Propriétés de Thalès.

Septembre 2004

Table des matières

1 Un peu de logique **1**
1.1 Propriété . . . 1
1.2 Propriété réciproque . . . 1
1.3 Propriété contraposée . . . 1

2 La proportionnalité **1**

3 Le théorème de Thalès **2**
3.1 Enoncé . . . 2
3.2 Applications . . . 3
3.3 Contraposée . . . 4
3.4 Partage d'un segment . . . 4

4 La réciproque du théorème de Thalès **5**
4.1 Enoncé . . . 5
4.2 Applications . . . 5

1 Un peu de logique

1.1 Propriété

Une **propriété** est une phrase mathématique vraie que l'on écrit en général sous la forme :

"Si hypothèse(s) , alors conclusion(s) ".

Chaque fois que les données vérifient l' hypothèse, on en déduit que la conclusion est vraie.
Exemple:
"Si un quadrilatère est un carré , alors c'est un parallélogramme " est une propriété mathématique bien connue.

1.2 Propriété réciproque

La phrase obtenue en inversant la conclusion et l'hypothèse s'appelle une phrase **réciproque**. Celle-ci nécessite éventuelement une réécriture en français et n'est pas toujours vraie. Si elle est vraie, on l'apellera alors **propriété réciproque**.
Exemple:
La propriété réciproque de la précédente est alors : " Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors c'est un carré ", qui n'est évidemment pas vraie puisqu'un parallélogramme quelconque ne possède pas d'angle droit.

1.3 Propriété contraposée

La **contraposée** d'une propriété consiste à réécrire celle-ci en inversant hypothèse(s) et conclusion(s), et en prenant leurs négations respectives. *Nous admettrons que la contraposée d'une propriété est toujours vraie.*
Exemple:
La contraposée de la première proposition est ici :" Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme , alors ce n'est pas un carré ". Elle est bien vérifiée.

Exercices : Écrire la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore.

2 La proportionnalité

Le théorème de Thalès n'est ni plus ni moins qu'une application de la proportionnalité à la géométrie. Nous allons donc rapeller ici la règle du produit en croix qui va beaucoup servir lors de l'utilisation du théorème de Thalès et en voir quelques exemples :

Règle 1: *Pour tous nombres a,b,c et d avec c et d non nuls, on a :*

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ équivalent à : } a \times d = b \times c$$

La règle de l'égalité des produits en croix transforme une égalité de quotients en une égalité de produits. Elle sera utilisée ici pour résoudre des équations-quotients qui surgiront inévitablement de l'application du théorème de Thalès, en permettant de les ramener au modèle bien connu d'équation $ax = b$ ou $a \neq 0$ qui a pour solution $x = \frac{b}{a}$.

Exemple:

- Résoudre $\frac{x}{4} = \frac{3}{8}$ est équivalent à résoudre :$8x = 12$, soit $x = \frac{12}{8} = 1,5$.
- Résoudre $\frac{3}{x} = \frac{4}{12}$ est équivalent à résoudre :$4x = 36$, soit $x = \frac{36}{4} = 9$.
- Résoudre $\frac{3}{2} = \frac{x}{6}$ est équivalent à résoudre :$2x = 18$, soit $x = \frac{18}{2} = 9$.
- Résoudre $\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$ est équivalent à résoudre :$5x = 10$, soit $x = \frac{10}{5} = 2$.

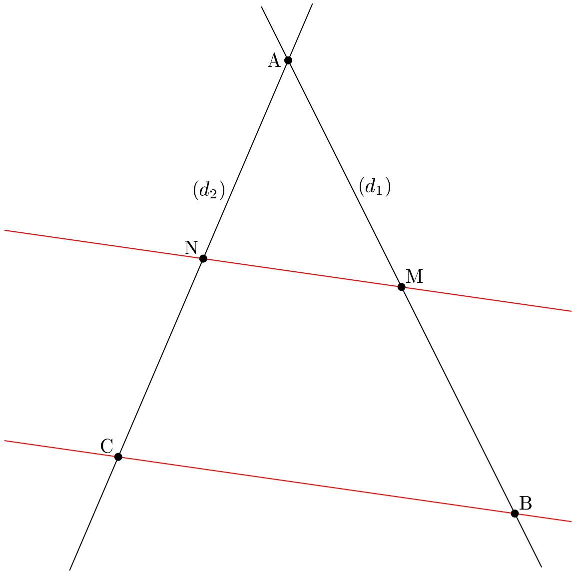
3 Le théorème de Thalès

3.1 Enoncé

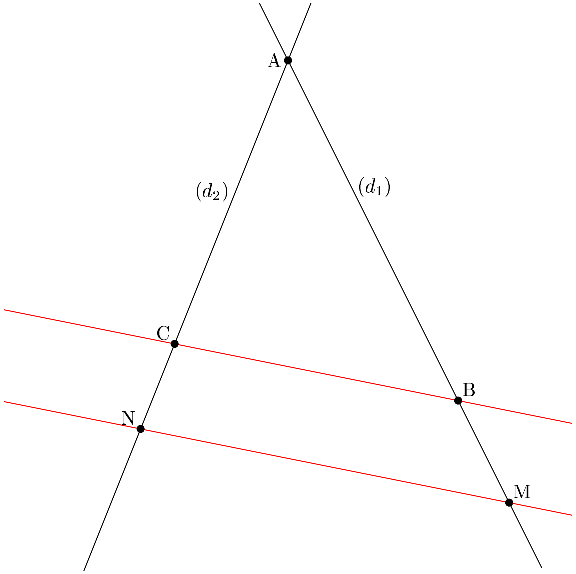
Théorème 1:
Si
- *(d1) et (d2) sont deux droites sécantes en A,*
- *M et B sont deux points de (d1), distincts de A,*
- *N et C sont deux points de (d2), distincts de A,*
- *(BC) est parallèle à (MN)*

alors :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

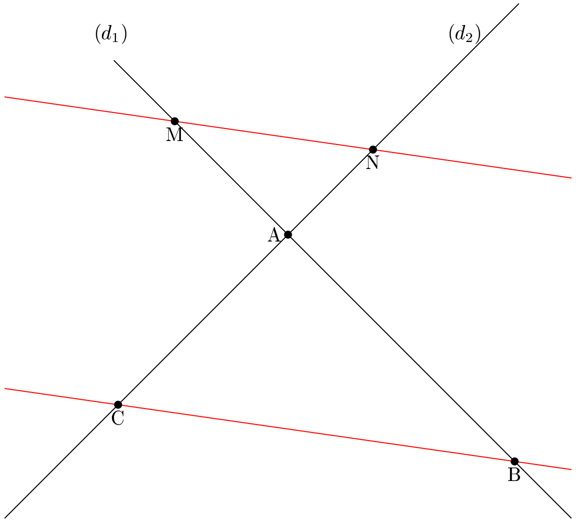
On peut alors rencontrer trois cas de figures (on parlera de **configurations**) :



Configuration n°1



Configuration n°2



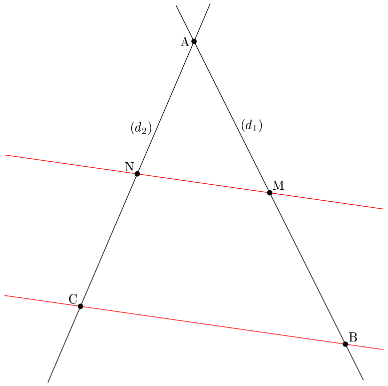
Configuration n°3 dite "du papillon de Thalès."

Méthode 1: *Quelques petites règles à bien connaître pour ne pas se tromper dans l'égalité des rapports :*
- *On travaille toujours dans deux triangles de même sommet A (point de concours des deux droites sécantes).*
- *Une fois trouvé A et vérifié les hypothèses, on écrit les deux premières égalités qui commencent toujours par A. Chaque rapport fait référence à trois points alignés.*
- *La dernière égalité est obtenue à partir des deux premières en retirant mentalement les points A et le signe =.*
- *Sur la ligne du haut, on trouve les côtés du triangle AMN, sur celle du bas, les côtés du triangle ABC.*

3.2 Applications

Le théorème des milieux est une des applications fondamentales du théorèmes de Thalès. Il a été vu en classe de quatrième. Nous allons en voir d'autres maintenant.

Exemple 1 :



Déterminer MN sachant que $AM = 5cm$ *;* $AB = 20cm$ *et* $BC = 12cm$ *et que* $(MN)//(BC)$.

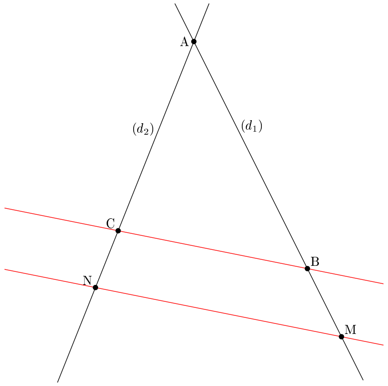
Solution 1 :

D'après la figure les points A, M et B sont alignés et les points A, N et C sont alignés. De plus (MN)//(BC). Le théorème de Thalès entraîne les égalités suivantes :$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.
Donc, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$., $\dfrac{5}{10} = \dfrac{MN}{12}$. soit $MN = \dfrac{5 \times 12}{10} = 6$ cm.

Remarques 1 :

Nous ne nous sommes pas servi de toutes les égalités du théorème. Il faut savoir choisir la bonne égalité. Comment fait-on ce choix ? On choisit les rapports que nous connaissons entièrement ou qui contiennent la longueur recherchée. Ici, on a choisi $\dfrac{MN}{BC}$ car on cherche MN et on connait BC. De même, on a choisi $\dfrac{AM}{AB}$ car on connait AM et AB.

Exemple 2 :

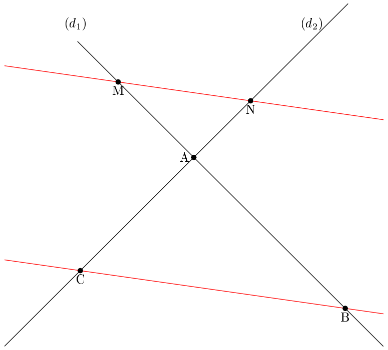


Quelle est la longueur AM *sachant que* $(CB)//(MN)$, $AC = 2cm$, $CN = 5cm$, $AB = 14cm$ *?*

Solution 2 :

Sur la figure, nous voyons que les points A, B et M sont alignés ainsi que les points A, C et N. Par hypothèse on a $(MN)//(BC)$. D'après le théorème de Thalès on a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ d'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. Or $AN = AC + CN$, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC+CN}{AC}$, soit $\dfrac{2+5}{2} = \dfrac{AM}{14}$. Ainsi, $\dfrac{7}{2} = \dfrac{AM}{14}$ et alors $AM = \dfrac{7 \times 14}{2} = \dfrac{98}{2} = 49$.

Exemple 3 :



Que vaut AC *sachant que* $CN = 5cm$, $AM = 2cm$, $MB = 3,5cm$ *et que* $(MN)//(BC)$ *?*

Solution 3 :

D'après la figure, les points M, A et B sont alignés ainsi que les points N, A, et C. Le théorème de Thalès permet de déduire que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$, on a en particulier : $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$ soit : $\dfrac{CN - AC}{AC} = \dfrac{AM}{BM - AM}$. Posons $x = AC$; on obtient alors : $\dfrac{5-x}{x} = \dfrac{2}{3,5-2}$. Avec le produit en croix on a : $1,5(5-x) = 2x$, équation qui a pour solution $x = \dfrac{15}{7}$.

3.3 Contraposée

Théorème 2:
Si
– (d_1) *et* (d_2) *sont deux droites sécantes en* A*,*
– M *et* B *sont deux points de* (d_1)*, distincts de* A*,*
– N *et* C *sont deux points de* (d_2)*, distincts de* A*,*
– *deux des rapports* $\frac{AM}{AB}, \frac{AN}{AC}$*, et* $\frac{MN}{BC}$ *sont différents*
alors :

les droites (BC) *et* (MN) *ne sont pas parallèles.*

Remarques :
Cette contraposée permet uniquement de montrer que des droites ne sont pas parallèles.

Exemple :

Soit ABC un triangle isocèle en B tel que $AB = 12\ cm$.
Soit M un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 3\ cm$ et N un point du segment $[AC]$ tel que $MN = 4\ cm$.
Les droites (MN) et (BC) sont elles-parallèles ?

Solution :

Pour prouver que des droites sont parallèles, on peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès, par contre, pour prouver que des droites ne sont pas parallèles, on doit utiliser la contraposée du théorème de Thalès.
Dans tous les cas, nous devons calculer les différents rapports (au brouillon) et selon le résultat, adapter la rédaction convenable.
Nous savons ici que ABC est isocèle en B donc : $AB = CB = 12\ cm$. Dans le triangle ABC on a :

$$\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \\ \frac{AM}{AB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{MN}{BC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \text{ Donc } \frac{AM}{AB} \neq \frac{MN}{BC}. \end{cases}$$

La contraposée du théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

3.4 Partage d'un segment

Deux types de problèmes sont rencontrés en troisième :

1. Etant donnés deux points A et B, comment construire le point M du segment $[AB]$ connaissant le rapport $\frac{MA}{AB}$?
2. Etant donnés deux points A et B, comment construire le(s) point(s) M de la droite (AB) connaissant le rapport $\frac{MA}{MB}$?

Le premier type est très facile à traiter une fois qu'on a vu et compris un exemple. Le second est quand à lui moins intuitif, donc un peu plus délicat à traiter.

Exemple 1 :

Soient A et B deux points. Placer un point M sur $[AB]$ tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$.

Solution 1 :

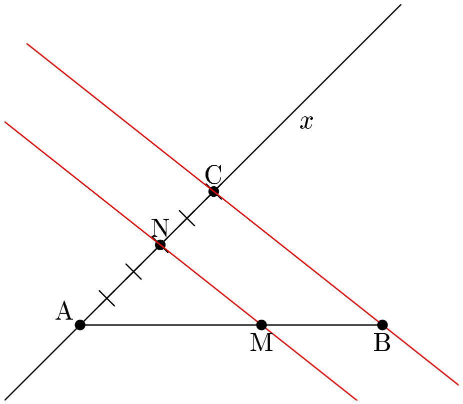


*Fig.*1 M *est tel que* $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$

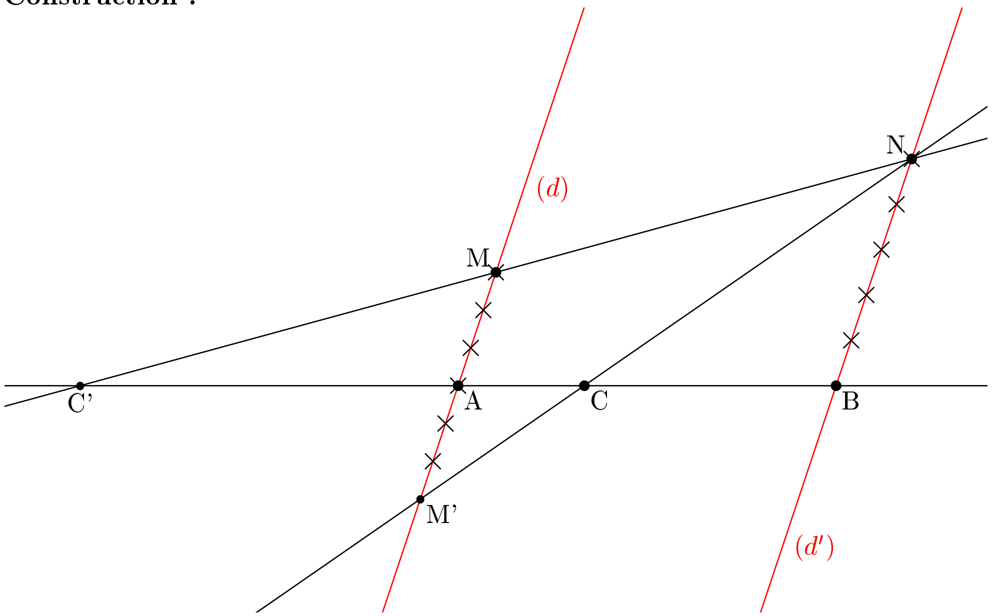
Traçons une demi-droite $[Ax)$ et graduons-là de façon régulière (par ex. tous les cm ou avec un écart de compas déterminé).
Plaçons alors les points C et N sur $[Ax)$ tels que $AC = 5$ et $AN = 3$. Traçons la parallèle à (BC) passant par N ; elle coupe $[AB]$ en M. On doit maintenant vérifier que le point M vérifie bien les conditions imposées par l'énoncé.
On a en effet deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, deux points N et C sur (AC) distincts de A et deux points M et B sur (AB) distincts de A. Les droites (BC) et (MN) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$.

Exemple 2 :

Soient A et B deux points. Quels sont les points M appartenant à la droite (AB) tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$?

Solution 2 :

Construction :



- On construit deux droites (d) et (d') parallèles passant respectivement par A et B.
- On choisit une unité (à la règle, au compas) et on la reporte 3 fois de façon à obtenir les points M et M' sur la droite (d),
- On conserve la même unité et on la reporte 5 fois sur la droite (d') de façon à obtenir le point N.
- On trace (MN) et $(M'N)$.
- Ces deux droites coupent (AB) respectivement en C et C'.

Ces deux points constituent la réponse à la question posée.

Vérification :

On a ici deux configurations de Thalès différentes.

Les droites $(C'B)$ et $(C'N)$ sont sécantes en C'. Les points A,B,M et N sont distincts de C' et les droites (d) et (d') sont parallèles. On peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{C'M}{C'N} = \frac{AM}{BN}$$

. Or, par construction on a $AM = 3$ unités et $BM = 5$ unités, donc :$\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{3}{5}$.

Ainsi, $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{3}{5}$ donc C' est un des points recherchés.

Les droites $(M'N)$ et (AB) sont sécantes en C. Les points A,B,M' et N sont distincts de C et les droites (d) et (d') sont parallèles. On peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CM'}{CN} = \frac{AM'}{BN}$$

. Or, par construction on a $AM' = 3$ unités et $BN = 5$ unités, donc :$\dfrac{AM'}{BN} = \dfrac{3}{5}$.

Ainsi, $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{5}$ donc C est un des points recherchés.

Remarque :

Il resterait à démontrer qu'il n'existe pas d'autres solutions à ce problème, mais cela dépasse le cadre de la troisième.

4 La réciproque du théorème de Thalès

4.1 Enoncé

Théorème 3:

Si

- *$(d1)$ et $(d2)$ sont deux droites sécantes en A,*
- *M et B sont deux points de $(d1)$, distincts de A,*
- *N et C sont deux points de $(d2)$, distincts de A,*
- *les points A, B et M d'une part, et les points A, C et N d'autre part sont alignés et dans le même ordre,*
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors :

les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque :

Cette réciproque permet de montrer que des droites sont parallèles.

Une petite nuance existe entre les hypothèses du théorème de Thalès et sa réciproque. Les triplets de points A, B, M et A, C, M , dans le cadre de la réciproque, doivent être bien sûr alignés mais aussi rangés dans le même ordre, sous entendu, sur les deux droites. Cela veut dire que si, en circulant sur $(d1)$, je rencontre d'abord le point A, puis le point B, et enfin le point M, en circulant sur $(d2)$, je dois rencontrer en premier A, puis C, puis N.

Pourquoi doit-on préciser que les deux triplets de points sont rangés dans le même ordre ? Si on ne le fait pas on risque de démontrer que certaines droites incontestablement sécantes par ailleurs, sont parallèles d'après le théorème. Le verdict est donc très lourd, si nous ne faisons pas cette précision, le théorème est faux ! C'est ce que nous allons découvrir dans les exercices suivants.

4.2 Applications

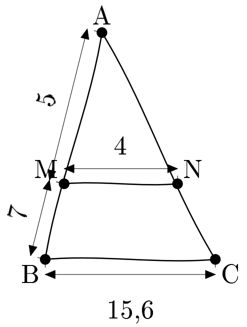
Exemple 1 :

Dans cet exemple, l'unité de mesure est le centimètre.

Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$ et $BC = 15,6$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 5$ et N est un point du segment $[AC]$ tel que $MN = 6,5$.

Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Solution 1 :



Une figure à main levée suffira amplement ici.

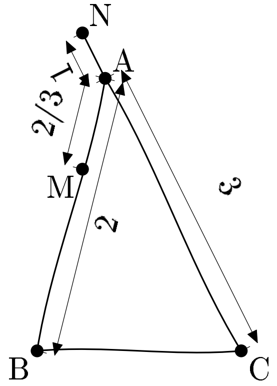
Dans le triangle ABC, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} M \in (AB) \\ N \in (AC) \\ \text{Les points } A,M,B \text{ et } A,N,C \text{ sont aligné et dans le même ordre.} \\ \text{De plus on a : } \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5}{12} \text{ et } \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{6,5}{15,6} = \dfrac{5}{12}. \end{array}\right. \quad \text{Donc } \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC},$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple 2 :

Cet exemple sert de mise en garde sur la réciproque de Thalès.



Faire une figure à main levée respectant à peu près les proportions.

On a toujours $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$, et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, mais A,M et B sont dans l'ordre $A \mapsto M \mapsto B$, alors que N,A et C sont dans l'ordre $N \mapsto A \mapsto C$. On ne peut donc pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès.