Passer de l'hexagone régulier au pentagone régulier uniquement avec un compas.

Christophe Poulain*

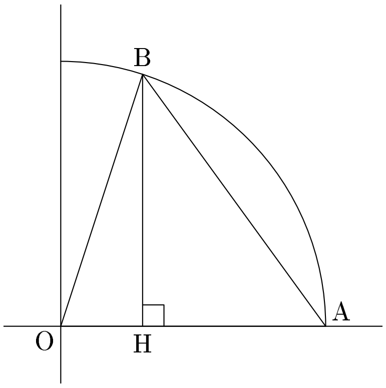
16 août 2004

Résumé

Les vacances réservent de bonnes surprises. En visitant une abbaye, je suis tombé sur le livre *Géométrie du nombre d'or* de Robert VINCENT. Après une première lecture rapide mais studieuse, une autre, plus approfondie, m'a fait découvrir cette construction ; mais sans les justifications mathématiques. C'est ce « manque » que je me propose de combler dans ce petit feuillet sans prétentions.

1 Un peu de mathématiques sur le pentagone régulier

Considérons la figure ci-dessous où O représente le centre du cercle $\mathcal{C}$. Les points A et B sont des points du cercle $\mathcal{C}$ tels que le segment $[AB]$ soit un côté d'un pentagone régulier inscrit dans ce cercle $\mathcal{C}$. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).



On cherche à obtenir une relation entre le rayon r et la longueur du segment $[AB]$ notée a. On sait[1] que

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

et alors

$$OH = \frac{\sqrt{5}-1}{4}r$$

On a donc

$$AH = AO - OH$$
$$AH = r - \frac{\sqrt{5}-1}{4}r$$
$$AH = r\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$
$$AH = \frac{5-\sqrt{5}}{4}r$$

*D'après *Géométrie du nombre d'or* – Robert VINCENT – Chalagam

[1]Grâce aux nombres complexes.

Calculons BH^2.

$$BH^2 = r^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 r^2$$

$$BH^2 = r^2 \left(1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$BH^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} r^2$$

Déterminons maintenant a^2.

$$a^2 = BH^2 + AH^2$$

$$a^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} r^2 + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2 r^2$$

$$a^2 = r^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8} + \frac{30-10\sqrt{5}}{16}\right)$$

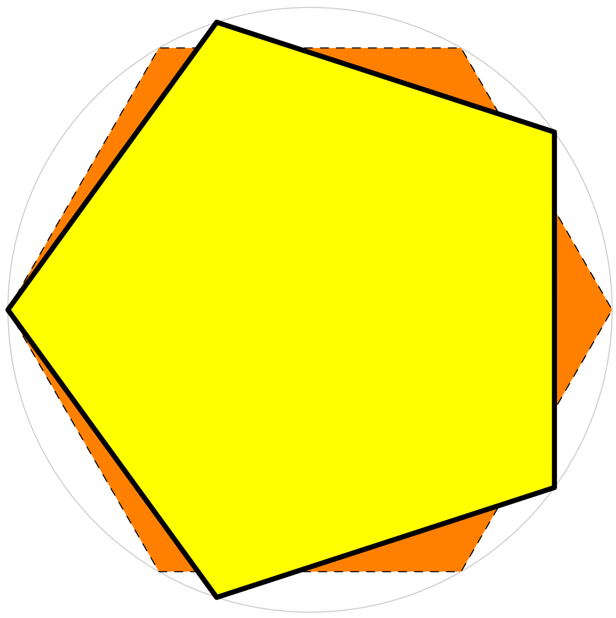
$$a^2 = r^2 \left(\frac{40-8\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$a^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} r^2 \qquad (1)$$

C'est sur cette dernière relation que nous baserons la démonstration de la construction.

2 La construction

Avant de commencer ce paragraphe, voici la figure que l'on obtient

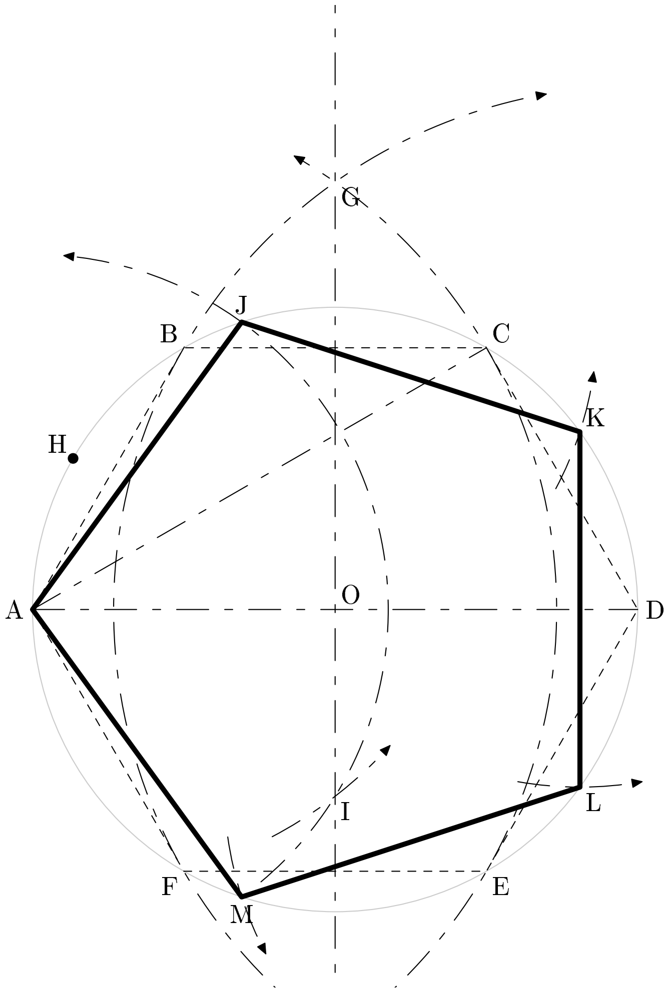


et voici son programme de construction :

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.
2. Tracer l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O.
3. L'arc de cercle de centre A et de rayon AC coupe l'arc de cercle de centre D et de rayon DB en G.
4. Soit H le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$. L'arc de cercle de centre H et de rayon OG coupe la droite (OG) en I.
5. L'arc de cercle de centre A et de rayon AI coupe le cercle $\mathcal{C}$ en J.
6. AJ est la longueur du côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

3 Démonstration

Pour démontrer que le pentagone $AJKLM$ est régulier, on utilise la figure suivante :



Soit r le rayon du cercle.

En appliquant 2 fois le théorème de Pythagore (dans les triangles rectangles ACD et AOG), on obtient

$$AC = r\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad OG = r\sqrt{2}$$

On a $\widehat{IOH} = 120^\circ$ et la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle OHI nous permet d'écrire

$$HI^2 = OH^2 + OI^2 + 2.OH.OI.\cos 120$$
$$2r^2 = r^2 + OI^2 - 2r.OI.\frac{1}{2}$$

La longueur OI est donc solution de l'équation du second degré

$$OI^2 - r.OI - r^2 = 0$$

de discriminant $5r^2$ et donc la seule solution positive est

$$OI = \frac{r + r\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}r = \phi r$$

où ϕ est la notation classique de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est à dire le nombre d'or[2].

[2]Rappelons que ϕ est solution de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème de Pythagore dans le triangle AOI, on obtient

$$
\begin{aligned}
AI^2 &= r^2 + \phi^2 r^2 \\
AI^2 &= r^2 \left(1 + \phi^2\right) \\
AI^2 &= r^2 \left(2 + \phi\right) \\
AI^2 &= r^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Ce qui est conforme à l'égalité 1 et prouve que $AJKLM$ est un pentagone régulier.