Propriétés de Thalès.

Septembre 2004

Table des matières

1 Un peu de logique

1.1 Propriété

Une **propriété** est une phrase mathém

"Si hypothès

Chaque fois que les données vérifient l'
Exemple:
"Si un quadrilatère est un carré , a
mathématique bien connue.

1.2 Propriété réciproque

La phrase obtenue en inversant la conclu
Celle-ci nécessite éventuelement une ré
est vraie, on l'apellera alors **propriété**
Exemple:
La propriété réciproque de la précéd
rallélogramme , alors c'est un carré
rallélogramme quelconque ne possède p

1.3 Propriété contraposée

La **contraposée** d'une propriété cons
conclusion(s), et en prenant leurs négat
d'une propriété est toujours vraie.
Exemple:
La contraposée de la première propos
rallélogramme , alors ce n'est pas un ca

Exercices : Écrire la réciproque et la

2 La proportionnalité

Le théorème de Thalès n'est ni plus ni
géométrie. Nous allons donc rapeller ic
lors de l'utilisation du théorème de Tha

Règle 1: *Pour tous nombres a,b,c et*

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ équivalent}$$

La règle de l'égalité des produits en
égalité de produits. Elle sera utilisée ic
inévitablement de l'application du thé
modèle bien connu d'équation $ax = b$ c

Exemple:

- Résoudre $\frac{x}{4} = \frac{3}{8}$ est équivalent à résoudre :$8x = 12$, soit $x = \frac{12}{8} = 1,5$.
- Résoudre $\frac{3}{x} = \frac{4}{12}$ est équivalent à résoudre :$4x = 36$, soit $x = \frac{36}{4} = 9$.
- Résoudre $\frac{3}{2} = \frac{x}{6}$ est équivalent à résoudre :$2x = 18$, soit $x = \frac{18}{2} = 9$.
- Résoudre $\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$ est équivalent à résoudre :$5x = 10$, soit $x = \frac{10}{5} = 2$.

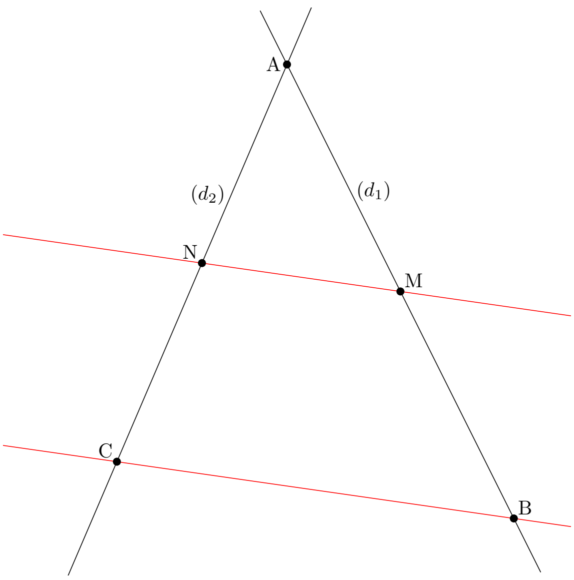
3 Le théorème de Thalès

3.1 Enoncé

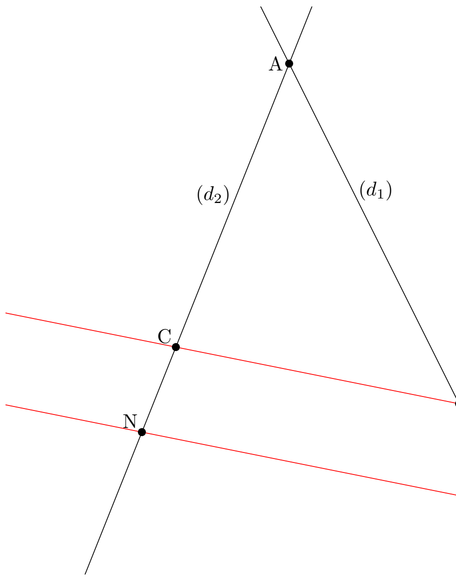
Théorème 1:
Si
- *(d1) et (d2) sont deux droites sécantes en A,*
- *M et B sont deux points de (d1), distincts de A,*
- *N et C sont deux points de (d2), distincts de A,*
- *(BC) est parallèle à (MN)*

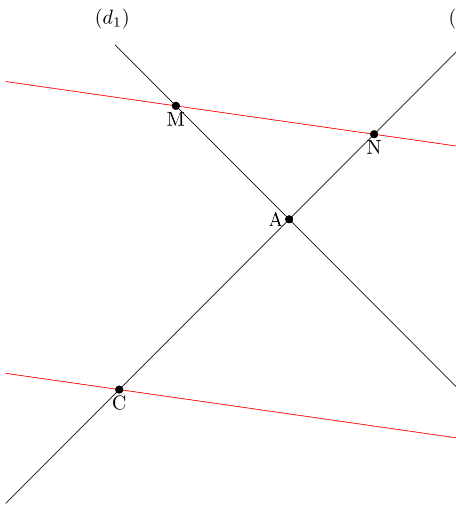
alors :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

On peut alors rencontrer trois cas de figures (on parlera de **configurations**) :



Configuration n° 1



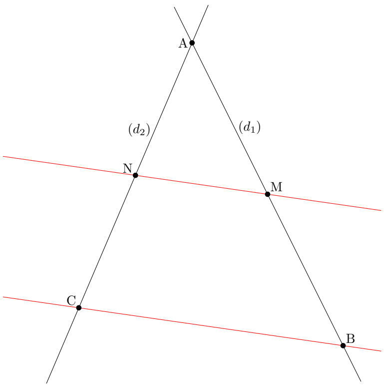


Méthode 1: *Quelques petites règles*
per dans l'égalité des rapports :
- *On travaille toujours dans deux tri*
concours des deux droites sécantes).
- *Une fois trouvé A et vérifié les hyp*
égalités qui commencent toujours p
trois points alignés.
- *La dernière égalité est obtenue à p*
mentalement les points A et le sign
- *Sur la ligne du haut, on trouve les*
bas, les côtés du triangle ABC.

3.2 Applications

Le théorème des milieux est une des applications fondamentales du théorèmes de Thalès. Il a été vu en classe de quatrième. Nous allons en voir d'autres maintenant.

Exemple 1 :



Déterminer MN sachant que $AM = 5cm$; $AB = 20cm$ et $BC = 12cm$ et que $(MN)//(BC)$.

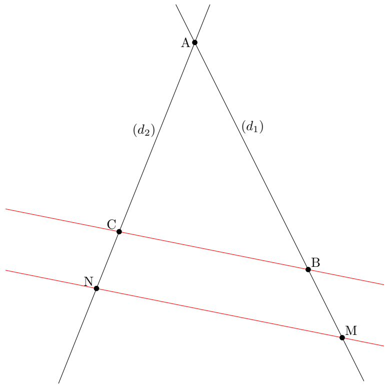
Solution 1 :

D'après la figure les points A, M et B sont alignés et les points A, N et C sont alignés. De plus (MN)//(BC). Le théorème de Thalès entraîne les égalités suivantes : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$. Donc, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$., $\dfrac{5}{10} = \dfrac{MN}{12}$. soit $MN = \dfrac{5 \times 12}{10} = 6$ cm.

Remarques 1 :

Nous ne nous sommes pas servi de toutes les égalités du théorème. Il faut savoir choisir la bonne égalité. Comment fait-on ce choix ? On choisit les rapports que nous connaissons entièrement ou qui contiennent la longueur recherchée. Ici, on a choisi $\dfrac{MN}{BC}$ car on cherche MN et on connait BC. De même, on a choisi $\dfrac{AM}{AB}$ car on connait AM et AB.

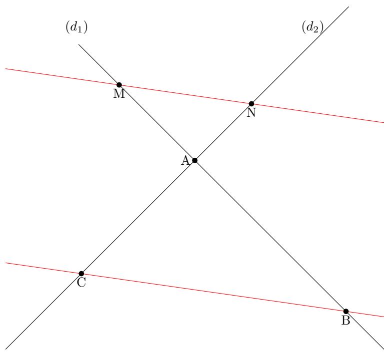
Exemple 2 :



Quel
$AC =$

Sur la figure, nous voyons que les p
A, C et N. Par hypothèse on a $(M$
$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ d'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$
$\dfrac{2+5}{2} = \dfrac{AM}{14}$. Ainsi, $\dfrac{7}{2} = \dfrac{AM}{14}$ et alors

---



Que
MB

D'après la figure, les points M, A et B so
de Thalès permet de déduire que : $\dfrac{AM}{AB}$
soit : $\dfrac{CN - AC}{AC} = \dfrac{AM}{BM - AM}$. Poson
le produit en croix on a : $1,5(5-x) =$

3.3 Contraposée

Théorème 2:
Si
– *(d_1) et (d_2) sont deux droites sécantes en A,*
– *M et B sont deux points de (d_1), distincts de A,*
– *N et C sont deux points de (d_2), distincts de A,*
– *deux des rapports $\dfrac{AM}{AB}$, $\dfrac{AN}{AC}$, et $\dfrac{MN}{BC}$ sont différents*
alors :

les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Remarques :
Cette contraposée permet uniquement de montrer que des droites ne sont pas parallèles.

Exemple :

Soit ABC un triangle isocèle en B tel que $AB = 12\ cm$.
Soit M un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 3\ cm$ et N un point du segment $[AC]$ tel que $MN = 4\ cm$.
Les droites (MN) et (BC) sont elles-parallèles ?

Solution :

Pour prouver que des droites sont parallèles, on peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès, par contre, pour prouver que des droites ne sont pas parallèles, on doit utiliser la contraposée du théorème de Thalès.
Dans tous les cas, nous devons calculer les différents rapports (au brouillon) et selon le résultat, adapter la rédaction convenable.
Nous savons ici que ABC est isocèle en B donc : $AB = CB = 12\ cm$. Dans le triangle ABC on a :

$$\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} \text{ et } \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}. \text{ Donc } \dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{MN}{BC}. \end{cases}$$

La contraposée du théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

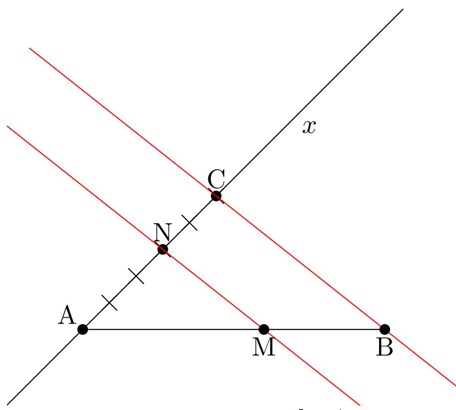
3.4 Partage d'un segment

Deux types de problèmes sont rencontrés en troisième :

1. Etant donnés deux points A et B, comment construire le point M du segment $[AB]$ connaissant le rapport $\dfrac{MA}{AB}$?
2. Etant donnés deux points A et B, comment construire le(s) point(s) M de la droite (AB) connaissant le rapport $\dfrac{MA}{MB}$?

Le premier type est très facile à traiter
est quand à lui moins intuitif, donc un

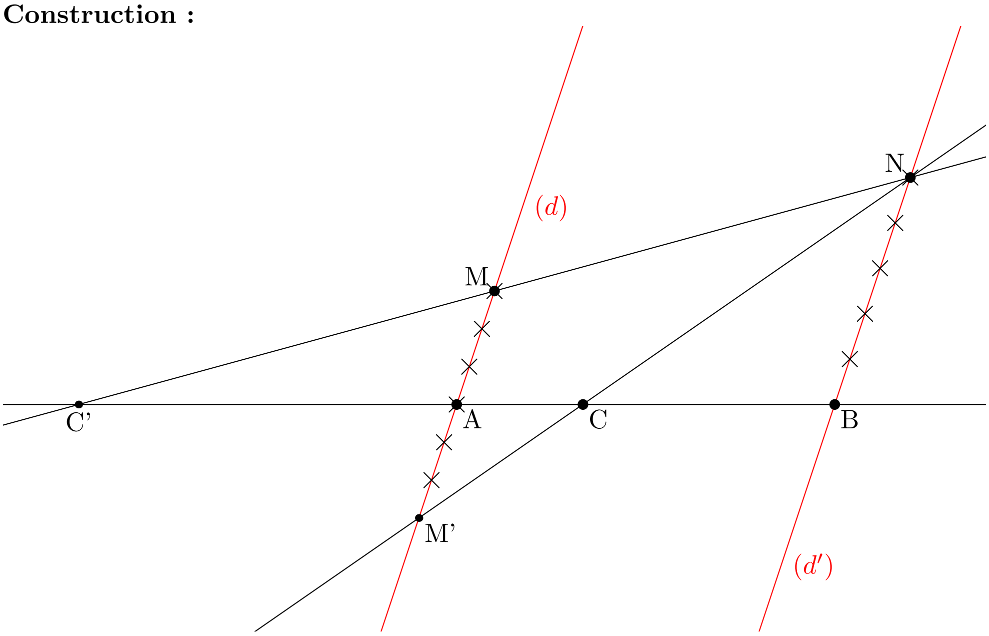
Soient A et B deux points. Placer un p



Traçons une demi-droite $[Ax)$ et gradu
un écart de compas déterminé).
Plaçons alors les points C et N sur $[A$
à (BC) passant par N ; elle coupe $[AB$
vérifie bien les conditions imposées par
On a en effet deux droites (AB) et (
distincts de A et deux points M et B
étant parallèles, d'après le théorème de

Soient A et B deux points. Quels sont
$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{3}{5}$?

Construction :



- On construit deux droites (d) et (d') parallèles passant respectivement par A et B.
- On choisit une unité (à la règle, au compas) et on la reporte 3 fois de façon à obtenir les points M et M' sur la droite (d),
- On conserve la même unité et on la reporte 5 fois sur la droite (d') de façon à obtenir le point N.
- On trace (MN) et $(M'N)$.
- Ces deux droites coupent (AB) respectivement en C et C'.

Ces deux points constituent la réponse à la question posée.

Vérification :

On a ici deux configurations de Thalès différentes.

Les droites $(C'B)$ et $(C'N)$ sont sécantes en C'. Les points A,B,M et N sont distincts de C' et les droites (d) et (d') sont parallèles. On peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{C'M}{C'N} = \frac{AM}{BN}$$

. Or, par construction on a $AM = 3$ unités et $BM = 5$ unités, donc :$\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{3}{5}$.

Ainsi, $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{3}{5}$ donc C' est un des points recherchés.

Les droites $(M'N)$ et (AB) sont sécantes en C. Les points A,B,M' et N sont distincts de C et les droites (d) et (d') sont parallèles. On peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CM'}{CN} = \frac{AM'}{BN}$$

. Or, par construction on a $AM' = 3$ unités et $BN = 5$ unités, donc :$\dfrac{AM'}{BN} = \dfrac{3}{5}$.

Ainsi, $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{5}$ donc C est un des points recherchés.

Remarque :

Il resterait à démontrer qu'il n'existe pa
le cadre de la troisième.

4 La réciproque du thé

4.1 Enoncé

Théorème 3:
Si
- *$(d1)$ et $(d2)$ sont deux droites sécan*
- *M et B sont deux points de $(d1)$, d*
- *N et C sont deux points de $(d2)$, di*
- *les points A, B et M d'une part, e sont alignés et dans le même ordre,*
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors :

les droites (BC) et (MN) sont paralle

Remarque :

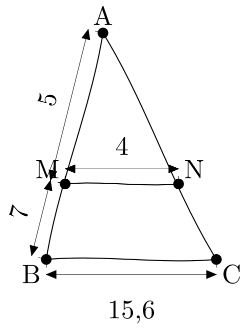
Cette réciproque permet de montrer qu

Une petite nuance existe entre les hyp
triplets de points A, B, M et A, C,
sûr alignés mais aussi rangés dans le m
veut dire que si, en circulant sur $(d1)$,
enfin le point M, en circulant sur $(d2)$,

Pourquoi doit-on préciser que les deux
Si on ne le fait pas on risque de démon
par ailleurs, sont parallèles d'après le
faisons pas cette précision, le théorème
exercices suivants.

4.2 Applications

Dans cet exemple, l'unité de mesure es
Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$
que $AM = 5$ et N est un point du segm
Montrer que les droites (MN) et (BC)



Une figure à main levée suffira amplement ici.

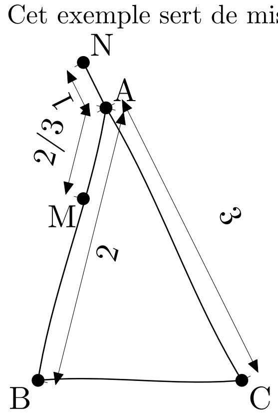
Dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \\ \text{Les points } A,M,B \text{ et } A,N,C \text{ sont aligné et dans le même ordre.} \\ \text{De plus on a : } \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{12} \text{ et } \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{6,5}{15,6} = \dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

Donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple 2 :

Cet exemple sert de mise en garde sur la réciproque de Thalès.



Faire une figure à main levée respectant à peu près les proportions.

On a toujours $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$, et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, mais A,M et B sont dans l'ordre $A \mapsto M \mapsto B$, alors que N,A et C sont dans l'ordre $N \mapsto A \mapsto C$. On ne peut donc pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès.