donner ce résultat en notation scientifique.

Exercice 12 – numerique/puissances/exob7

Donne l'écriture décimale et l'écriture scientifique des expressions suivantes

$$E = 5,5 \times 10^7 \times 0,4 \times 10^{-9} \qquad\qquad F = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-4}}{1,2 \times 10^3}$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 13 – numerique/puissances/exoc1

Un atome est formé d'un noyau et d'électrons qui gravitent autour du noyau. Représentons par une boule de $8\,cm$ de diamètre le noyau d'un atome qui mesure en réalité $4 \times 10^{-12}\,mm$ de diamètre.

1. Quelle échelle utilise-t-on ? (C'est le nombre par lequel on a multiplié le diamètre du noyau).
2. A quelle distance devrait être placé, sur le dessin, un électron qui tourne en réalité à $5 \times 10^{-8}\,mm$ du noyau ?
3. A cette échelle, un électron est représenté par une minuscule boule de $0,2\,mm$ de diamètre. Quel est le diamètre réel, en mm, d'un électron ?

Exercice 14 – numerique/puissances/exoc2

1. Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 45\,000 \qquad B = 0,000\,073 \qquad C = 47\,000 \times 10^3 \qquad D = 0,052 \times 10^{-4}$$

2. Calcule et donne le résultat en écriture scientifique : $E = 15 \times \left(10^7\right)^2 \times 3 \times 10^{-5}$
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$F = \frac{10^{-8} \times 0,7 \times 10^{12}}{21 \times 10^3}$$

Exercice 15 – numerique/puissances/exoc3

$\mathcal{C}_1$ est un disque de rayon R. Le rayon de $\mathcal{C}_2$ est le double de celui de $\mathcal{C}_1$; celui de $\mathcal{C}_3$ est le double de celui de $\mathcal{C}_2$, etc. . .

1. Calculer le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{C}_1$ en fonction de R.
   Que valent $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{A}_1$ si $R = 3$?
2. Calculer le périmètre et l'aire de $\mathcal{C}_4$ en fonction de R. Comparer avec les résultats de $\mathcal{C}_1$.

Chapitre 4

Calcul littéral

Sommaire

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain