Des pavages en MetaPost

Christophe Poulain

8 mars 2004

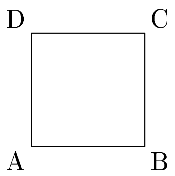
Table des matières

1 Introduction

En parcourant le CD-ROM « Pour la Science 1996-2002 » que Jean-Michel Sarlat m'a fait découvrir ; je suis tombé, dans le numéro 272, sur un article de Ian Stewart qui traite des pavages en toute simplicité. Intrigué par les figures obtenues et pour le plaisir, je me suis mis dans l'idée de les obtenir à l'aide de MetaPost.

2 Cas n°1 : dans un carré

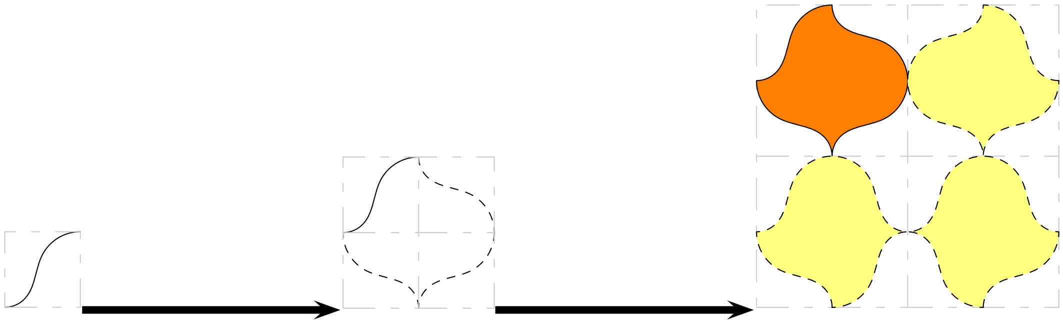
2.1 Le début. . .



Si on considère le carré unité $ABCD$ (dans le sens trigonométrique) ci-contre, on peut obtenir des pavages assez simplement :

- on considère une courbe $\mathcal{C}$ reliant A à C,
- puis on construit l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la rotation de centre B, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$; l'image du symétrique, par rapport à la droite (BC) de la courbe $\mathcal{C}$ par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et enfin l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

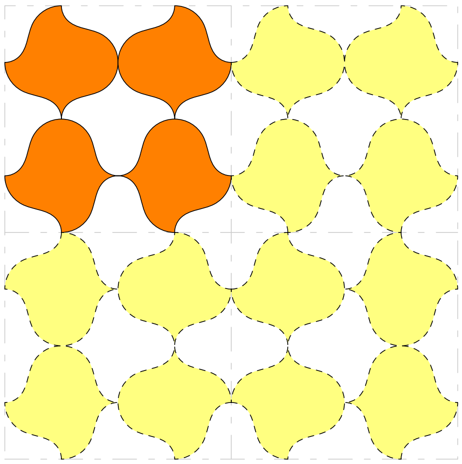
Un petit dessin valant mieux qu'un long discours, voilà ce que ça donne.

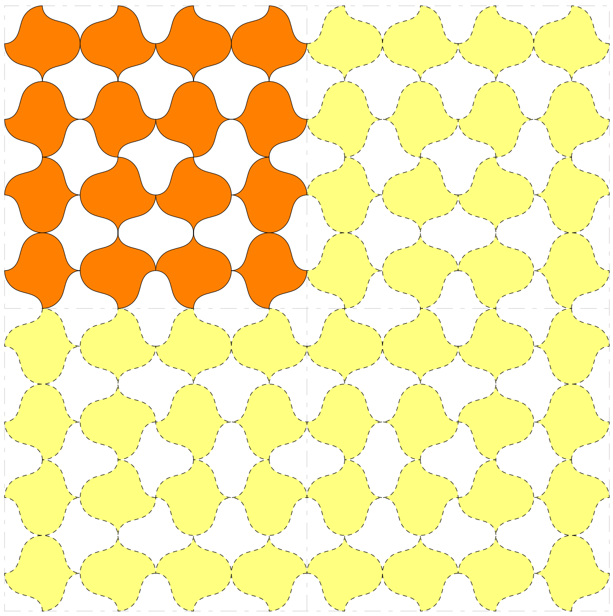


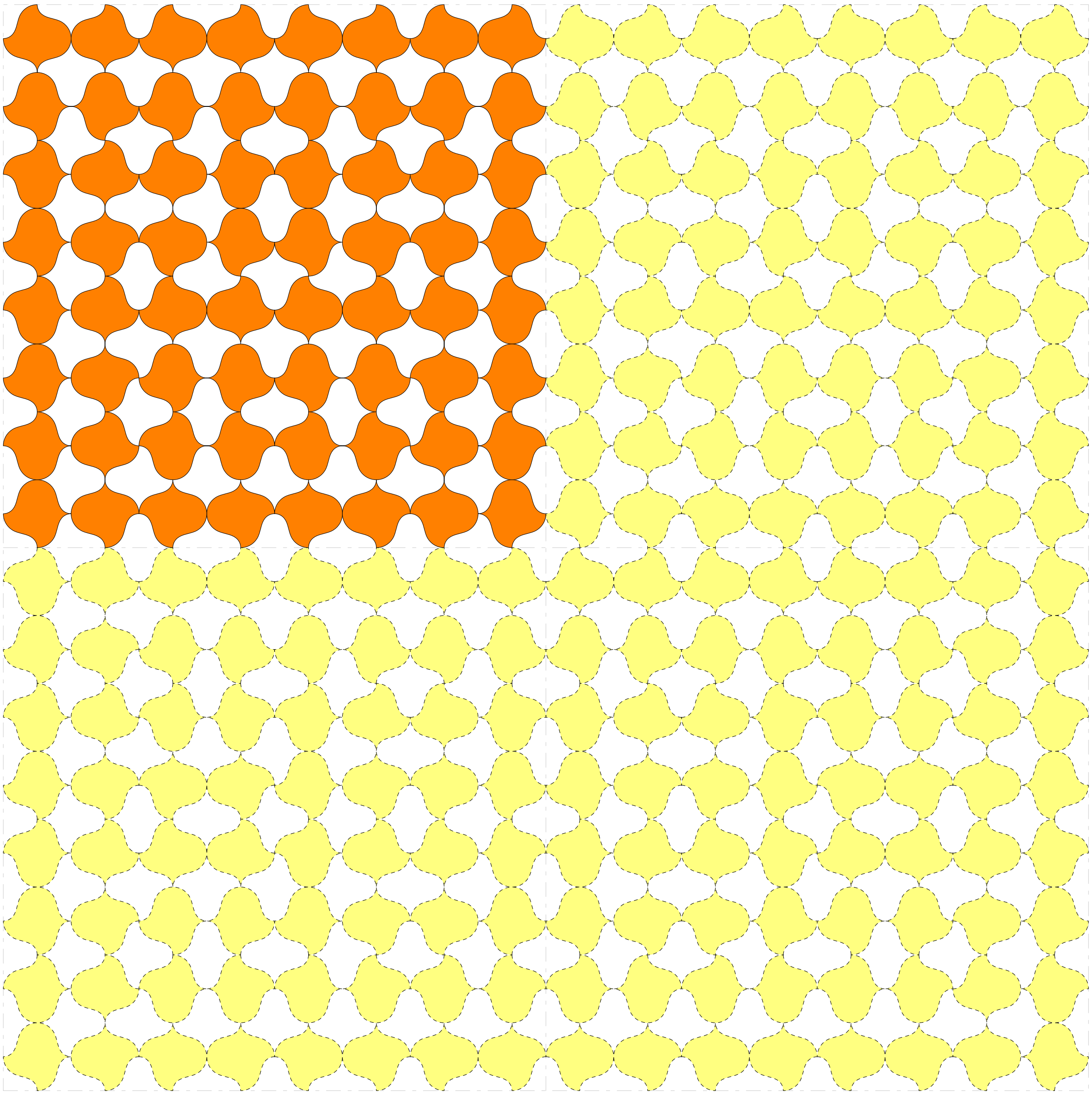
j'ai choisi la même présentation que dans le magazine ; à savoir indiquer par des couleurs et des traçages différents, ce qui apparaît dans la nouvelle construction.

2.2 ...et la « généralisation »

On trouvera ci-dessous les figures des étapes 3, 4 et 5. Une mise à l'échelle est nécessaire pour la représentation.
On trouvera, en annexe, la macro permettant ces constructions.

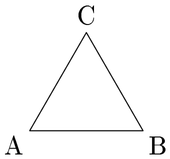






3 Cas n°2 : le triangle équilatéral

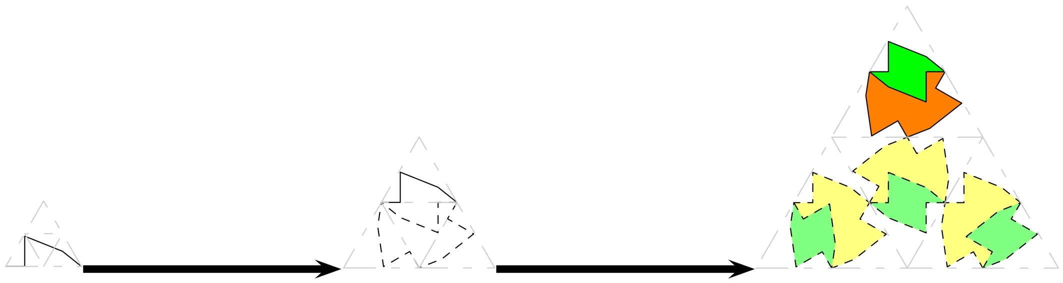
3.1 Le début...



Si on considère le triangle équilatéral unité ABC (dans le sens trigonométrique), on peut obtenir des pavages assez simplement :

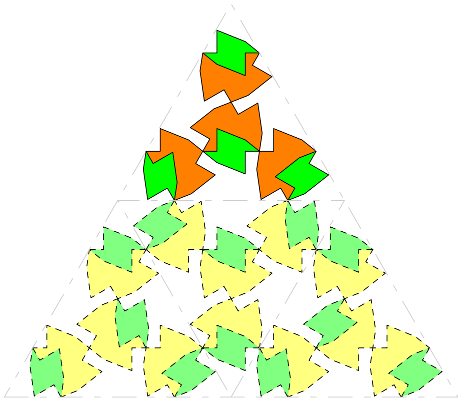
- on considère une courbe $\mathcal{C}$ reliant A à B,
- puis on construit l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la symétrie d'axe (AB) ; l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la rotation de centre le symétrie de l'isobarycentre de ABC par rapport à la droite (AB), et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$; l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la rotation de centre le symétrie de l'isobarycentre de ABC par rapport à la droite (AB), et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

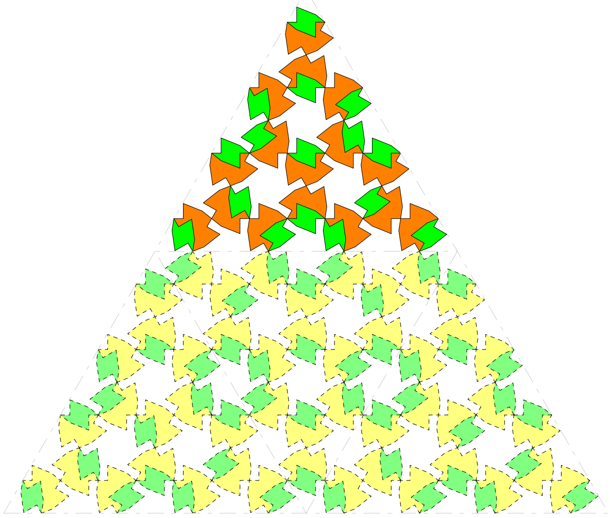
Un petit dessin valant mieux qu'un long discours, voilà ce que ça donne. (*les échelles sont différentes afin de bien faire comprendre ce qui se passe.*)

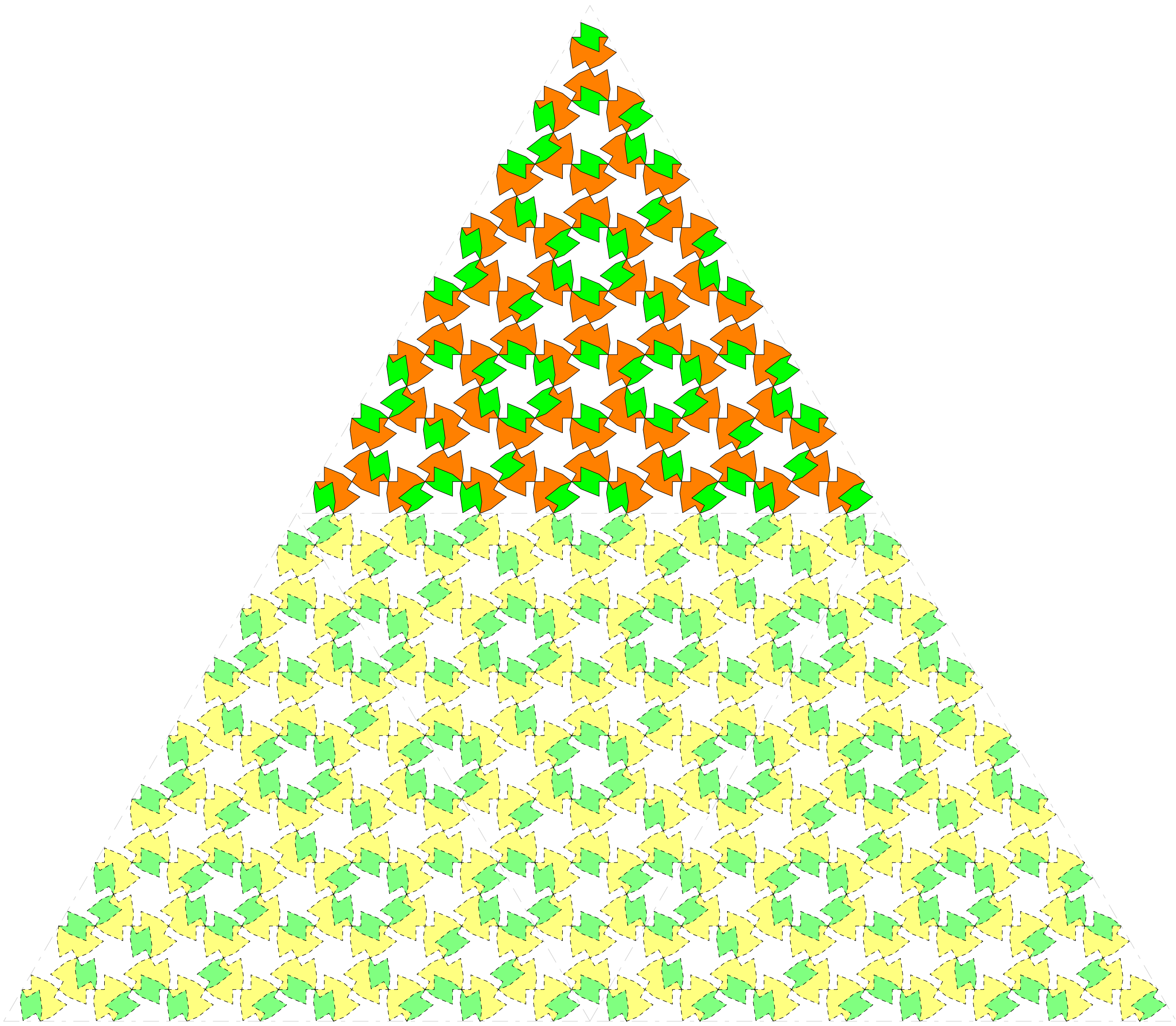


3.2 ...et la "généralisation"

On trouvera ci-dessous les figures des étapes 3, 4 et 5 avec toujours une mise à l'échelle et la macro en annexe.







A Annexe

A.1 Macro pour le pavage à l'aide d'un carré

```
%%D'apres 'Pour la science' n°272 Avril 2000 - p106

input geometriesyr12;

vardef pavages(expr chemin,tour,coul)=
  save $;
  picture $;
  pair A,B,C,D;
  A=u*(0,0);
  B=u*(1,0);
  C=u*(1,1);
  D=u*(0,1);
  path especes;
  especes=chemin--rotation(chemin,B,-90)--reverse(rotation
(symetrie(chemin,B,C),B,-90))--rotation(chemin,B,90)--cycle;
  if tour=0:
    $=image(
      trace chemin;
      );
```

```
  elseif tour=1:
    $=image(
      fill especes withcolor coul;
      trace especes;
      A:=A shifted(u*(0,-1));
      B:=B shifted(u*(1,-1));
      C:=C shifted(u*(1,0));
      );
  elseif tour>=2:
    $=pavages(chemin,tour-1,coul);
    $:=image(
      trace $;
      trace symetrie($,B,C);
      trace rotation(symetrie($,B,C),B,-90);
      trace rotation($,B,90);
      A:=A shifted(u*(0,-(2**(tour-1))));
      B:=B shifted(u*(2**(tour-1),-(2**(tour-1))));
      C:=C shifted(u*(2**(tour-1),0));
      );
  fi;
  $
enddef;

vardef pavagescar(expr chemin,tour,coul)=
  save $;
  picture $;
  pair A,B,C,D;
  A=u*(0,0);
  B=u*(1,0);
  C=u*(1,1);
  D=u*(0,1);
  if tour=0:
    $=image(
      trace chemin;
      trace A--B--C--D--cycle dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
      off 6bp) withcolor gris;
      );
  elseif tour=1:
    $=image(
      trace chemin;
      drawoptions(dashed evenly);
      trace rotation(chemin,B,-90);
      trace reverse(rotation(symetrie(chemin,B,C),B,-90));
      trace rotation(chemin,B,90);
      drawoptions();
      A:=A shifted(u*(0,-1));
      B:=B shifted(u*(1,-1));
      C:=C shifted(u*(1,0));
      trace A--B--C--D--cycle dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
      off 6bp) withcolor gris;
      trace iso(A,D)--iso(B,C) dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
      off 6bp) withcolor gris;
```

```
      trace iso(A,B)--iso(C,D) dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
      off 6bp) withcolor gris;
      );
  elseif tour>=2:
    $=image(
      trace pavages(chemin,tour-1,coul);
      drawoptions(dashed evenly);
      trace symetrie(pavages(chemin,tour-1,coul+0.5blanc),B,C);
      trace rotation(symetrie(pavages(chemin,tour-1,coul+0.5blanc)
,B,C),B,-90);
      trace rotation(pavages(chemin,tour-1,coul+0.5blanc),B,90);
      drawoptions();
      A:=A shifted(u*(0,-(2**(tour-1))));
      B:=B shifted(u*(2**(tour-1),-(2**(tour-1))));
      C:=C shifted(u*(2**(tour-1),0));
      );
    trace A--B--C--D--cycle dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp off
    6bp) withcolor gris;
    trace iso(A,D)--iso(B,C) dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
    off 6bp) withcolor gris;
    trace iso(A,B)--iso(C,D) dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
    off 6bp) withcolor gris;
  fi;
  $
enddef;
```

A.2 Macro pour le pavage à l'aide d'un triangle équilatéral

```
%%D'apres 'Pour la science' n°272 Avril 2000 - p106

input geometriesyr12;

vardef pavagesequi(expr chemin,tour,coul,coull)=
  save $;
  picture $;
  pair A,B,C;
  A=u*(0,0);
  B=u*(1,0);
  C=rotation(B,A,60);
  path especes;
  especes=chemin--rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120)--
rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120)--cycle;
  if tour=0:
    $=image(
      trace chemin;
      );
  elseif tour=1:
    $=image(
      fill especes withcolor coul;
      fill (chemin--symetrie(chemin,iso(A,B))--cycle) withcolor coull;
      trace especes;
```

```
      trace symetrie(chemin,iso(A,B));
      A:=symetrie(C,A);
      B:=symetrie(C,B);
      );
  elseif tour>=2:
    $=pavagesequi(chemin,1,coul,coull);
    for k=2 upto tour:
      $:=image(
        trace $;
        trace rotation($,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120);
        trace rotation($,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120);
        trace symetrie($,iso(A,B));
        A:=symetrie(C,A);
        B:=symetrie(C,B)
        );
    endfor;
  fi;
  $
enddef;

vardef pavagesequiqui(expr chemin,tour,coul,coull)=
  save $;
  picture $;
  pair A,B,C;
  A=u*(0,0);
  B=u*(1,0);
  C=rotation(B,A,60);
  path especes;
  especes=chemin--rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120)--
rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120)--cycle;
  if tour=0:
    $=image(
      trace chemin;
      );
  elseif tour=1:
    $=image(
      trace chemin;
      drawoptions(dashed evenly);
      trace rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120);
      trace rotation(chemin,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120);
      trace symetrie(chemin,iso(A,B));
      drawoptions();
      A:=symetrie(C,A);
      B:=symetrie(C,B);
      );
  elseif tour=2:
    $=image(
      fill especes withcolor coul;
      fill (chemin--symetrie(chemin,iso(A,B))--cycle) withcolor coull;
      trace especes;
      trace symetrie(chemin,iso(A,B));
      A:=symetrie(C,A);
```

```
      B:=symetrie(C,B);
      );
    $:=image(
      trace $;
      drawoptions(dashed evenly);
      trace rotation(pavagesequi(chemin,1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc)
,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120);
      trace rotation(pavagesequi(chemin,1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc)
,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120);
      trace symetrie(pavagesequi(chemin,1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc),iso(A,B));
      drawoptions();
      A:=symetrie(C,A);
      B:=symetrie(C,B);
      );
  elseif tour>=3:
    $=pavagesequi(chemin,1,coul,coull);
    for k=2 upto tour-1:
      $:=image(
        trace $;
        trace rotation($,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120);
        trace rotation($,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120);
        trace symetrie($,iso(A,B));
        A:=symetrie(C,A);
        B:=symetrie(C,B);
        );
    endfor;
    $:=image(
      trace $;
      drawoptions(dashed evenly);
      trace rotation(pavagesequi(chemin,tour-1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc)
,symetrie(iso(A,B,C),A,B),-120);
      trace rotation(pavagesequi(chemin,tour-1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc)
,symetrie(iso(A,B,C),A,B),120);
      trace symetrie(pavagesequi(chemin,tour-1,coul+0.5blanc,coull+0.5blanc)
,iso(A,B));
      drawoptions();
      A:=symetrie(C,A);
      B:=symetrie(C,B);
      );
  fi;
  $:=image(
    trace $;
    trace A--B--C--cycle dashed dashpattern(on12bp off6bp on3bp
    off6bp) withcolor gris;
    trace iso(A,B)--iso(B,C)--iso(C,A)--cycle dashed
    dashpattern(on12bp off6bp on3bp off6bp) withcolor gris;
    );
  $
enddef;
```